

تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۱۰/۲۰

آموزش و پرورش منطقه ۳ تهران

نام و نام خانوادگی:

زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه



دبیرستان پسرانه ی غیر دولتی

مقطع و رشته ی: چهارم تجربی

نام درس: ریاضی ۴

سال تحصیلی ۹۴-۹۳

نام دبیر: آقای نبی نئی

بارم	سوال	ردیف
	<p>۱- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگه داری می شوند . به تصادف متوالیا سه موش از بین آن ها انتخاب می کنیم با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ (۱نمره)</p> <p>۲) احتمال جوانه زدن نوعی لوبیا ۰/۸ است اگر ۷ دانه بکاریم احتمال آن را حساب کنید که لا اقل ۶ دانه جوانه بزند؟ (۱نمره)</p> <p>۳) در پرتاب دو تاس اگر متغیر تصادفی X بیانگر مجموع دو تاس باشد اولاً X چه مقادیری دارد؟ ثانیاً $P(3 \leq X \leq 5)$ را حساب کنید. (۲نمره)</p> <p>۴) اگر α و β ریشه های معادله ی $2X^2 - 3X - 4 = 0$ باشند معادله ای بنویسید که ریشه هایش $(\frac{1}{\alpha} + 1)$ و $(\frac{1}{\beta} + 1)$ باشند. (۱نمره)</p> <p>۵) به ازای کدام مقدار a نقطه ی Min نمودار تابع $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ بر روی خط $y = 1$ واقع است؟ (۱نمره)</p> <p>۶) نام معادله ی $x - 2 < x^2 - 2x$ را حل کنید. (۱نمره)</p> <p>۷) معادله ی $[x - 6 + 5[x]] = 12$ را حل کنید. (۱نمره)</p> <p>۸) اگر $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x + 1) + \log(2y + x^2) = 2$ مقدار y کدام است؟ (۱نمره)</p> <p>۹) اگر $e^{2x} + 6e^x = 16$ حاصل $\frac{\ln(6+e^x)}{x}$ کدام است؟ (۵/۱نمره)</p>	

۱۰) در یک نوع کشت باکتری تعداد باکتری ها بعد از t دقیقه بصورت $f(t) = Ae^{kt}$ می باشد اگر تعداد باکتری ها در شروع کشت ۸۰۰ باشد و در دقیقه ی ۲۰ام تعداد برابر ۳۲۰۰ باشد تعداد باکتری ها در دقیقه ی ۳۰ام کدام است؟ (۱نمره)

۱۱) اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ حاصل $g(1)$ کدام است؟

۱۲) اولاً نشان دهید تابع $f(x) = \frac{2^x+1}{2^x-1}$ معکوس پذیر است ، ثانياً معکوس آن را پیدا کنید. (۵/۱نمره)

۱۳) در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله ی اول است جمله ی هفتم چند برابر جمله ی اول است. (۱نمره)

۱۴) همگرایی و یکنوایی دنباله ی $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ را بررسی کنید. (۱نمره)

۱۵) حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{5n+1}$ را بدست آورید. (۱نمره)

۱۶) جواب کلی معادله مثلثاتی زیر کدام است؟ (۱نمره)

$$2\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\cot x \sin(\pi + x) = 0$$

۱۷) اگر $f(x) = x|\sin \pi x|$ مطلوب است $f'_+(1)$ (۱نمره)

۱۸) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2}, & x > 1 \\ ax + b, & x \leq 1 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد b کدام است؟ (۱نمره)

بارم	کلید سوال	ردیف
	<p>اولین موش سفید (۱)</p> <p>دومی سفید</p> <p>دومی سیاه</p> <p>سومی سیاه</p> $\left(\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6}\right)$ <p>2) $\binom{7}{6} (0/8)^2 (0/2) + \binom{7}{7} (0/8)^7$</p> <p>3) $P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)$</p> $\frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}$ <p>4) $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$</p> $\alpha\beta = -2$ $S_{new} = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$ $P_{new} = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{-2-3+4}{4} = -\frac{1}{4}$ $x^2 - 5x + p = 0 \rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0$ <p>5)</p> $-\frac{\Delta}{4a} = 1 \rightarrow \Delta = -4a \rightarrow 8 - 4a^2 = -4a$ $2 - a^2 = -a \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$ <p>6)</p> $x \geq 2 \rightarrow x^2 - 2x < x - 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow (1, 2)$ $x \geq 2 \cap (1, 2) \rightarrow \emptyset$ $x < 2 \rightarrow x^2 - 2x < -x + 2 \rightarrow x^2 - 2x - 2 < 0 \rightarrow (-1, 2)$ $x < 2 \cap (-1, 2) \rightarrow (-1, 2)$ <p>7) $[x] - 6 + 5[x] = 12 \rightarrow 6[x] = 18 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4$</p>	

$$8) (2^x)^2 + 2^x = 72 \rightarrow t^2 + t - 72 = 0 \rightarrow (t-8)(t+9) = 0 \begin{cases} t = 8 \\ t = -9 \end{cases}$$

$$2^x = 8 \rightarrow x = 3$$

$$\rightarrow \log 4 + \log(2y+9) = 2 \rightarrow \log 4(2y+9) = 2 \rightarrow 4(2y+9) = 100 \rightarrow 2y+9 = 25 \rightarrow y = 8$$

$$9) (e^x)^2 + 6e^x - 16 = 0 \rightarrow t^2 + 6t - 16 = 0 \rightarrow (t-2)(t+8) = 0$$

$$t = 2, t = -8 \rightarrow e^x = 2 \rightarrow \ln e^x = \ln 2 \rightarrow x = \ln 2$$

$$\frac{\ln(6+e^2)}{x} = \frac{\ln(6+2)}{\ln 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

$$10) f(t) = 800e^{kt}$$

$$3200 = 800e^{20k} \rightarrow e^{20k} = 4$$

$$f(30) = 800e^{30k} = 800(e^{20k})^{\frac{3}{2}} = 800 \times 4^{\frac{3}{2}} = 6400$$

$$11) f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1} \rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2}$$

$$3g(1)-3 = 2g(1)+2 \rightarrow g(1) = 5$$

$$12) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_1}-1} = \frac{2^{x_2}+1}{2^{x_2}-1} \rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \frac{2^x+1}{2^x-1} \rightarrow y2^x - y = 2^x + 1 \rightarrow y2^x - 2^x = y + 1$$

$$2^x(y-1) = y+1 \rightarrow 2^x = \frac{y+1}{y-1} \rightarrow x = \log_2 \frac{y+1}{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \log_2 \frac{y+1}{y-1}$$

$$13) s_8 = \frac{5}{4}s_4 \rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$$

$$(1-q^4)(1+q^4) = \frac{5}{4}(1-q^4) \rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = \frac{1}{8}$$

$$14) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1 + \frac{\pm 1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad a_3 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$15) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{5n+1} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10n+2}{2n+1}} = e^5$$

$$16) 2\sin^2 x + 3 \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{3 \pm 5}{-4} \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$17) f'_+(1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) + f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x |\sin \pi x|}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \sin \pi x}{x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\sin \pi x + (\pi \cos \pi x)(-x)}{x-1} = \pi$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$4 = a + b$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(2)}{3\sqrt[3]{2x+6}} & x > 1 \\ a & x \leq 1 \end{cases} \rightarrow f'_{(1^+)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, f'_{(1^-)} = a \quad a = \frac{2}{3}$$

$$a + b = 4$$

$$\frac{2}{3} + b = 4 \rightarrow b = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$