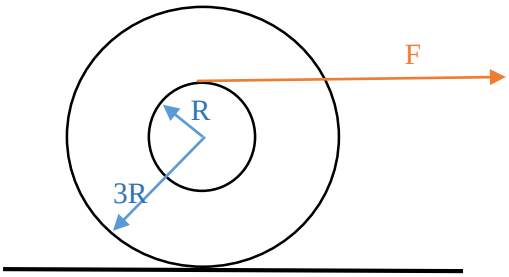
پایان ترم ۹٤ (نیمسال اول)

۱. نیروی **F** توسط طنابی‌که به دور محور داخلی چرخی به شعاع **R** پیچیده شده است، اعمال می‌گردد. چرخ به جرم **M** و شعاع **3R** و لختی دورانی $I=2MR^2$ با یک حرکت غلتشی شروع به حرکت می‌نماید.

الف) شتاب مرکز جرم را به دست آورید.

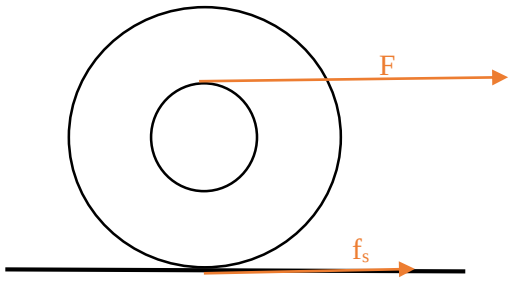
ب) اندازه و جهت نیروی اصطکاک را به دست آورید.

✓ **(حل این مساله در سوالات جلسه هفتم دارای اشتباهاتی بوده است که در این حل رفع می‌گردد)**



جواب:

الف) برای محاسبه شتاب خطی مرکز جرم این چرخ، نیروهای وارد بر محور داخلی آن را رسم کرده و قانون دوم نیوتن را برای آنها می‌نویسیم:



$$\begin{cases} F_{net} = Ma_{com} \quad \rightarrow F + f_s = Ma_{com} \quad \rightarrow \quad f_s = Ma_{com} - F \\ \begin{cases} \tau_{net} = I\alpha \\ \alpha = \dfrac{-a_{com}}{3R} \end{cases} \rightarrow -RF + 3Rf_s = 2MR^2\dfrac{-a_{com}}{3R} \quad \rightarrow -F + 3f_s = -\dfrac{2}{3}Ma_{com} \end{cases} \Longrightarrow$$

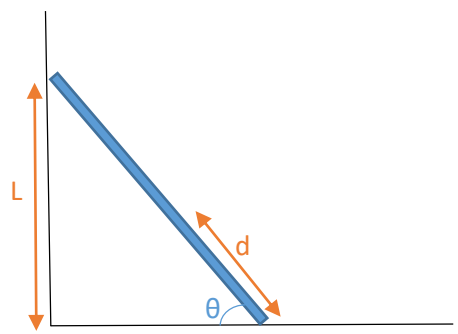
$$-F-3F+3Ma_{com}=-\frac{2}{3}Ma_{com} \quad \longrightarrow \frac{11}{3}Ma_{com}=4F \;\rightarrow\; a_{com}=\frac{12F}{11M} \quad (\frac{m}{s^2})$$

ب) اندازه نیروی اصطکاک با استفاده از a_{com} محاسبه در قسمت قبل، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_s=Ma_{com}-F=\frac{12F}{11}-F \quad \rightarrow \quad f_s=\frac{1}{11}F \;\; (N)$$

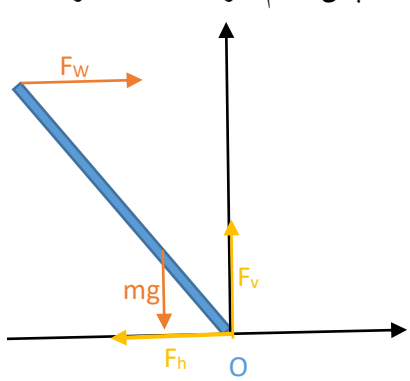
---

۲. یک نردبان به طول L را به یک دیوار بدون اصطکاک مطابق شکل تکیه داده‌ایم. مرکز جرم نردبان به فاصله d از پایین آن قرار دارد. اگر نردبان در آستانه لغزیدن باشد، ضریب اصطکاک ایستایی میان نردبان با زمین را به دست آورید.



جواب:

برای حل مساله، ابتدا نردبان را به عنوان دستگاه در نظر گرفته و سپس تمام نیروهای وارد بر آن را رسم می‌نماییم. مبدا مختصات را در نقطه O در نظر می‌گیریم.



F_w نیروی وارد بر نردبان از طرف دیوار، F_v نیروی عمودی وارد بر نردبان از طرف زمین و F_h نیروی اصطکاک بین زمین و نردبان می‌باشد. از آنجایی که نردبان در آستانه لغزش قرار دارد، بنابراین:

$$F_h = f_{s,max} = \mu_s F_v$$

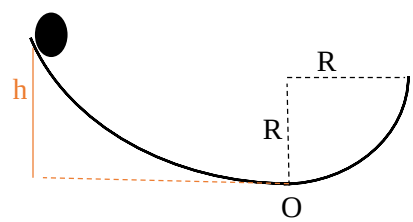
در این حالت، نردبان هنوز در حالت تعادل می‌باشد، بنابراین دو معادله موازنه زیر برقرار هستند:

$$\begin{cases} \vec{\tau}_{net} = 0 \ \rightarrow \ -F_w L sin\theta + mgdcos\theta = 0 \ \rightarrow F_w = \dfrac{mgd}{L} cotg\theta \\ \vec{F}_{net} = 0 \ \rightarrow \begin{cases} x: F_w - f_{s,max} = 0 \ \rightarrow \ F_w = f_{s,max} = \mu_s F_v \\ y: F_v - mg = 0 \ \rightarrow \ F_v = mg \end{cases} \rightarrow F_w = \mu_s mg \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mu_s mg = \frac{mgd}{L} cotg\theta \ \rightarrow \ \mu_s = \frac{d}{L} cotg\theta$$

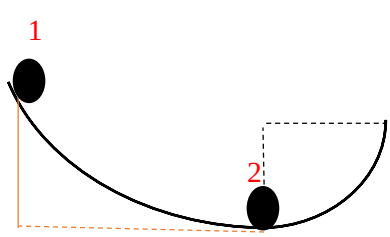
---

۳. گلوله‌ای با پخش جرم غیر یکنواخت به جرم M و شعاع r و لختی دورانی $I=\beta Mr^2$ از ارتفاع h مطابق شکل شروع به غلتش می‌نماید. زمانی که به ابتدای یک سطح دایره‌ای به شعاع R در نقطه O می‌رسد، نیروی قائم سطح برابر با 2Mg به آن وارد می‌شود. β را به دست آورید.



جواب:

برای به دست β، از قانون پایستگی انرژی برای دو حالت 1 و 2 به صورت زیر استفاده می‌نماییم:



$$\Delta E = 0 \;\rightarrow\; K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \;\rightarrow\; \begin{cases} 0 + Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{com}^2 \\ v_{com} = r\omega \\ I = \beta M r^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow\; Mgh = \frac{1}{2}\beta M r^2 (\frac{v_{com}}{r})^2 + \frac{1}{2}Mv_{com}^2 \;\rightarrow\; \beta = \frac{2gh}{v_{com}^2} - 1 \quad \text{(I)}$$

در معادله (I)، v_{com} مجهول می‌باشد. برای به دست آوردن آن، از قانون دوم نیوتن در حالت 2 استفاده می‌نماییم:

$$F_{net} = Ma_{com} \;\rightarrow N - Mg = M\frac{v_{com}^2}{R} \;\rightarrow 2Mg - Mg = M\frac{v_{com}^2}{R} \;\rightarrow\; v_{com}^2 = Rg \;\left(\frac{m}{s}\right) \quad \text{(II)}$$

با جایگذاری معادله (II) در معادله (I)، خواهیم داشت:

$$\beta = \frac{2gh}{Rg} - 1 = \frac{2h}{R} - 1$$

✓ **سوالات ٤ و ٥ این امتحان جز سوالات فصل‌های مورد نظر در امتحان پایان ترم نمی‌باشند.**