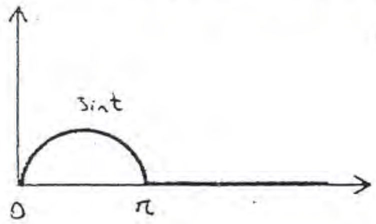
امتحان پایان ترم　　　　　دانشگاه صنعتی امیر کبیر　　　　　75/10/16

1- نیم موج نشان داده شده در شکل را بر حسب توابع پله ای واحد بیان کنید و تبدیل لاپلاس آنرا بنویسید .



سپس معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + y = f(t)$ که در آن

$f(t)$ تابع معرفی شده در قسمت اول می باشد را با شرایط

$y'(0)=1$ و $y(0)=0$ و استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید .

پاسخ :

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t<\pi\\ 0 & \pi\le t\end{cases} \Rightarrow f(t)=\sin t\left(u_0(t)-u_\pi(t)\right)\Rightarrow \ell\{f(t)\}=\ell\{\sin t\}-\ell\{u_\pi \sin t\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+s^2}-e^{-\pi s}\ell\{\sin(t+\pi)\}=\frac{1}{1+s^2}+e^{-\pi s}\ell\{\sin t\}=\frac{1}{1+s^2}+\frac{e^{-\pi s}}{1+s^2} \quad\Rightarrow\quad \ell\{y''+2y'+y\}=\ell\{f(t)\}=\frac{1}{1+s^2}+\frac{e^{-\pi s}}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2s\left(Y(s)-f(0)\right)+Y(s)=\frac{1}{1+s^2}+\frac{e^{-\pi s}}{1+s^2}\ ,\ Y(s)=\ell\{y\}\Rightarrow \left(s^2+2s+1\right)Y(s)-1=\ell\{f(t)\}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(1+s)^2(1+s^2)}+\frac{e^{-\pi s}}{(1+s)^2(1+s^2)}\ ,\ \ell\{t\}=F(s)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow F(s+1)=\frac{1}{(s+1)^2}\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}=e^{-t}t$$

$$\frac{1}{(1+s)^2(1+s^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{s+2}{(s+1)^2}-\frac{s}{1+s^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{s}{1+s^2}\right)\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(1+s^2)}\right\}=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+te^{-t}+\cos t\right)$$

$$e^{-cs}F(s)=u_c(t)f(t-c)\Rightarrow \frac{e^{-\pi s}}{(1+s)^2(1+s^2)}=\frac{1}{2}u_\pi(t)\left(e^{\pi-t}+(\pi-t)e^{\pi-t}-\cos t\right)\Rightarrow y=\ell^{-1}\{Y(s)\}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+3te^{-t}+\cos t+u_\pi(t)e^{\pi-t}+u_\pi(t)(\pi-t)e^{\pi-t}-u_\pi(t)\cos t\right)$$

که $u_\pi(t)$ تابع پله ای واحد است .

2- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید .

$$ty''+2y'+ty=0\ ,\ y(0)=1$$

پاسخ : $t=0$ یک نقطه منفرد منظم است ، پس معادله شاخصی آن $r(r-1)+a_0r+b_0=0$ است که :

$a_0=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t}=2 \quad ,b_0=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t}=0 \quad \Rightarrow r(r-1)+2r=0 \Rightarrow r_1=0 \quad ,r_2=-1 \quad \Rightarrow y_1=x^0\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ با جایگذاری y_1 در معادله

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)C_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}=0 \quad \to x^0$ ضریب $\to 2c_1=0 \Rightarrow c_1=0$, x^1 ضریب $\to 6c_2+c_0=0 \Rightarrow c_2=-\frac{c_0}{3!}$

و چون اختلاف r_2 و r_1 عدد صحیح می باشد پس $\ldots$ $C_{2n}=\frac{(-1)^nC_0}{(2n+1)!}$, $y(0)=1 \Rightarrow C_0=1 \Rightarrow y_1=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$

جواب دیگر به فرم $y_2=ky_1\ln x+x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ می باشد که با محاسبه y_2'' و y_2' و قرار دادن آن در معادله خواهیم داشت :

$k\ln x(xy_1''+2y_1'+xy_1)+2ky_1'+\frac{ky_1}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)A_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=0$ چون y_1 جواب معادله است پس ضریب $k\ln x$ صفر است

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب x^{-2} , x^{-1} , x^0 , x , ... به دست می آید : ... $k=0 \quad ,A_2=-\frac{A_0}{2} \quad ,A_3=-\frac{A_1}{3!} \quad ,A_4=\frac{A_0}{4!}$

و در نتیجه $y_2=A_0x^{-1}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)+A_1x^{-1}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$ و با توجه به اینکه ضریب A_1 همان y_1 است

می توان از آن صرف نظر کرد ، پس جواب عمومی به صورت : $y=Ay_1+By_2$ است .

3- تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید .

$$f(t)=t^2e^{3t}\int_0^t e^{-\lambda}\cos(t-\lambda)d\lambda$$

پاسخ : با توجه به تعریف کانولوشن داریم : $f(\lambda)=e^{-\lambda}$, $g(\lambda)=\cos\lambda$, $h(t)=\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$, $H(s)=\ell\{h(t)\}$

$$\Rightarrow H(s)=F(s)G(s) \ , \ F(s)=\ell\{f(t)\} \ , \ G(s)=\ell\{g(t)\} \Rightarrow \ell\left\{\int_0^t e^{-\lambda}\cos(t-\lambda)d\lambda\right\}=\left(\frac{1}{1+s}\right)\left(\frac{s}{1+s^2}\right)$$

$$\ell\{e^{3t}h(t)\}=H(s-3)\Rightarrow \ell\left\{e^{3t}\int_0^t e^{-\lambda}\cos(t-\lambda)d\lambda\right\}=\frac{s-3}{(s-2)(s^2-6s+8)}=F_1(s) \ , \ f_1(t)=e^{3t}\int_0^t e^{-\lambda}\cos(t-\lambda)d\lambda$$

$$F_1(s)=\ell\{f_1(t)\} \Rightarrow \ell\{t^2f_1(t)\}=F_1^{(2)}(s)=\frac{d^2F_1(s)}{ds^2} \Rightarrow \ell\left\{t^2e^{3t}\int_0^t e^{-\lambda}\cos(t-\lambda)d\lambda\right\}=\left(\frac{s-3}{(s-2)(s^2-6s+8)}\right)''$$

4- انتگرال های زیر را ارزیابی کنید :

الف) $\int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx$ ب) $\int_0^\infty e^{-at} \frac{\sin bt}{t} dt$

پاسخ : الف) $x = e^{-t} \Rightarrow t = -\ln x \ , \ dx = -e^{-t} dt \ , \ \begin{cases} x \to 0 & , t \to +\infty \\ x \to 1 & , t \to 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx \to -\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left(-e^{-t} dt\right)$

$\Rightarrow \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

با توجه به تعریف لاپلاس داریم : ب) $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \ell\{f(t)\} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-at} \frac{\sin bt}{t} dt = \ell\left\{\frac{\sin bt}{t}\right\} \ , \ a = s$

$f(t) = \frac{\sin bt}{t} \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin bt}{t} = b \to$ موجود است $\Rightarrow \ell\left\{\frac{\sin bt}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du \ , \ F(s) = \ell\{f(t)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$

$\Rightarrow \ell\left\{\frac{\sin bt}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{b}{u^2 + b^2}\right) du = b \tan^{-1} \frac{u}{b}\Big|_s^\infty = b\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{b}\right) \to b\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{a}{b}\right)$. و در پایان به جای s ، a را قرار می دهیم

5- تبدیل معکوس تابع $\frac{3(1+s^2)}{s^6} e^{-4s}$ را به دست آورید :

پاسخ : $\ell^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} = u_c(t) f(t-c) \ , \ F(s) = \ell\{f(t)\}$

$\Rightarrow F(s) = \frac{3(1+s^2)}{s^6} \Rightarrow \ell^{-1}\{F(s)\} = f(t) \Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{3(1+s^2)}{s^6}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{3}{s^6} + \frac{3}{s^4}\right\} = 3\ell^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6} \times \frac{1}{5!}\right\} + 3\ell^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4} \times \frac{1}{3!}\right\}$

$= \frac{3}{5!} t^5 + \frac{3}{3!} t^3 \Rightarrow \ell^{-1}\left\{e^{-4s} \frac{3(1+s^2)}{s^6}\right\} = u_4(t) f(t-4) = u_4(t)\left[\frac{1}{40}(t-4)^5 + \frac{1}{2}(t-4)^3\right]$

1- دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1' + y_2' = 2\sinh t \\ y_2' + y_3' = e^t \\ y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t} \end{cases} \quad , \quad y_1(0) = y_2(0) = 1 \quad , \quad y_3(0) = 0$$

پاسخ : $\ell\{y'\} = s\ell\{y\} - y(0)$ داریم : $\ell\{y_1\} = \mathrm{Y}_1(s)$, $\ell\{y_2\} = \mathrm{Y}_2$, $\ell\{y_3\} = \mathrm{Y}_3$,

$$\begin{cases} \ell\{y_1'\} + \ell\{y_2'\} = \ell\{2\sinh t\} \\ \ell\{y_2'\} + \ell\{y_3'\} = \ell\{e^t\} \\ \ell\{y_3'\} + \ell\{y_1'\} = \ell\{2e^t\} + \ell\{e^{-t}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\mathrm{Y}_1(s) - 1 + s\mathrm{Y}_2(s) - 1 = 2\ell\{\sinh t\} = \dfrac{2}{s^2-1} \\ s\mathrm{Y}_2 - 1 + s\mathrm{Y}_3 = \ell\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1} \\ s\mathrm{Y}_3(s) + s\mathrm{Y}_1(s) - 1 = 2\ell\{e^t\} + \ell\{e^{-t}\} = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{s+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\mathrm{Y}_1(s) + s\mathrm{Y}_2(s) = \dfrac{2s^2}{s^2-1} \\ s\mathrm{Y}_2(s) + s\mathrm{Y}_3(s) = \dfrac{s}{s-1} \\ s\mathrm{Y}_3(s) + s\mathrm{Y}_1(s) = \dfrac{s^2+3s}{s^2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Y}_1(s) + \mathrm{Y}_2(s) = \dfrac{2s}{s^2-1} \\ \mathrm{Y}_2(s) + \mathrm{Y}_3(s) = \dfrac{1}{s-1} \\ \mathrm{Y}_3(s) + \mathrm{Y}_1(s) = \dfrac{s+3}{s^2-1} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه بالا خواهیم داشت :

$$\mathrm{Y}_1(s) = \left(\frac{1}{s-1}\right) , \quad \mathrm{Y}_2(s) = \left(\frac{1}{s+1}\right) , \quad \mathrm{Y}_3(s) = \left(\frac{2}{s^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = \ell^{-1}\{\mathrm{Y}_1(s)\} = e^t \quad , \quad y_2 = \ell^{-1}\{\mathrm{Y}_2(s)\} = e^{-t} \quad , \quad y_3 = \ell^{-1}\{\mathrm{Y}_3(s)\} = e^t - e^{-t}$$

2- الف) سه جمله اول بسط تابع زیر را بر حسب توابع لژاندر بیان کنید .

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & 0 < x \le 1 \\ 3 & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

ب) با استفاده از تغییر متغیر $z = x^2$ و $y = x^{\frac{1}{2}}u$ معادله $y'' + 4x^2y = 0$ را حل کنید .

پاسخ : الف) چون $f(x)$ در شرایط قضیه دیرکله صدق می کند پس داریم : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$ که $C_n = \dfrac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$

همچنین می دانیم : $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ پس :

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(3)(1)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x+4)(1)dx=\frac{15}{4}$$

$$C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{0}(3)(x)dx+\frac{3}{2}\int_{0}^{1}(x+4)(x)dx=\frac{5}{4}\ ,\ C_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{0}(3)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx+\frac{5}{2}\int_{0}^{1}(x+4)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{15}{4}P_0(x)+\frac{5}{4}P_1(x)+\frac{5}{16}P_2(x)$$

ب)

$$z=x^2\Rightarrow\frac{dz}{dx}=2x\ ,\ y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u+x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}\ ,\ \frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\times\frac{dz}{dx}=2x\frac{du}{dz}\ \Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u+2x^{\frac{3}{2}}\frac{du}{dz}$$

$$y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u+x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}+3x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}+2x^{\frac{3}{2}}\times2x\frac{d^2u}{dz^2}\Rightarrow y''+4x^2y=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u+4x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}+4x^{\frac{5}{2}}\frac{d^2u}{dz^2}+4x^{\frac{5}{2}}u=0$$

طرفین معادله بالا را در $x^{\frac{3}{2}}$ ضرب و بر 4 تقسیم می کنیم :

$$\rightarrow 4x^4\frac{d^2u}{dz^2}+4x^2\frac{du}{dz}+\left(4x^4-\frac{1}{4}\right)u=0\ ,\ z=x^2$$

که یک معادله بسل نوع اول می باشد که جواب آن به فرم زیر می باشد .

$$\Rightarrow z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+\left(z^2-\frac{1}{16}\right)u=0$$

$$y=x^{\frac{1}{2}}\left[AJ_{\frac{1}{4}}(x^2)+BY_{\frac{1}{4}}(x^2)\right]$$

3- نشان دهید $x=0$ یک نقطه منفرد منظم معادله زیر می باشد .

$$x^2y''+x(3-x^2)y'-3y=0$$

و اگر $y_1=x\left(3+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{3}{2^7}x^4+...\right)$ باشد , جواب دوم را پیدا کنید .

پاسخ : قسمت اول – مشاهده می شود که توابع $f_1(x)=x\times\frac{x(3-x^2)}{x^2}=3-x^2$ و $f_2(x)=x^2\times\frac{-3}{x^2}=-3$ در نقطه $x=0$ تحلیلی هستند یعنی در این نقطه دارای بسط تیلور می باشند زیرا هر دو تابع $f_1=3-x^2$ و $f_2=-3$ و تمامی مشتقاتشان در همسایگی $x=0$ تعریف شده اند . پس چون این دو تابع در $x=0$ تحلیلی هستند پس $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله فوق است .

ع

بنابراین معادله شاخصی به صورت $r(r-1)+a_0r+b_0=0$ است که در آن $b_0=\lim_{x\to 0}(-3)=-3$, $a_0=\lim_{x\to 0}(3-x^2)=3$ می باشد .

در نتیجه $r_1=1$ و $r_2=-3$ می باشند و چون تفاضل آنها یک عدد صحیح است پس $y_2=ky_1\ln x+x^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ می باشد .

$$\Rightarrow y_2'=ky_1'\ln x+ky_1\frac{1}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)A_nx^{n-4}\quad,\quad y_2''=ky_1''\ln x+2ky_1'\frac{1}{x}-ky_1\frac{1}{x^2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-4)A_nx^{n-5}$$

$$\Rightarrow (x^2y_1''+x(3-x^2)y_1'-3y_1)k\ln x+2kxy_1'-kx^2y_1+2ky_1-\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)A_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-4)A_nx^{n-3}=0$$

چون y_1 ریشه معادله می باشد پس ضریب $k\ln x$ برابر صفر است .

$$\Rightarrow 2k\left(3x+\frac{3}{4}x^3+\frac{15}{2^6}x^5+\dots\right)-k\left(3x^3+\frac{1}{4}x^5+\frac{3x^7}{2^7}+\dots\right)+2k\left(3x+\frac{1}{4}x^3+\frac{3x^4}{2^7}+\dots\right)-\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)A_nx^{n-1}$$

$+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-4)A_nx^{n-3}=0$, x^{-3} ضریب $=0\Rightarrow A_0=$ پارامتر , x^{-2} ضریب $=0\Rightarrow -3A_1=0\to A_1=0$

x^{-1} ضریب $=0\Rightarrow 3A_0-4A_2=0\Rightarrow A_2=\frac{3}{4}A_0$, x^0 ضریب $=0\Rightarrow 2A_1+0A_4=0\to A_4=0$

x^1 ضریب $=0\Rightarrow 6k+6k+A_2+0A_4=0\Rightarrow k=-\frac{1}{16}$, $\Rightarrow y_2=-\frac{1}{16}y_1\ln x+x^{-3}\left(1+\frac{3}{4}x^2+\dots\right)\Rightarrow y=Ay_1+By_2$

4- الف) مقدار انتگرال زیر را محاسبه نمائید .

$$I=\int_0^{\infty}e^{-3t}t(\sin^2 t)\left[\ell^{-1}\ln\frac{s}{s-1}\right]dt$$

ب) تبدیل معکوس تابع $F(s)=e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$ را حساب کنید .

پاسخ : می دانیم $\ell\{f(t)\}=F(s)\Rightarrow -\frac{\ell^{-1}\{F'(s)\}}{t}=f(t)$ ، اکنون با فرض $F(s)=\ln\frac{s}{s-1}$ مسئله را حل می کنیم .

با قرار دادن این مقدار در انتگرال $F(s)=\ln\frac{s}{s-1}\Rightarrow F'(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\Rightarrow -\frac{1}{t}\ell^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right)=f(t)\Rightarrow \ell^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{t}(e^t-1)$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\infty}[e^{-2t}(\sin^2 t)-e^{-3t}(\sin^2 t)]dt=\int_0^{\infty}e^{-2t}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt-\int_0^{\infty}e^{-3t}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-2t}dt-\int_0^\infty e^{-3t}dt-\int_0^\infty e^{-2t}\cos 2tdt+\int_0^\infty e^{-3t}\cos 2tdt\right)\ ,\ \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\ell\{f(t)\}\ \Rightarrow \int_0^\infty e^{-3t}\cos 2t=\frac{3}{3^2+4}=\frac{3}{13}$$

$$\int_0^\infty e^{-2t}\cos 2tdt=\frac{2}{2^2+4}=\frac{1}{4}\ ,\ \int_0^\infty e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}\ ,\ \int_0^\infty e^{-3t}dt=-\frac{1}{3}\ \Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{13}\right)=-\frac{29}{312}$$

ب)

$$\ell\{u_C(t)f(t-c)\}=e^{-cs}F(s)\Rightarrow \ell^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}=u_C(t)f(t-c)\ ,\ F(s)=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$$

$$\Rightarrow \ell^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}\right\}=u_\pi(t)\sin(t-\pi)=-u_\pi(t)\sin t$$

که u_π تابع پله ای واحد است .

5- با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله روبرو را حل کنید .

$$\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}-y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=5$$

پاسخ : ابتدا از طرفین لاپلاس می گیریم :

$$\Rightarrow \ell\{y''\}+\ell\{ty'\}-\ell\{y\}=0\ ,\ \ell\{tf(t)\}=-F'(s)\ ,\ \ell\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-5-(sY(s))'-Y(s)=0\Rightarrow -sY'(s)+(s^2-2)Y(s)-5=0\Rightarrow Y'(s)+\left(\frac{2}{s}-s\right)Y(s)=-\frac{5}{s}$$

که یک معادله خطی می باشد و برای حل آن داریم :

$$\mu(s)=e^{\int\left(\frac{2}{s}-s\right)ds}=\frac{s^2}{e^{\frac{s^2}{2}}}\rightarrow Y(s)=\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\int\left(\frac{-5s}{e^{\frac{s^2}{2}}}\right)ds=\frac{5}{s^2}+c\left(\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\right)\ ,\ \lim_{s\to\infty}Y(s)=0\rightarrow c=0\Rightarrow Y(s)=\frac{5}{s^2}\Rightarrow y(t)=5t$$

6- اگر $\ell\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ باشد , با استفاده از رابطه $J_0'(t)=-J_1(t)$ و $J_0(0)=1$ نشان دهید که :

$$\int_0^t \sin(t-\lambda)J_0(\lambda)d\lambda=tJ_1(t)$$

پاسخ :

$$J_0'(t)=-J_1(t)\Rightarrow \ell\{J_0'(t)\}=-\ell\{J_1(t)\}\Rightarrow s\ell\{J_0(t)\}-J_0(0)=-\ell\{J_1(t)\}\Rightarrow \ell\{J_1(t)\}=1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\quad (A)$$

از طرفی داریم با استفاده از رابطه (A) :

$$\ell\{tf(t)\}=-F'(s)\Rightarrow \ell\{tJ_1(t)\}=-\frac{d}{ds}\left(1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)=\frac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}\quad (B)$$

اکنون از طریق کانولوشن برای محاسبه انتگرال داریم :

$$\ell\left\{\int_0^t \sin(t-\lambda)J_0(\lambda)d\lambda\right\} = \ell\{\sin t\}\times \ell\{J_0(t)\} = \frac{1}{1+s^2}\times\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (C)$$

با استفاده از روابط (B) و (C) نتیجه می گیریم :

$$\ell\left\{\int_0^t \sin(t-\lambda)J_0(\lambda)d\lambda\right\} = \ell\{tJ_1(t)\} \Rightarrow \int_0^t \sin(t-\lambda)J_0(\lambda)d\lambda = tJ_1(t)$$

امتحان پایان ترم دانشگاه صنعتی امیر کبیر 76/10/16

1- بر حسب مقادیر مختلف n ، $\int_{-1}^{1}(x^4+x)P_n(x)dx$ را ارزیابی کنید .

توجه :

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}p_{n-1}(x)$$

پاسخ : می دانیم $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$ و از رابطه معرفی شده به دست می آوریم : $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ و $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$

همچنین $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$ بنابراین : $C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^4+x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5}$

$$C_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^5+x^2)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1 \quad , \quad C_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3x^6-x^4+3x^3-x)dx = \frac{5}{4}\left(\frac{3x^7}{7}-\frac{x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{7}$$

$$C_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(5x^7-3x^5+5x^4-3x^2)dx = \frac{7}{4}\left(\frac{5x^8}{8}-\frac{x^6}{2}+x^5-x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = 0 \quad . \Rightarrow f(x) = \frac{1}{5}P_0(x)+P_1(x)+\frac{4}{7}P_2(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^{1}P_0(x)P_n(x)dx + \int_{-1}^{1}P_1(x)P_n(x)dx + \frac{4}{7}\int_{-1}^{1}P_2(x)P_n(x)dx \quad , \quad \int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m=n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}(x^4+x)P_n(x)dx = \begin{cases} m=0 \rightarrow \frac{2}{5} \\ m=1 \rightarrow \frac{2}{3} \\ m=2 \rightarrow \frac{8}{35} \\ m>2 \rightarrow 0 \end{cases}$$

2- یک جواب معادله زیر $y_1 = x$ است ، جواب مستقل دیگر آن را به کمک سری ها بیابید .

$$\left(x^2 - x\right)y'' + xy' - y = 0$$

پاسخ : از آنجا که نقطه $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است ، برای معادله شاخصی داریم : $a_0 = \lim_{x\to 0} x\dfrac{x}{x^2 - x} = 0$

و $b_0 = \lim_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{x^2 - x} = 0$ بنابراین با حل معادله شاخصی به دست می آید : $r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = 0$ و چون اختلاف ایندو یک عدد صحیح

است ، پس : $y_2 = k\ln x y_1 + x^0\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = kx\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ و $y_2' = k + k\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1}$

$y_2'' = \dfrac{k}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$ با جایگذاری این مقادیر در معادله داریم : $2kx - k + \sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2 - 1\right)C_n x^n - n(n-1)C_n x^{n-1} = 0$

x^{-1} ضریب $= 0 \to C_0$ پارامتر ، x^0 ضریب $= 0 \to -k - C_0 = 0 \Rightarrow k = -C_0$ ، x^1 ضریب $= 0 \to 2k + 0C_1 - 2C_2 = 0 \Rightarrow k = C_2$

x^2 ضریب $= 0 \to 3C_2 - 6C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = \dfrac{1}{2}C_2$ ، x^3 ضریب $= 0 \to 8C_3 - 8C_4 = 0 \Rightarrow C_3 = C_4$

با فرض $C = 1$ جواب عمومی معادله به فرم زیر می باشد . $\Rightarrow y_2 = C\left(x\ln x - 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + \dots\right)$

$$y = Ay_1 + By_2$$

3- با استفاده از تغییر متغیر $z = 3x^2$ و $y = ux$ معادله زیر را حل کنید .

$$x^2y'' - xy' + \left(36x^4 - 15\right)y = 0$$

پاسخ : با جایگذاری مقادیر روبرو در معادله فوق $y = ux \Rightarrow y' = u + xu' \quad , \quad y'' = 2u' + xu''$ و حذف x داریم :

$x^2u'' + xu' + 4\left(9x^4 - 4\right)u = 0 \quad (A)$ ، اما $z = 3x^2 \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 6x \quad , \quad u' = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dz}\times\dfrac{dz}{dx} = 6x\dfrac{dz}{dx}$

و $u'' = u\dfrac{du}{dz} + (4)(9)x^2\dfrac{d^2u}{dz^2}$ ، با جایگذاری این مقادیر در (A) خواهیم داشت : $z^2\dfrac{d^2u}{dz^2} + z\dfrac{du}{dz} + \left(z^2 - 4\right)u = 0$

و در پایان : $u = AJ_2(z) + BY_2(z) \to y = x\left[AJ_2\left(3x^2\right) + BY_2\left(3x^2\right)\right]$

4- عبارات زیر را محاسبه کنید .

الف) $\ell\left\{tcht\int_0^t \frac{e^{3r}-e^{r}}{\tau}dr\right\}$ ب) $\ell^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{\frac{-2\pi}{\sqrt{3}}s}}{s^2+s+1}\right\}$

پاسخ : قسمت الف از مباحث حذف شده است . ب)

$$f(t)=\ell^{-1}\left\{\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}\ ,\ \ell^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{\frac{-2\pi}{\sqrt{3}}s}}{s^2+s+1}\right\}=u_{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}(t)f\left(t-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

می دانیم : $\ell^{-1}\{F(s+a)\}=e^{-at}f(t)$ پس با فرض $F(S)=\frac{S}{S^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{S^2+\frac{3}{4}}$ داریم : $\ell^{-1}\{F(S)\}=\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$\Rightarrow f(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{\frac{-2\pi}{\sqrt{3}}s}}{s^2+s+1}\right\}=-u_{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}(t)e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

5- معادله زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید .

$$ty''-(2+t)y'+3y=t-1\ \ ,y(0)=0$$

پاسخ : $\ell\{ty''\}=-\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)'=-\left(s^2Y'(s)+2sY(s)\right)\ ,\ \ell\{ty'\}=-\left(sY'(s)+Y(s)\right)$

اکنون از طرفین معادله لاپلاس می گیریم .

$$\Rightarrow -\left(s^2Y'(s)+2sY(s)\right)+\left(sY'(s)+Y(s)\right)-2sY(s)+3Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}$$

که یک معادله خطی می باشد .

$$\Rightarrow \left(-s^2+s\right)Y'(s)+(4-4s)Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\Rightarrow Y'(s)+\frac{4}{s}Y(s)=-\frac{1}{s^3}$$

$$\mu(s)=e^{\int\frac{4}{s}ds}=s^4\Rightarrow Y(s)=s^{-4}\int-\frac{s^4}{s^3}ds=s^{-4}\left(-\frac{s^2}{2}+c\right)=-\frac{1}{2s^2}\to y(t)=\ell^{-1}\left\{-\frac{1}{2s^2}\right\}=-\frac{1}{2}t$$

6- دستگاه زیر را با هر روشی که می خواهید حل کنید .

$$\begin{cases} y_1''(t)+y_2''(t)-2y_2'(t)=66 \\ y_1''(t)+3y_2(t)=9t^2-2 \end{cases} \quad , y_1(0)=y_2(0)=y_1'(0)=1 \ , \ y_2'(0)=-2$$

پاسخ : از طرفین معادله لاپلاس می گیریم .

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2Y_1(s)+\left(s^2-2s\right)Y_2(s)=\dfrac{66}{s}-2 \\ s^2Y_1(s)+3Y_2(s)=\dfrac{18}{s^3}-\dfrac{2}{s} \end{cases} \Rightarrow \left(s^2-2s-3\right)Y_2(s)=\frac{68}{s}-2-\frac{18}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y_2(s)=\frac{-18s^2-4s+6}{s^3}+\frac{13}{s+1}+\frac{5}{s-3}=-\frac{18}{s}-\frac{4}{s^2}+\frac{6}{s^3}+\frac{13}{s+1}+\frac{5}{s-3} \ , \ y_2(t)=\ell^{-1}\{Y_2(s)\}$$

$$\Rightarrow y_2(t)=-18-4t+3t^2+13e^{-t}+5e^{3t}$$

با جایگذاری مقدار روبرو در دستگاه , عبارت زیر به دست می آید :

$$Y_1(s)=\frac{52}{s^3}+\frac{12}{s^4}-\frac{39}{s^2(s+1)}-\frac{15}{s^2(s-3)}=\frac{52}{s^3}+\frac{12}{s^4}+39\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s+1}\right)+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}-\frac{1}{s-3}\right) \ , \ \ell^{-1}\{Y_1(s)\}=y_1(t)$$

$$\Rightarrow y_1(t)=26t^2+2t^3+39\left(1-t-e^{-t}\right)+\frac{5}{3}\left(1+3t-e^{3t}\right)$$

امتحان پایان ترم — دانشگاه صنعتی امیر کبیر — 77/3/1

1- نشان دهید که نقطه $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله دیفرانسیل زیر می باشد و سپس معادله زیر را حل کنید .

$$x^2y''-x^2y'+\left(x^2-2\right)y=0$$

پاسخ : این سوال عیناً در کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار , در صفحه 351 , مجموعه مسائل 4 . 4 , سوال 14 موجود می باشد .

2- با استفاده از رابطه بازگشتی روبرو $P'_{n+1}(x)=xP'_n(x)+(n+1)P_n(x) \quad n\geq 0 \ , \ P_n(1)=1$

و با فرض $f(x)=2x^4+x-1$ ، انتگرال روبرو را ارزیابی کنید .

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

پاسخ : می دانیم $P_0(x)=1$ و از رابطه بازگشتی به دست می آید :

$$P_1(x)=x \quad , \quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2} \quad , \quad P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

و همین طور $C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(x)f(x)dx$ بنابراین داریم :

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2x^4+x-1)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}x^5+\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{3}{5}$$

$$C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(2x^5+x^2-x)dx=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{6}x^6+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}=1$$

$$C_2=\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(3x^2-1)(2x^4+x-1)dx=\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(6x^6-2x^4+3x^3-3x^2-x+1)dx=\frac{5}{4}\left(\frac{6}{7}x^7-\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-x^3-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{7}$$

$$C_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)(2x^4+x-1)dx=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(5x^7+\frac{5}{2}x^4-\frac{5}{2}x^3-3x^5-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right)dx=\ldots=0$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{5}P_0(x)+P_1(x)+\frac{8}{7}P_2(x)\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{3}{5}P_0(x)P_n(x)+P_1(x)P_n(x)+\frac{8}{7}P_2(x)P_n(x)\right)dx$$

$$\Rightarrow I=-\frac{3}{5}\int_{-1}^{1}P_0(x)P_n(x)dx+\int_{-1}^{1}P_1(x)P_n(x)dx+\frac{8}{7}\int_{-1}^{1}P_2(x)P_n(x)dx\Rightarrow I=\begin{cases}\frac{3}{5}\times 2=\frac{6}{5} & , n=0\\ \frac{2}{3} & , n=1\\ \frac{8}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{16}{35} & , n=2\\ 0 & , n>2\end{cases}$$

3- مطلوب است محاسبه

الف) $\int x^4J_1(x)dx$ ب) $\ell\{[t]\}$

پاسخ : الف) با استفاده از جز به جز داریم :

$$u=x^2\Rightarrow du=2xdx \quad , \quad dv=x^2J_1(x)\Rightarrow v=x^2J_2(x)$$

$$\Rightarrow \int x^4J_1(x)dx=x^4J_2(x)-\int 2x^3J_2(x)dx=x^4J_2(x)-2x^3J_3(x)+c$$

ب) $[t]=n \quad , \quad n<t<n+1 \quad \Rightarrow \quad [t]=t+n-t \quad , \quad n<t<n+1 \quad , \quad f(t)=t+n$

$\Leftarrow \ell\{[t]\}=\ell\{f(t)\}-\ell\{t\}$ ، $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 1 می باشد و در نتیجه :

$$\ell\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 te^{-st}dt=\frac{1+s}{s^2}-\frac{1}{s(1-e^{-s})}\Rightarrow \ell\{[t]\}=\frac{1}{s^2}-\frac{1+s}{s^2}+\frac{1}{s(1-e^{-s})}=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{e^s-1}\right)$$

4- با استفاده از بتدیل لاپلاس , لاپلاس تابع $J_0(x)$ را به دست آورید . $(J_0(x)=1)$

پاسخ : از مباحث امتحانی حذف شده است , اما برای حل آن باید از رابطه $J_\nu(x)=\sum\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$ ، $J_0(x)$ را پیدا کرده و سپس با استفاده از بسط نیوتن لاپلاس آن را نوشته و در پایان به دست می آید : $\ell\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$

5- الف) تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید .

$$f(t)=e^{-2t}\sin^2 t+u_2(t)\cosh 2t$$

ب) معادله زیر را حل کنید .

$$y(t)=\sin t+\int_0^t \lambda \quad y(t-\lambda)\ell^{-1}\{\cot^{-1}s\}d\lambda$$

پاسخ : $\ell\{e^{bt}f(t)\}=F(s-b)\Rightarrow \ell\{e^{-2t}\sin^2 t\}=F(s+2)$, $F(s)=\ell\{\sin^2 t\}=\ell\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\}=\ell\left\{\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\ell\{\cos 2t\}$

$$\Rightarrow \ell\{\sin^2 t\}=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} \;,\; \ell\{e^{-2t}\sin^2 t\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+2}+\frac{s+2}{(s+2)^2+4}\right]$$

$$\ell\{u_c(t)f(t)\}=e^{-cs}\ell\{f(t+c)\} \;,\; f(t)=\cosh 2t\Rightarrow \ell\{\cosh 2(2+2)\}=\ell\{\cosh 2t\cosh 4+\sinh 2t\sinh 4\}$$

$$\Rightarrow \{u_2(t)\cosh 2t\}=e^{-2s}\left[\frac{e^8+1}{2e^4}\left(\frac{s}{s^2-4}\right)+\frac{e^8-1}{2e^4}\left(\frac{2}{s^2-4}\right)\right]$$

و در پایان داریم :

$$\ell\{f(t)\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+2}+\frac{s+2}{(s+2)^2+4}\right]+\frac{e^{-2s}}{s^2-4}\left[\frac{e^8+1}{2e^4}s+\frac{e^8-1}{e^4}\right]$$

ب) $\ell^{-1}\{F'(s)\} = -\lambda \ f(\lambda)$, $F(s) = f(\lambda) \ \Rightarrow F(s) = \cot^{-1} s \rightarrow F'(s) = \dfrac{-1}{1+s^2} \Rightarrow \ell^{-1}\left\{\dfrac{-1}{1+s^2}\right\} = -\sin\lambda$

$$\Rightarrow \ell^{-1}\{\cot^{-1} s\} = \frac{\sin\lambda}{\lambda} \ \Rightarrow y(t) = \sin t + \int_0^t \lambda \ \ y(t-\lambda)\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda = \sin t + \int_0^t \sin\lambda \ \ y(t-\lambda)d\lambda$$

از طرفین لاپلاس می گیریم : $\Rightarrow \ell\{y(t)\} = \dfrac{1}{1+s^2} + \left(\dfrac{1}{1+s^2}\right)\ell\{y(t)\} \Rightarrow y(t) = \ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{(1+s^2)\left(1-\dfrac{1}{1+s^2}\right)}\right\} = \ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = t$

6- دستگاه معادله زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} x''(t) + y''(t) - 2y'(t) = 6 \\ x''(t) + 3y(t) = 9t^2 - 2 \end{cases} \quad , \quad x(0) = x'(0) = y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2$$

پاسخ : به جواب مسئله 6 امتحان قبل رجوع کنید .

امتحان پایان ترم **دانشگاه صنعتی امیر کبیر** 77/11/10

1- الف) آیا تابع زیر را می توان به صورت چند جمله ای لژاندر بسط داد . (توضیح دهید)

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

ب) با استفاده از فرمول بازگشتی داده شده زیر چهار جمله اول بسط تابع بالا را بر حسب چند جمله ای های لژاندر بیان کنید .

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

پاسخ : الف) چون هر دو ضابطه $f(x)$ چند جمله ای بوده و در شرایط قضیه دیرکله صدق می کنند , پس می توان $f(x)$ را به صورت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$ نوشت .

ب)
$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_0(x)dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(1+x)(1)dx+\int_{0}^{1}(1)(1)dx\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{3}{4}$$

$$C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\frac{3}{2}\int_{0}^{1}x(1)dx=\frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=1$$

$$C_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)f(x)dx=\frac{5}{2}\int_{-1}^{0}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)(x+1)dx+\frac{5}{2}\int_{0}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)(1)dx=\frac{5}{2}\int_{-1}^{0}\left(\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)dx+\frac{5}{2}\int_{0}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{8}x^4+\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\frac{5}{2}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=-\frac{5}{16}$$

$$C_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)f(x)dx=\frac{7}{2}\int_{-1}^{0}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)(x+1)dx+\frac{7}{2}\int_{0}^{1}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)dx=\frac{7}{2}\left(\frac{x^5}{2}+\frac{5}{8}x^4-\frac{x^3}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$+\frac{7}{2}\left(\frac{5}{8}x^4-\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_{0}^{1}\Rightarrow C_3=0\rightarrow f(x)=\frac{3}{4}P_0(x)+P_1(x)-\frac{5}{16}P_2(x)$$

2- با استفاده از روش سری ها معادله زیر را حل کنید .

$$x^2y''-x(x+1)y'+y=0$$

پاسخ : رجوع کنید به کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار ، صفحه 351 ، مجموعه مسائل 4 . 4 ، سوال 10

3- با استفاده از تغییر متغیر $z=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}$ **و** $y=ux^{\frac{1}{2}}$ **معادله روبرو را حل کنید .** $y''+16xy=0$

پاسخ :
$$z=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=4x^{\frac{1}{2}}\quad,\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u+x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}\quad,\quad\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\times\frac{dz}{dx}=4x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}$$

با جایگذاری مقادیر روبرو در معادله داریم :
$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u+4x\frac{du}{dz}\quad,\quad y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u+2\frac{du}{dz}+4\frac{du}{dz}+4x\times4x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$16x^{\frac{3}{2}}\frac{d^2u}{dz^2}+6\frac{du}{dz}+\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}+16x^{\frac{3}{2}}\right)u=0\quad\times\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\rightarrow\frac{64}{9}x^3\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\frac{du}{dz}+\left(\frac{64}{9}x^3-\frac{1}{9}\right)u=0$$

$$\Rightarrow z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+\left(z^2-\frac{1}{9}\right)u=0\Rightarrow u=AJ_{\frac{1}{3}}(z)+BY_{\frac{1}{3}}(z)\Rightarrow y=x^{\frac{1}{2}}\left[AJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+BY_{\frac{1}{3}}\left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

4- مطلوب است محاسبه

$$(A)\ \int_0^\infty e^{-2t}\frac{\sin t\cosh t}{t}dt$$

$$(B)\ \ell\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)d\theta\right\}$$

پاسخ : $\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\Rightarrow A=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{2}\frac{\sin t}{t}dt+\int_0^\infty\frac{e^{-2t}}{2}\frac{\sin t}{t}dt$ ، می دانیم $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=F(s)$ بنابراین با فرض

$f(t)=\frac{\sin t}{t}$ و از آنجاکه $\lim_{t\to 0}f(t)=1$ موجود می باشد بنابراین $\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty F(u)du=\int_s^\infty\frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$

$$\Rightarrow\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}\quad,\quad\int_0^\infty e^{-3t}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}3\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}-\tan^{-1}(3)\right)$$

$$\ell\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4}\Rightarrow\ell\{\cos(t\cos\theta)\}=\frac{s}{s^2+\cos^2\theta}\Rightarrow(B)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{s}{s^2+\cos^2\theta}d\theta=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\tan^{-1}\frac{s\tan\theta}{\sqrt{1+s^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\quad(B)$$

چون تابع به دست آمده زوج است پس به جای $\int_0^\pi$ مقدار $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ محاسبه شده است .

$$\Rightarrow\ell\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(t\cos\theta)d\theta\right\}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)\tan^{-1}\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

5- مطلوب است محاسبه

$$(A)\ \ell^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)^2}\right]$$

$$(B)\ \ell^{-1}\left[e^{-2s}\ln\frac{s}{s-1}\right]$$

پاسخ : $(A)\Rightarrow\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)^2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{9}s}{s^2+1}+\frac{-\frac{1}{9}s^3-\frac{7}{9}s}{(s^2+4)^2}\right\}=\frac{1}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-\frac{1}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{s^3+4s}{(s^2+4)^2}\right\}-\frac{1}{3}\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$

$$F_1(s)=\frac{s}{(s^2+4)^2}\quad,\quad f(t)=t\ell^{-1}\left\{\int_s^\infty\frac{u}{(u^2+4)^2}du\right\}=\frac{t}{2}\ell^{-1}\left\{\left[\frac{-1}{u^2+4}\right]_s^\infty\right\}=\frac{t}{2}\ell^{-1}\frac{1}{s^2+4}=\frac{t}{4}\sin 2t$$

$$\Rightarrow (A)=\frac{1}{9}\cos t-\frac{1}{9}\cos 2t-\frac{t}{12}\sin 2t$$

$$(B): \ell^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}=u_c(t)f(t-c)\ ,\ F(s)=\ln\frac{s}{s-1}=\ln s-\ln s-1\ ,\ \ell^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t)$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right\}=1-e^t\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\ln\frac{s}{s-1}\right\}=-\frac{1}{t}(1-e^t)\Rightarrow \ell^{-1}\left\{e^{-2s}\ln\frac{s}{s-1}\right\}=-u_2(t)\frac{1}{t-2}\left(1-e^{t-2}\right)$$

6- الف) به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید .

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+(3t-1)\frac{dy}{dt}+(4t-9)y=0\ ,\ y(0)=0$$

ب) معادله زیر را حل کنید .

$$\int_0^t y(\lambda)y(t-\lambda)d\lambda=16\sin 4t$$

توجه : $\ell\{J_0(at)\}=\frac{1}{\sqrt{a^2+s^2}}$

پاسخ : $\ell\{ty''\}=-F_1'(s)\ ,\ F_1(s)=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-y'(0)\Rightarrow \ell\{ty''\}=-(2sY(s)+s^2Y'(s))$

$$\ell\{ty'\}=-F_2'(s)\ ,\ F_2(s)=sY(s)-y(0)=sY(s)\Rightarrow \ell\{ty'\}=-(sY'(s)+Y(s))\ ,\ \ell\{ty\}=-Y'(s)$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله داریم : $-(s^2Y'(s)+2sY(s))-3(sY'(s)+Y(s))-sY(s)+4Y'(s)-9Y(s)=0$

$$\Rightarrow (s^2+3s-4)Y'(s)+(3s+12)Y(s)=0\Rightarrow \frac{dY(s)}{ds}=\frac{3}{1-s}Y(s)\Rightarrow \frac{dY(s)}{Y(s)}=\frac{3}{1-s}ds\Rightarrow \ln Y(s)=-3\ln(1-s)$$

$\Leftarrow Y(s)=(1-s)^{-3}$ ، با فرض $F''(s)=\frac{1}{(1-s)^3}$ داریم : $F'(s)=-\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}\ ,\ F(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)}$

اما داریم : $\ell^{-1}\{F''(s)\}=t^2f(t)\ ,\ y(t)=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(1-s)^3}\right\}=\frac{t^2}{2}e^t\ \Leftarrow\ f(t)=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)}\right\}=\frac{1}{2}e^t$

1– به کمک سری توانی معادله زیر را حل کنید .

$$y'' + x^2 y' + 2xy = 0 \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

پاسخ : با جایگذاری در معادله $y''(0)$ را به دست می آوریم : $y''(0) + 0 + 0 = 0 \Rightarrow y''(0) = 0$ و با مشتق گرفتن از معادله داریم :

$$y''' + 2xy' + x^2 y'' + 2y + 2xy' = 0 \Rightarrow y'''(0) = -2 \ , \ y^{(4)} + 2y' + 2xy'' + x^2 y''' + 2xy'' + 2y' + 2xy'' + 2y' = 0$$

$$\Rightarrow y^{(4)} + x^2 y''' + 6xy'' + 6y' = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 0 \ , \ y^{(5)} + x^2 y^{(4)} + 8xy''' + 12y'' = 0 \Rightarrow y^{(5)}(0) = 0$$

$$y^{(6)} + x^2 y^{(5)} + 10xy^{(4)} + 20y''' = 0 \Rightarrow y^{(6)}(0) = 40 \ , \Rightarrow y = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18} + - \ldots$$

2– نقاط عادی (معمولی) و غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل زیر را بیابید . سپس جواب متناظر با ریشه کوچکتر معادله شاخصی را بیابید .

$$2x^2(1-x)y'' - x(1+7x)y' + y = 0$$

پاسخ : یادآوری – نقطه $x = a$ را یک نقط　ولی معادله $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ نامیم هرگاه $f_1(a) \neq 0$ باشد .

در غیر این صورت این نقطه را منفرد گوئیم . پس نقاط معمولی معادله مجموعه روبرو می باشند . $\Rightarrow 2x^2(1-x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0,1$

از طرف دیگر $x = 0$ نقطه منفرد منظم معادله فوق نیز می باشد . در معادله شاخصی داریم : $a_0 = \lim\limits_{x \to 0} x \times \dfrac{-x(1+7x)}{2x^2(1-x)} = -\dfrac{1}{2}$

$$b_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \times \frac{1}{2x^2(1-x)} = \frac{1}{2} \ , \quad \Rightarrow r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \ , \ r_2 = \frac{1}{2}$$

با جایگذاری مقادیر روبرو در معادله داریم : $\Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n \ , \ y' = x^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) C_n x^{n-1} \ , \ y'' = x^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) C_n x^{n-2}$

$$x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1)C_n x^n - (n+3)(2n+1)C_n x^{n+1} = 0$$

x^0 ضریب $=0 \Rightarrow C_0$ پارامتر , x^1 ضریب $=0 \Rightarrow -(3)(1)C_0+(1)(1)C_1=0 \Rightarrow C_1=3C_0$

x^2 ضریب $=0 \Rightarrow -(4)(3)C_1+(2)(3)C_2=0 \Rightarrow C_2=2C_1=6C_0$, x^3 ضریب $=0 \Rightarrow -(5)(5)C_2+(3)(5)C_3=0 \Rightarrow C_3=10C_0$

$$\Rightarrow y=C_0x^{\frac{1}{2}}\left(1+3x+6x^2+10x^3+\ldots\right)$$

3- الف) اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x)$ و $-1<x<1$ ، که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله ای لژاندر است ، نشان دهید :

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(x)f(x)dx$$

ب) چهار جمله اول بسط تابع زیر را بر حسب چند جمله ایهای لژاندر بنویسید .

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<1\\ -x & -1<x<0\end{cases}$$

پاسخ : الف) به عهده دانشجو

ب) می دانیم : $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$, $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$

از آنجا که $f(x)$ در بازه $0<x<1$ صفر است ، فقط به بررسی مقدار انتگرال در بازه $(-1,0)$ می پردازیم :

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}-x\,dx=\left(-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{4} \quad , \quad C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{0}(-x)(x)dx=\left(-\frac{x^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$$

$$C_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{0}\left(-\frac{3}{2}x^3+\frac{x}{2}\right)dx=-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{8}x^4-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{5}{16} \quad , \quad C_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{0}\left(-\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2\right)dx=\frac{7}{2}\left(-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}P_0(x)+\frac{1}{2}P_1(x)+\frac{5}{16}P_2(x)$$

4- الف) مطلوبت محاسبه $\ell\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\}$. **ب) نشان دهید که** $\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{\sin^2 t}{t}dt=\frac{1}{4}\ln 5$.

ج) مطلوب است محاسبه $\ell^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$.

پاسخ : **الف)** $\lim_{t \to 0} \frac{\sin^2 t}{t} = 0$ موجود است . $f(t) = \sin^2 t \Rightarrow$ پس $F(s) = \ell\{f(t)\}$, $\ell\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$

$$\ell\{\sin^2 t\} = \ell\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \ell\left\{\frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}\ell\{\cos 2t\} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} \Rightarrow \ell\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+4}\right)du = -\frac{1}{2}\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

ب) با توجه به قسمت الف داریم :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s) \Rightarrow \int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin^2 t}{t}dt = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\ln 5$$

ج) $F_1(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} \times \frac{s}{s^2+1}$,

$$\ell^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) \Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{((s+1)^2+1)^2}e^{-\pi s}\right\} = e^{-t}\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}e^{-\pi(s-1)}\right\}$$

$$\ell\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t, \ell\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t \Rightarrow F_1(s) = \int_0^t \cos\lambda \sin(t-\lambda)d\lambda = \frac{t}{2}\sin t \Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\} = e^{-t}\left[\frac{t\sin t}{2}\right]$$

از طرفی

$$\ell^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t)f(t-c) \Rightarrow \ell^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{1+s}{(s^2+2s+2)^2}\right\} = e^{\pi - t}u_\pi(t)\left(\frac{\pi - t}{2}\sin t\right)$$

5- **الف) اگر $\ell\{f(t)\} = F(s)$ باشد , نشان دهید** $\ell\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(as)$.

ب) اگر $g(t) = \int_t^{2t} e^u f(u)du$ باشد , تبدیل لاپلاس تابع g را بر حسب تبدیل لاپلاس تابع f بیان کنید .

پاسخ : الف) رجوع کنید به صفحه 407 کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار .

ب) از طرفین مشتق می گیریم :

$$g'(t) = 2e^{2t}f(2t) - e^t f(t) \Rightarrow \ell\{g'(t)\} = 2\ell\{e^{2t}f(2t)\} - \ell\{e^t f(t)\}$$

$$\Rightarrow s\ell\{g(t)\} - g(0) = F\left(\frac{s-2}{2}\right) - F(s-1) \Rightarrow \ell\{g(t)\} = \frac{1}{s}\left[F\left(\frac{s}{2}-1\right) - F(s-1)\right]$$

6- **به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید .**

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (1-2t)\frac{dy}{dt} - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 2$$

ب) معادله انتگرالی روبرو را حل کنید . $\int_0^t \frac{y(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}d\lambda = 1 + t + t^2$

پاسخ : با استفاده از روابط به دست آمده از قبل داریم : $-\left(2sY(s)+s^2Y'(s)-1\right)+2\left(sY'(s)+Y(s)\right)+sY(s)-1-2Y(s)=0$

$$\Rightarrow \left(-s^2+2s\right)Y'(s)-sY(s)=0 \Rightarrow Y'(s)=\frac{Y(s)}{2-s} \Rightarrow \ln Y(s)=-\ln(2-s) \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{2-s} \Rightarrow y(t)=-e^{2t}$$

ب) از طرفین انتگرال لاپلاس می گیریم . $f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \to f(t)=t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \ell\{f(t)\}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

$$\Rightarrow Y(s)\sqrt{\frac{\pi}{s}}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3} \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\pi}{s}}+\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}+\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}\right) \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right\}=t^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right\}=\int_0^t (1)(t-\lambda)^{-\frac{1}{2}}d\lambda$$

$$=-2(t-\lambda)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^t=2t^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right\}=\int_0^t \lambda(t-\lambda)^{-\frac{1}{2}}d\lambda=-2\lambda(t-\lambda)^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}(t-\lambda)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^t=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y(t)=\frac{1}{\pi}\left(t^{-\frac{1}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$$

امتحان پایان ترم **دانشگاه صنعتی امیر کبیر** 78/10/21

1- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید .

$$x^2y''-x(1+x)y'+y=0$$

پاسخ : رجوع کنید به کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار , صفحه 351 , مسئله 10

2- با استفاده از تغییر متغیر داده شده معادله زیر را حل کنید .

$$y''+xy=0 \qquad y=u\sqrt{x} \quad , \quad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$$

پاسخ : $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u+x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\times\frac{dz}{dx}=x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz} \quad \Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u+x\frac{du}{dz}$

معادله روبرو را در $\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}$ ضرب میکنیم $y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u+\frac{3}{2}\frac{du}{dz}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\frac{d^2u}{dz^2} \Rightarrow y''+xy=\frac{3}{2}\frac{du}{dz}+x^{\frac{3}{2}}\frac{d^2u}{dz^2}+\left(x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)u=0$

به دست می آید : $\frac{4}{9}x^3\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\frac{du}{dz}+\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{1}{9}\right)u=0 \Rightarrow z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+\left(z^2-\frac{1}{9}\right)u=0$

$$\Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}}\left[AJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + BY_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

3- الف) به کمک سری توانی معادله روبرو را حل کنید . $\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \frac{3}{4}y = 0$

ب) چهار جمله اول بسط تابع زیر را بر حسب توابع لژاندر بیان کنید .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ 2x+1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

پاسخ : الف) از آنجائیکه $x = 0$ نقطه معمولی معادله می باشد , پس یک جواب معادله به صورت $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n$ می باشد , اکنون مشتق اول و دوم y را گرفته و در معادله قرار می دهیم .

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)C_nx^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n = 0$$

ضریب $x^1 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{5}{8}C_1$, ضریب $x^0 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{8}C_0$ و رابطه $C_{n+2} = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(n+2)(n+1)}C_n$ به دست می آید .

$$\Rightarrow C_4 = -\frac{21}{2^7}C_0 \quad , \quad C_5 = \frac{15}{2^7}C_1 \quad \Rightarrow y = C_0\left(1 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{21}{2^7}x^4\right) + C_1\left(x + \frac{5}{8}x^3 + \frac{15}{2^7}x^5\right)$$

ب) با استفاده از روابط روبرو به حل سئوال می پردازیم : $P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_0^1(1)(2x+1)dx = \frac{1}{2}\left(x^2+x\right)\Big|_0^1 = 1 \quad , \quad C_1 = \frac{3}{2}\int_0^1\left(2x^2+x\right)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{4}$$

$$C_2 = \frac{5}{2}\int_0^1\left(3x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{15}{8} \quad , \quad C_3 = \frac{7}{2}\int_0^1\left(5x^4 + \frac{5}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}x\right)dx$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{7}{2}\left(x^5 + \frac{5}{8}x^4 - x^3 - \frac{3}{4}x^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{7}{16} \quad \Rightarrow f(x) = P_0(x) + \frac{7}{4}P_1(x) - \frac{15}{8}P_2(x) - \frac{7}{16}P_3(x)$$

4- تبدیل لاپلاس وارون های زیر را حساب کنید .

الف) $\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-s}\left(1-e^{-s}\right)}{s\left(s^2+1\right)}\right\}$ **ب)** $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)\right\}$

پاسخ : الف) $f(t)=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}}\right\}=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$, $\ell^{-1}\{F(s-b)\}=e^{bt}f(t)\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^{\frac{5}{2}}}\right\}=e^{-4t}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$

$$\ell^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\}=u_c(t)f(t-c)\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{\frac{5}{2}}}\right\}=e^4u_3(t)\frac{e^{4(3-t)}(t-3)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

ب) $\ell\left\{\int_0^t f(r)dr\right\}=\frac{1}{s}F_1(s)\Rightarrow \ell\left\{\frac{e^{-2\lambda}-e^{-4\lambda}}{\lambda}\right\}=F_2(s+2)-F_2(s+4)$, $F_2(s)=\ell\left\{\frac{1}{t}\right\}$

$$\Rightarrow \ell\left\{\int_0^t\frac{e^{-2\lambda}-e^{-4\lambda}}{\lambda}d\lambda\right\}=\frac{1}{s+2}F_2(s+2)-\frac{1}{s+4}F_2(s+4)\ ,\ \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=F(s)$$

$$\int_0^\infty e^{-2t}\left(\int_0^t\frac{e^{-2\lambda}-e^{-4\lambda}}{\lambda}d\lambda\right)dt=\frac{1}{4}F_2(4)-\tfrac{1}{6}F_2(6)$$

5- **به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید .**

$$\frac{d^2y}{dt^2}-t\frac{dy}{dt}+y=1\qquad y(0)=1\ ,\ y'(0)=2$$

پاسخ : با قرار دادن مقادیر روبرو در معادله : $\ell\{y''\}=\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)=\left(s^2Y(s)-s-2\right)$, $\ell\{ty'\}=-\left(sY'(s)+Y(s)\right)$

$\Rightarrow s^2Y(s)-s-2+sY'(s)+Y(s)+Y(s)=\frac{1}{s}\Rightarrow Y'(s)+\left(s+\frac{2}{s}\right)Y(s)=1+\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\rightarrow$ معادله خطی

$$\mu(s)=e^{\int\left(s+\frac{2}{s}\right)ds}=s^2e^{\frac{s^2}{2}}\Rightarrow Y(s)=s^{-2}e^{-\frac{s^2}{2}}\int\left(s^2e^{\frac{s^2}{2}}+e^{\frac{s^2}{2}}+2se^{\frac{s^2}{2}}\right)ds\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}\Rightarrow y(t)=1+2t$$

6- **دستگاه روبرو را حل کنید .** $\begin{cases}y_1''-y_2'=\cos t\\ y_1'+y_2''=-\sin t\end{cases}$ $y_1(0)=y_2'(0)=1$, $y_1'(0)=y_2(0)=0$

پس $Y_2(s)=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Rightarrow y_2(t)=\ell^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right\}=t\cos t$ و با قرار دادن در معادله به دست می آید : $y_1(t)=t\sin t$

$\int f\,ds = f(s)$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{3}{5}P_1(x)-\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{2}{5}P_3(x)\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}[P_0(x)]^2dx+\frac{3}{5}\int_{-1}^{1}[P_1(x)]^2dx-\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}[P_2(x)]^2dx$$

$$+\frac{2}{5}\int_{-1}^{1}[P_3(x)]^2dx=\frac{1}{3}(2)+\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{32}{35}$$

2- یک جواب معادله زیر را حول نقطه $x=0$ به دست آورید . این نقطه چه نوع نقطه ای است ؟ سپس فرم جواب دوم آن را بنویسید .

$$x^2(1+x)y''+x(x-4)y'+4y=0$$

پاسخ : رجوع کنید به کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار ، صفحه 351 ، سئوال 16

3- اگر $J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$ باشد ، الف) فقط یکی از دو رابطه زیر را ثابت کنید .

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_\nu(x)\right)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\qquad,\qquad\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

ب) انتگرال روبرو را محاسبه نمائید . $\int x^2J_0(x)dx$

پاسخ : اثبات قسمت الف در صفحه 362 کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار موجود است .

ب) $I=\int x^2J_0(x)dx \;,\; u=x\rightarrow du=dx \;,\; xJ_0(x)dx=dv\rightarrow v=xJ_1(x)\Rightarrow I=x^2J_1(x)-\int xJ_1(x)dx$

$S=\int xJ_1(x)dx \;,\; x=u\rightarrow dx=du \;,\; J_1(x)dx=dv\rightarrow v=-J_0(x)\Rightarrow S=-xJ_0(x)+\int J_0(x)dx$

$\Rightarrow \int x^2J_0(x)dx=x^2J_1(x)+xJ_0(x)-\int J_0(x)dx$

4- الف) لاپلاس وارون $\ell^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{\frac{5}{4}}}\right\}$ را حساب کنید .

ب) انتگرال روبرو را محاسبه کنید . $\int_0^{\infty}e^{-2t}\left(\int_0^{t}\frac{e^{-2\lambda}-e^{-4\lambda}}{\lambda}d\lambda\right)dt$

1- با توجه به رابطه مولد $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$

الف) نشان دهید : $(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$

ب) با مساوی قرار دادن ضرایب t^n در قسمت قبل فرمول بازگشتی زیر را به دست آورید .

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

ج) انتگرال روبرو را محاسبه کنید . $\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+1)P_n(x)dx$

پاسخ : الف) از طرفین رابطه بالا نسبت به t مشتق می گیریم .

$$\frac{(x-t)}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}\Rightarrow\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}\Rightarrow(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

ب) رابطه فوق را به صورت مقابل خلاصه می کنیم : $\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2nxP_n(x)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n+1}$

با مساوی قرار دادن ضرایب t هم توان داریم : $xP_n(x)-P_{n-1}(x)=(n+1)P_{n+1}(x)-2nxP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)$

و $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$ به دست می آید .

ج) تابع از درجه 3 می باشد پس با روابط روبرو داریم : $P_0(x)=1\quad P_1(x)=x\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\quad P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+1)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+x\right)_{-1}^{1}=\frac{1}{3}\quad,\quad C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^4-2x^3+x)dx=\frac{3}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{1}=\frac{3}{5}$$

$$C_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^5-\frac{x^3}{2}-3x^4+\frac{3}{2}x^2+x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{5}{2}\left(\frac{x^6}{4}-\frac{x^4}{8}-\frac{3}{5}x^5+\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}\right)_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}$$

$$C_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^6-5x^5+\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x^4+3x^3-\frac{3}{2}x\right)dx=\frac{7}{2}\left(\frac{5}{14}x^7-\frac{5}{6}x^6-\frac{5}{8}x^4-\frac{3}{10}x^5+\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{4}x^2\right)_{-1}^{1}=\frac{2}{5}$$

پاسخ :الف) $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right\}=1-\cos t$,

$$\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(1+s^2)}\right\}-\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(1+s^2)}\right\}=\ell^{-1}\left\{e^{-s}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1})\right\}-\ell^{-1}\left\{e^{-2s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)\right\}$$

$$\ell^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\}=u_c(t)f(t-c)\Rightarrow \ell^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s(1+s^2)}\right\}=u_1(t)(1-\cos(t-1)) \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}\right\}=u_2(t)[1-\cos(t-2)]$$

$$\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}=u_1(t)[1-\cos(t-1)]-u_2(t)[1-\cos(t-2)]$$

ب) از مسائل قبل داریم : $\ell^{-1}\left\{\ln\frac{s}{s-1}\right\}=\frac{e^t-1}{t}$ و همین طور $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$ می باشد . اکنون با استفاده از کانولوشن

داریم : $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\ln\frac{s}{s-1}\right\}=\int_0^t\frac{e^{t-\lambda}-1}{t-\lambda}\times\cos\lambda \; d\lambda$ از آنجه که انتگرال به صورت $\int\frac{e^t}{t}dt$ قابل قبول است .

5- الف) اگر $f(t)$ متناوب با دوره تناوب p باشد , (یعنی $f(t+p)=f(t)$) نشان دهید .

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$$

ب) تبدیل لاپلاس $\ell\{\sin(kt)\}$ را حساب کنید .

پاسخ : از موارد امتحانی حذف شده است .

6- دستگاه روبرو را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1' + y_2' = 2\sinh(t) \\ y_2' + y_3' = e^t \\ y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t} \end{cases} \qquad y_1(0)=1=y_2(o) \quad , \quad y_3(0)=0$$

پاسخ : رجوع کنید به کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار , صفحه 472

چون تفاضل ریشه های معادله شاخصی صحیح است پس : $y_2 = ky_1 \ln x + x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ و جواب عمومی $y = Ay_1 + By_2$ می باشد .

3- الف) تابع زیر را بر حسب تابع پله ای واحد بیان نمائید و سپس تبدیل لاپلاس آنرا به دست آورید .

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & t<\pi\\ t & t>\pi\end{cases}$$

ب) تبدیل لاپلاس تابع روبرو را بیابید .

$$g(t)=t^2e^{2t}\int_0^t e^{-t}\frac{\sin 5t}{t}dt$$

پاسخ : الف)

$$f(t)=u_0(t)\sin t+u_\pi t-u_\pi(t)\sin t=\sin t+u_\pi(t)(t-\sin t)\Rightarrow \ell\{f(t)\}=\ell\{\sin t\}+\ell\{u_\pi(t-\sin t)\}$$

$$\Rightarrow \ell\{f(t)\}=\frac{1}{1+s^2}+e^{-\pi s}\ell\{t+\pi\}-e^{-\pi s}\{\sin(t+\pi)\}=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s}+\frac{1}{s^2+1}\right)$$

ب) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{t}=5\rightarrow$ موجود است $\Rightarrow \ell\left\{\frac{\sin 5t}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(u)du \;,\; F(s)=\ell\{\sin 5t\}=\frac{5}{s^2+25}\Rightarrow \ell\left\{\frac{\sin 5t}{5}\right\}=\int_s^{\infty}\frac{5}{u^2+25}du$

$$\Rightarrow \ell\left\{\frac{\sin 5t}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{5}\;,\; \ell\{e^{bt}f(t)\}=F(s-b)\Rightarrow \ell\left\{e^{-t}\frac{\sin 5t}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s+1}{5}\;,\; \int_0^t f(r)dr=\frac{1}{s}F(s)$$

$$\Rightarrow \ell\left\{\int_0^t e^{-t}\frac{\sin 5t}{t}dt\right\}=\frac{1}{s+1}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s+1}{5}\right)\Rightarrow \ell\left\{e^{2t}\int_0^t e^{-t}\frac{\sin 5t}{t}dt\right\}=\frac{1}{s-1}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s-1}{5}\right)$$

$$\ell\{t^2f(t)\}=F''(s)\Rightarrow \ell\{g(t)\}=\left[\frac{1}{s-1}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s-1}{5}\right)\right]''$$

4- مطلوب است محاسبه : الف) $\ell^{-1}\left\{\ln\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s}\right\}$ **ب)** $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}$

پاسخ : الف)

$$F(s)=\ln\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s}=\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}-\ln 2s\right)\Rightarrow F'(s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}-\frac{1}{s}\Rightarrow \ell^{-1}\{F'(s)\}=J_0(t)-1$$

$$\ell^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t)\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\ln\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s}\right\}=\frac{1}{t}\left(1-J_0(t)\right)$$

امتحان پایان ترم　　دانشگاه صنعتی امیر کبیر　　80/4/11

1- الف) نشان دهید با استفاده از تغییر متغیر $y = x^{-\frac{1}{2}}u$ معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - a^2)y = 0$ را به معادله $u'' + f(x)u = 0$ تبدیل می کند.　ب) با استفاده از قسمت قبل نشان دهید: $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x\pi}}\sin x$

پاسخ: $y = ux^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = u'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}ux^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y'' = u''x^{-\frac{1}{2}} - u'x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}ux^{-\frac{5}{2}}$

$$\Rightarrow x^{\frac{3}{2}}u'' - x^{\frac{1}{2}}u' + \frac{3}{4}ux^{-\frac{1}{2}} + u'x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}ux^{-\frac{1}{2}} + (x^2 - a^2)x^{-\frac{1}{2}}u = 0 \Rightarrow x^{\frac{3}{2}}u'' + \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4} - a^2\right)\right)u = 0$$

با ضرب رابطه فوق در $x^{-\frac{3}{2}}$ داریم: $u'' + \left(1 + \left(\frac{1}{4} - a^2\right)x^{-\frac{1}{2}}\right)u = 0 = u'' + f(x)u = 0$

ب) رجوع کنید به کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار، صفحه 366، مجموعه مسائل 4 . 6 ، مسئله 2

2- به کمک سری توانی در همسایگی $x = 0$ یک جواب معادله زیر را به دست آورده و سپس فقط فرم جواب دوم و جواب عمومی آن را بنویسید.　$xy'' + 3y' - x^2y = 0$

پاسخ: $a_0 = \lim\limits_{x\to 0} x \times \frac{3}{x} = 3$, $b_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \times \frac{-x^2}{x} = 0 \Rightarrow r(r-1) + 3r = 0 \Rightarrow r_1 = 0$, $r_2 = -2$

$$\Rightarrow y_1 = x^0\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \;,\; y_1' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \;,\; y_1'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

با قرار دادن روابط فوق در معادله آنگاه: $\sum n(n+2)C_n x^{n-1} - \sum C_n x^{n+2} = 0$ بنابراین: x^0 ضریب $= 0 \Rightarrow (1)(3)C_1 = 0 \to C_1 = 0$

x^2 ضریب $= 0 \Rightarrow (3)(5)C_3 - C_0 = 0 \to C_3 = \frac{1}{15}C_0$, x^1 ضریب $= 0 \Rightarrow (2)(4)C_2 = 0 \to C_2 = 0$

x^4 ضریب $= 0 \Rightarrow (5)(7)C_5 - C_2 = 0 \to C_5 = 0$, x^3 ضریب $= 0 \Rightarrow (4)(6)C_4 - C_1 = 0 \to C_4 = 0$

x^5 ضریب $= 0 \Rightarrow (6)(8)C_6 - C_3 = 0 \to C_6 = \frac{1}{3\times 5\times 8\times 6}C_0$, $\Rightarrow y_1 = C\left(1 + \frac{x^3}{15} + \frac{x^6}{720} + \ldots\right)$

ب)
$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2-s+1)}\right\}=\frac{1}{3}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{s-2}{s^2-s+1}\right\}=\frac{1}{3}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\frac{1}{3}\ell^{-1}\left\{\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}+\frac{1}{2}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}=\frac{1}{3}e^{-t}-e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

5- معادله انتگرال روبرو را حل کنید .
$$\int_0^t \frac{y(\lambda)}{(t-\lambda)^{\frac{1}{3}}}d\lambda=t(1+t)$$

پاسخ : با استفاده از کانولوشن داریم :
$$Y(s)\times\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}\Rightarrow Y(s)=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{s^{\frac{4}{3}}}+\frac{1}{s^{\frac{7}{3}}}\right)$$

و در پایان عبارت روبرو را ساده می کنیم .
$$\Rightarrow y(t)=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\right)$$

6- y را از دستگاه روبرو بیابید .
$$\begin{cases} y'+2y+6\int_0^t x(t)dt=-2u_0(t) \\ y'+x'+x=0 \end{cases}\qquad y(0)=-5\ ,\ x(0)=6$$

پاسخ : از هر دو معادله لاپلاس می گیریم .
$$\Rightarrow\begin{cases} sY(s)+5+2Y(s)+\frac{6}{s}X(s)=-\frac{2}{s} \\ sY(s)-5+sX(s)-6+X(s)=0 \end{cases}$$

طرفین معادله بالائی را در s ضرب می کنیم ،
$$\begin{cases} s^2Y(s)+5s+2sY(s)+6X(s)=-2 \\ sY(s)+sX(s)-1+X(s)=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (s^2+2s)Y(s)+6X(s)=-2-5s \\ sY(s)+(s+1)X(s)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} -2-5s & 6 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2s & 6 \\ s & s+1 \end{vmatrix}}=-\frac{5s^2+7s+8}{s^3+3s^2-4s}=\frac{\frac{8}{3}}{s}-\frac{\frac{10}{3}}{s-1}-\frac{\frac{49}{15}}{s+5}\Rightarrow y(t)=\frac{8}{3}-\frac{10}{3}e^t-\frac{49}{15}e^{-5t}$$

امتحان پایان ترم   دانشگاه صنعتی امیر کبیر   80/10/24

1- اگر معادلات زیر

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+20y=0 \qquad \text{و} \qquad \left(1-x^2\right)y''-2xy'+12y=0$$

به ترتیب دارای جواب های y_1 و y_2 باشند، مطلوب است محاسبه

الف) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2 dx$ ب) $\int_{-1}^{1} y_1^2 dx$

پاسخ : هر دو معادله فوق لژاندر بوده و جواب ها برحسب چند جمله ائهای لژاندر بیان می شوند . در معادله نخست $\nu(\nu+1)=20 \rightarrow \nu=4$ و در دومی $\nu(\nu+1)=12 \rightarrow \nu=3$ می باشد . در نتیجه $y_1=P_4(x)$ و $y_2=P_3(x)$ می باشند .

الف) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2 dx=\int_{-1}^{1} P_4(x)P_3(x)dx=0$ ب) $\int_{-1}^{1} y_1^2 dx=\int_{-1}^{1}\left[P_4(x)\right]^2 dx=\frac{2}{9}$

2- در معادله $2(x-3)^2 xy''+3xy'+(x-3)y=0$ نقاط معمولی و منفرد منظم و منفرد نامنظم را مشخص کنید ، سپس ریشه های معادله شاخصی را تعیین و جواب اول معادله را به دست آورید . فقط فرم جواب دوم را بنویسید .

پاسخ : نقاط معمولی $2(x-3)^2 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0,3$. $x=0$ نقطه منفرد منظم است زیرا $x\frac{3x}{2(x-3)^2 x}$ و $x^2\frac{x-3}{2x(x-3)^2}$ در $x=0$ تعریف شده اند و $x=3$ منفرد نامنظم است .

$$a_0 \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x(x-3)^2}=0 \quad , \quad b_0=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-3)}{2x(x-3)^2}=0 \Rightarrow r=0,1$$

$$\Rightarrow y_1=x^0\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n \quad , \quad y_1'=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n x^{n-1} \quad , \quad y_1''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow 2\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)C_n x^{n+1}-12\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)C_n x^{n}-18\sum n(n-1)C_n x^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}nC_n x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+1}-3\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n}=0$$

x^1 ضریب $=0 \Rightarrow -18C_2=0 \rightarrow C_2=0$, x^0 ضریب $=0 \Rightarrow -3C_0=0 \rightarrow C_0=0$

x^2 ضریب $\equiv 0 \Rightarrow -(12)(2)C_2 - 18(3)(2)C_3 + 6C_2 + C_1 - 3C_2 = 0 \rightarrow C_3 = \dfrac{1}{3\times 36}C_1$

$$\Rightarrow y_1 = C\left(x + \frac{1}{3\times 36}x^3 + \dots\right) \ , \ y_2 = ky_1 \ln x + x\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \ , \ y = Ay_1 + By_2$$

3- معادله روبرو را حل کنید . $f(t) = te^{-t} + \int_0^t \lambda \ \ f(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$

پاسخ : با فرض $g(\lambda) = e^{-\lambda}\lambda$ و با استفاده از کانولوشن داریم :

$$\ell\{f(t)\} = \ell\{te^{-t}\} + \ell\{f\{t\}\} \times \ell\{te^{-t}\} \Rightarrow \ell\{f(t)\} = \frac{\ell\{te^{-t}\}}{1-\ell\{te^{-t}\}}$$

$$\ell\{tf(t)\} = -F'(s) \Rightarrow \ell\{te^{-t}\} = -\left(\frac{1}{s+1}\right)' = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow \ell\{f(t)\} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2}}{1-\frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{1}{(s+1)^2-1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-1}\right\} = e^{-t}\sinh(t)$$

4- مطلوب است محاسبه :

الف) $\ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2+2s+5}\right\}$

ب) $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\cot^{-1}(s+3)\right\}$

ج) $\ell\left\{te^{-2t}\int_0^t t^2 e^{-t}\dfrac{1-\cos t}{t}dt\right\}$

پاسخ : الف)

$$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+2s+5}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2+4}\right\} \ , \ F(s) = \frac{1}{(s+1)^2+4} \Rightarrow \ell^{-1}\{F(s)\} = e^{-t}\sin 2t$$

$$\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+2s+5}\right\} = u_2(t)f(t-2) = u_2(t)e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)$$

ب)

$$F(s) = \cot^{-1}(s+3) \Rightarrow F'(s) = -\frac{1}{(s+3)^2+1} \Rightarrow \ell^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t) = -e^{-3t}\sin t \Rightarrow \ell\{\cot^{-1}(s+3)\} = \frac{e^{-3t}}{t}\sin t$$

از مثال های قبل به دست آوردیم $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \dfrac{t}{4}\sin 2t$ پس با استفاده از کانولوشن داریم :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\cot^{-1}(s+3)\right\} = \int_0^t\left(\frac{t-\lambda}{4}\right)\sin(2t-2\lambda)e^{-3\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

۱۷

5- معادله روبرو را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید . $t\dfrac{d^2y}{dt^2}-(2+t)\dfrac{dy}{dt}+3y=t-1 \quad , \quad y(0)=0$

پاسخ : از طرفین لاپلاس می گیریم . $\Rightarrow -\left(2sY(s)+s^2Y'(s)\right)+\left(sY'(s)+Y(s)\right)-2sY(s)+3Y(s)=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}$

که یک معادله خطی می باشد , بنابراین : $\Rightarrow \left(-s^2+s\right)Y'(s)+(4-4s)Y(s)=\dfrac{1-s}{s^2}\Rightarrow Y'(s)+\dfrac{4}{s}Y(s)=\dfrac{1}{s^3}$

$\mu(s)=e^{\int\frac{4}{s}ds}=s^4\Rightarrow Y(s)=s^{-4}\int s\;ds=\dfrac{c}{s^4}+\dfrac{1}{2s^2}$ چون $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$ پس ثابت c را می توان صفر اختیار کرد .

داریم : $y(t)=\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{s^2}\right\}=\dfrac{t}{2}$

امتحان پایان ترم　　　دانشگاه صنعتی امیر کبیر　　　82/4/2

1- الف) نشان دهید که معادله لژاندر را می توان به صورت زیر نوشت . $\left[\left(1-x^2\right)y'\right]'=-v(v+1)y$

ب) با استفاده از قسمت قبل یا هر روش دیگر نشان دهید که برای هر دو چند جمله ای لژاندر $P_n(x)$ و $P_m(x)$

که $m\neq n$ داریم : $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0$

پاسخ : الف) معادله لژاندر به صورت روبرو می باشد . $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+v(v+1)y=0\Rightarrow p=1-x^2 \quad , \quad q=y'$

$\Rightarrow \dfrac{dp}{dx}=-2x \quad , \quad \dfrac{dq}{dx}=y'' \quad , \quad p\dfrac{dq}{dx}+q\dfrac{dp}{dx}+v(v+1)y=0\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(pq)=-v(v+1)y\Rightarrow \left[\left(1-x^2\right)y'\right]'=-v(v+1)y$

ب) رجوع کنید به صفحه 320 کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار .

2- می دانیم که تابع

$$y_1 = 1 - \frac{1}{3^2}x^3 + \frac{1}{3^4(2!)^2}x^6 - \frac{1}{3^6(3!)^2}x^9 + \dots$$

یک جواب معادله $xy'' + y' + x^2y = 0$ است . جواب دیگر آنرا بیابید .

پاسخ : نقطه $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم می باشد (خودتان این مطلب را ثابت کنید .) در نتیجه داریم :

$a_0 = \lim_{x\to 0} x \times \frac{1}{x} = 1$, $b_0 = \lim_{x\to 0} x^2 \times \frac{x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ معادله شاخصی $= r(r-1) + a_0 r + b_0 = r(r-1) + r = 0 \Rightarrow r = 0$

از آنجا که $r_1 = r_2 = 0$ است پس فرم جواب دوم به صورت روبرو می باشد . $y_2 = y_1 \ln x + x^0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

با جایگذاری مقادیر روبرو داریم : $\Rightarrow y_2' = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$, $y_2'' = y_1'' \ln x + \frac{2}{x}y_1' - \frac{1}{x^2}y_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$

$$\Rightarrow xy_2'' + y_2' + x^2y = 0 \Rightarrow xy_1'' \ln x + 2y_1' - \frac{1}{x}y_1 + x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + x^2 y_1 \ln x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

چون y_1 یک ریشه معادله است پس ضرایب $\ln x$ صفر است و با ساده کردن عبارت فوق خواهیم داشت :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} + 2y_1' = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = -2y_1'$$

$-2y_1' = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{54}x^5 + \frac{1}{3^4(3!)^2}x^8 + \dots \Rightarrow x^0$ ضریب $(1)^2 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

x ضریب $= 2^2 C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, x^2 ضریب $= 9C_3 + C_0 = \frac{1}{3}$, x^3 ضریب $= 16C_4 + C_1 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

به طور مشابه مقادیر C_5 و C_7 و C_8 و ... نیز صفر می شوند . x^5 ضریب $= 36C_6 + C_3 = -\frac{1}{54}$, x^8 ضریب $= 81C_9 + C_6 = \frac{1}{3^4(3!)^2}$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^2}C_0 \ , \ C_6 = -\frac{1}{3^5 \times 2^3} - \frac{1}{3^2 \times 2^2}C_3 = \frac{1}{3^4 \times 2^2}C_0 + \frac{1}{3^5 \times 2^3}$$

پس جواب دوم به فرم زیر است . $\Rightarrow C_9 = \frac{1}{3^{10} \times 2^2} - \frac{1}{3^4}C_6 \Rightarrow C_9 = -\frac{1}{3^{10} \times 2^3} - \frac{1}{3^8 \times 2^2}C_0$

$$y_2 = \ln x \times y_1 + C_0\left(1 - \frac{1}{3^2}x^3 + \frac{1}{3^4 \times 2^2}x^6 - \frac{1}{3^8 \times 2^2}x^9 + \dots\right) + \frac{1}{3^3}x^3 + \frac{1}{3^5 \times 2^3}x^6 - \frac{1}{3^{10} \times 2^3}x^9 + \dots$$

5- معادله روبرو را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید . $t\dfrac{d^2y}{dt^2}-(2+t)\dfrac{dy}{dt}+3y=t-1 \quad , \quad y(0)=0$

پاسخ : از طرفین لاپلاس می گیریم . $\Rightarrow -\left(2sY(s)+s^2Y'(s)\right)+\left(sY'(s)+Y(s)\right)-2sY(s)+3Y(s)=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}$

که یک معادله خطی می باشد ، بنابراین : $\Rightarrow \left(-s^2+s\right)Y'(s)+(4-4s)Y(s)=\dfrac{1-s}{s^2} \Rightarrow Y'(s)+\dfrac{4}{s}Y(s)=\dfrac{1}{s^3}$

$\mu(s)=e^{\int\frac{4}{s}ds}=s^4 \Rightarrow Y(s)=s^{-4}\int s\ ds=\dfrac{c}{s^4}+\dfrac{1}{2s^2}$ چون $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$ پس ثابت c را می توان صفر اختیار کرد .

داریم : $y(t)=\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{s^2}\right\}=\dfrac{t}{2}$

امتحان پایان ترم **دانشگاه صنعتی امیر کبیر** 82/4/2

1- الف) نشان دهید که معادله لژاندر را می توان به صورت زیر نوشت . $\left[\left(1-x^2\right)y'\right]'=-v(v+1)y$

ب) با استفاده از قسمت قبل یا هر روش دیگر نشان دهید که برای هر دو چند جمله ای لژاندر $P_n(x)$ و $P_m(x)$

که $m\neq n$ داریم : $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0$

پاسخ : الف) معادله لژاندر به صورت روبرو می باشد . $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+v(v+1)y=0 \Rightarrow p=1-x^2 \quad , \quad q=y'$

$\Rightarrow \dfrac{dp}{dx}=-2x \quad , \quad \dfrac{dq}{dx}=y'' \quad , \quad p\dfrac{dq}{dx}+q\dfrac{dp}{dx}+v(v+1)y=0 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(pq)=-v(v+1)y \Rightarrow \left[\left(1-x^2\right)y'\right]'=-v(v+1)y$

ب) رجوع کنید به صفحه 320 کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار .

3- لاپلاس و لاپلاس وارون های زیر را بیابید :

الف) $\ell\left[e^{3t}\cos 3t\cos 4t\right]$ ب) $\ell^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)^3(s^3+1)}\right]$

پاسخ : الف) $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]\Rightarrow \cos 3t\cos 4t=\dfrac{1}{2}\left[\cos 7t+\cos t\right]$

$$\ell\{e^{t}f(t)\}=F(s-b)\ ,\ F(s)=\ell\{f(t)\}\Rightarrow \ell\{\cos 7t\}=\frac{s}{s^2+49}\Rightarrow \ell\{e^{3t}\cos 7t\}=\frac{s-3}{(s-3)^2+49}$$

$$\ell\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}\Rightarrow \ell\{e^{3t}\cos t\}=\frac{s-3}{(s-3)^2+1}\Rightarrow \ell\{e^{3t}\cos 3t\cos 4t\}=\frac{1}{2}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+49}+\frac{s-3}{(s-3)^2+1}\right]$$

ب) ابتدا کسر را تجزیه می کنیم .

$$\frac{1}{(s-1)^3(s^3+1)}=\frac{As^2+Bs+C}{s^3-3s^2+3s-1}+\frac{Ds^2+Es+F}{s^3+1}$$

$$\Rightarrow\frac{(A+D)s^5+(B+E-3D)s^4+(C+3D-3E+F)s^3+(A-D+3E-3F)s^2+(B-E+3F)s+(C-F)}{(s-1)^3(s^3+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+D=0\\B+E-3D=0\\C+3D-3E+F=0\\A-D+3E-3F=0\\B-E+3F=0\\C-F=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-D\\B-2E+C+F=0\\A+C+2D-2F=0\\A+B-D+2E=0\\2B-3D+3F=0\\C=F+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F-D=1\\2B+3(F-D)=0\Rightarrow B=-\frac{3}{2}\\2A+2E=\frac{3}{2}\Rightarrow A+E=\frac{3}{4}\\-2E+2F=\frac{1}{2}\Rightarrow F-E=\frac{1}{4}\\E-3D=\frac{3}{2}\Rightarrow E+3A=\frac{3}{2}\\A+C=2\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به دست می آید :

$$A=\frac{3}{8}\ ,\ B=-\frac{3}{2}\ ,\ C=\frac{13}{8}\ ,\ D=-\frac{3}{8}\ ,\ E=\frac{3}{8}\ ,\ F=\frac{5}{8}$$

و می توان عبارت روبرو را به فرم زیر نوشت .

$$\Rightarrow\frac{1}{(s-1)^3(s^3+1)}=\frac{1}{8}\left[\frac{3s^2-12s+13}{(s-1)^3}+\frac{-3s^2+3s+5}{s^3+1}\right]$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{3(s-1)^2-6(s-1)+4}{(s-1)^3}+\frac{-3(s^2-s+1)}{(s+1)(s^2-s+1)}\right]+\frac{1}{s^3+1}=\frac{1}{8}\left[\frac{3}{(s-1)}-\frac{6}{(s-1)^2}+\frac{4}{(s-1)^3}-\frac{3}{s+1}\right]+\frac{1}{s^3+1}$$

$$\ell\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^{t}\ ,\ \ell\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}=te^{t}\ ,\ \ell\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\}=\frac{t^2}{2}e^{t}\ ,\ \ell\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=e^{-t}$$

برای تعیین لاپلاس $\dfrac{1}{s^3+1}$ یکبار دیگر باید از تجزیه کسر ها استفاده کرد اما در اینجا تنها جواب آخر آن نوشته می شود .

۱۶

$$\ell\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}=\frac{e^{\frac{t}{2}}}{3}\left[\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+e^{-\frac{3t}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \ell\left\{\frac{1}{(s-1)^3(s^3+1)}\right\}=\frac{1}{8}\left[3e^t-6te^t+2t^2e^t-3e^{-t}\right]+\frac{e^{\frac{t}{2}}}{3}\left[\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+e^{-\frac{3t}{2}}\right]$$

توجه : راه حل دیگر این مساله استفاده از کانولوشن می باشد اما راه حل فوق آسان تر است زیرا در کانولوشن دو بار باید انتگرال گرفت که آن انتگرال ها بسیار مشکل تر از حل دستگاه 6 مجهولی می باشد .

4- **الف) اگر** $J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$ **نشان دهید** $J_0'(x)=-J_1(x)$

ب) اگر $\ell[J_0(at)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ **نشان دهید :** $\ell^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{tJ_1(at)}{a}$

پاسخ : الف)

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}\Rightarrow J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\frac{x^{2n}}{2^{2n}}$$

$$J_0'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n((n-1)!)^2}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n!)^2}\frac{x^{2(n+1)-1}}{2^{2(n+1)-1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=J_1(x)\Rightarrow J_0'(x)=-J_1(x)$$

ب) با استفاده از قسمت الف داریم :

$$J_0'(at)=-aJ_1(at)\ ,\ \ell\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$$

$$\Rightarrow \ell\{J_0'(at)\}=s\ell\{J_0(at)\}+J(0)=\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\ ,\ \ell\{-tf(t)\}=F'(s)\ ,\ F(s)=\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow F'(s)=\frac{a^2}{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{a^2}{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}=-tJ_0'(at)\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}=-\frac{t}{a^2}J_0'(at)$$

$$J_0'(at)=-aJ_1(at)\Rightarrow \ell^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{tJ_1(at)}{a}$$

۲e

5- معادله روبرو را حل کنید :

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+(1-2t)\frac{dy}{dt}-2y=0 \qquad y(0)=1 \ , \ y'(0)=2$$

پاسخ : از معادله فوق لاپلاس می گیریم .

$$\ell\{ty(t)\}=-Y'(s) \ , \ \ell\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$

$$\ell\{y'\}=sY(s)-y(0) \ , \ \ell\{y\}=Y(s) \Rightarrow \ell\{ty''\}=-\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)'=-\left(s^2Y(s)-s-2\right)'$$

$$\Rightarrow \ell\{ty''\}=-\left(s^2Y'(s)+2sY(s)-1\right) \ , \ \ell\{ty'\}=-\left(sY(s)-y(0)\right)'=-\left(sY(s)-1\right)'=-\left(sY'(s)+Y(s)\right)$$

$$\Rightarrow \ell\left\{t\frac{d^2y}{dt^2}+(1-2t)\frac{dy}{dt}-2y\right\}=-s^2Y'(s)-2sY(s)+1+sY(s)-1+2sY'(s)+2Y(s)-2Y(s)=0$$

$$\Rightarrow \left(-s^2+2s\right)Y'(s)-sY(s)=0\Rightarrow (2-s)Y'(s)-Y(s)=0\Rightarrow Y'(s)=\frac{Y(s)}{2-s}\Rightarrow\frac{dY(s)}{ds}=\frac{Y(s)}{2-s}\Rightarrow\frac{dY(s)}{Y(s)}=\frac{ds}{2-s}$$

$$\Rightarrow \ln Y(s)=-\ln(2-s)\Rightarrow Y(s)=\frac{c}{2-s}\Rightarrow y(t)=\ell^{-1}\left\{\frac{c}{2-s}\right\}=-ce^{2t}$$

6- دستگاه روبرو را حل کنید .

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=y-2x\end{cases} \qquad x(0)=8 \ , \ y(0)=3$$

پاسخ : از طرفین دستگاه فوق لاپلاس می گیریم .

$$\ell\left\{\frac{dx}{dt}\right\}=sX(s)-x(0) \ , \ \ell\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=sY(s)-y(0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}sX(s)-8=2X(s)-3Y(s)\\ sY(s)-3=Y(s)-2X(s)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(s-2)X(s)+3Y(s)=8\\ 2X(s)+(s-1)Y(s)=3\end{cases} \ , \ \begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}} \ , \ y=\frac{\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}} \ , \ \Rightarrow X(s)=\frac{\begin{vmatrix}8 & 3\\ 3 & s-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & 3\\ 2 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{8s-8-9}{s^2-3s+2-6}=\frac{8s-17}{s^2-3s-4}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\begin{vmatrix}s-2 & 8\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & 3\\ 2 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{3s-6-16}{s^2-3s+2-6}=\frac{3s-22}{s^2-3s-4} \ , \ s^2-3s-4=(s+1)(s-4)$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}\Rightarrow x(t)=5e^{-t}+3e^{4t} \quad \Rightarrow Y(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}\Rightarrow y(t)=5e^{-t}-2e^{4t}$$

امتحان پایان ترم دانشگاه صنعتی امیرکبیر دی ماه 1382

1- در معادله دیفرانسیل $x(x-1)^3 y''+(2x-2)y'+x(x+1)y=0$ فقط نقاط معمولی، منفرد منظم و منفرد نامنظم را مشخص کنید.

پاسخ : می دانیم در معادله $f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0$ نقطه $x=a$ یک نقطه معمولی است هرگاه $f_1(a)\neq 0$ باشد.

پس : $x(x-1)^3\neq 0 \Rightarrow x\neq 0,1$ نقاط معمولی می باشند. و نقاط $x=0,1$ نقاط منفرد می باشند. اکنون به بررسی توابع زیر می پردازیم. مشخص است که توابع $x\times\dfrac{2x-2}{x(x-1)^3}$ و $x^2\times\dfrac{x(x+1)}{x(x-3)^3}$ در نقاط $x=0$ تعریف شده اند پس منفرد منظم هستند ولی تابع $(x-1)\times\dfrac{2x-2}{x(x-1)^3}$ در نقطه $x=1$ تعریف نشده است پس منفرد نامنظم است.

2- اگر $y_1=x-\dfrac{x^3}{2^2}+\dfrac{x^5}{2^4(2!)^2}-\dfrac{x^7}{2^6(3!)^2}+\ldots$ یک جواب معادله $x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0$ باشد، جواب دوم آنرا بیابید.

پاسخ : می توان تشخیص داد که نقطه $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله فوق است. معادله شاخصی را تشکیل می دهیم :

$$a_0=\lim_{x\to 0}x\times\left(-\frac{1}{x}\right)=-1\ ,\ b_0=\lim_{x\to 0}x^2\times\frac{x^2+1}{x^2}=1\Rightarrow \text{معادله شاخصی}: r(r-1)+a_0r+b_0=0\to r(r-1)-r+1=0$$

معادله شاخصی دارای ریشه مضاعف $r=0$ است. پس فرم دوم جواب به صورت روبرو می باشد : $y_2=y_1\ln x+x^0\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$

با جایگذاری مقادیر روبرو داریم : $y_2'=y_1'\ln x+\dfrac{y_1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}\ ,\ y_2''=y_1''\ln x+\dfrac{2}{x}y_1'-\dfrac{y_1}{x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}$

$$x^2y_2''-xy_2'+(x^2+1)y_2=0\Rightarrow x^2y_1''\ln x+2xy_1'-y_1+x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}-xy_1'\ln x-y_1-x\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}+(x^2+1)y_1\ln x+(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=0$$

چون y_1 یک ریشه معادله است پس ضرایب $\ln x$ صفر است و با ساده کردن عبارت فوق خواهیم داشت :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + 2xy_1' - 2y = 0$$

$$\Rightarrow C_0 x^0 = 0 \rightarrow C_0 = 0 \;,\; C_1 = 0 \;,\; C_0 x^2 + C_2 x^2 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \;,\; 4C_3 + C_1 = 1 \rightarrow C_3 = \frac{1}{4}$$

$$9C_4 + C_2 = 0 \rightarrow C_4 = 0 \;,\; 16C_5 + C_3 = -\frac{1}{8} \rightarrow C_5 = -\frac{3}{2^7} \;,\; 25C_6 + C_4 = 0 \rightarrow C_6 = 0 \;,\; 36C_7 + C_5 = \frac{1}{3\times 64} \rightarrow C_7 = \frac{5}{6\times 64}$$

$$y_2 = \ln x \times y_1 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2^7}x^5 + \frac{5}{6\times 64}x^7 \mp \dots$$

3- **معادله زیر را با استفاده از تغییر متغیر زیر حل کنید.**

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 y'\right) - x(x+1)y = 0 \qquad y = x^{-1}u \;,\; t = 2x^{\frac{1}{2}}$$

پاسخ : $t = 2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{t^2}{4} \rightarrow dx = \frac{t}{2}dt \;,\; y = x^{-1}u \rightarrow dy = -x^{-2}udx + x^{-1}du \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -x^{-2}u + x^{-1}\frac{du}{dx} \;,\; u = xy$

با جایگذاری بدست می آید : $\frac{d}{dt}\times\frac{2}{t}\left(-\frac{t^2}{4}u + \frac{t^4}{16}\times\frac{du}{dt}\times\frac{2}{t}\right) - u\left(\frac{t^2}{4}+1\right) = 0 \Rightarrow t^2u'' - \left(t^2+6\right)u = 0$

معادله شاخصی : $r(r-1) - 6 = 0 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow u_1 = t^3\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \Rightarrow u'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)C_n t^{n+1}$

$$\Rightarrow -6C_0t^3 + 6C_0t^3 = 0 \;,\; -6C_1t^4 + 12C_1t^4 = 0 \rightarrow C_1 = 0 \;,\; -6C_2t^5 + 20C_2t^5 - C_0t^5 = 0 \rightarrow C_2 = \frac{C_0}{14}$$

$$24C_3t^6 - C_1t^6 = 0 \rightarrow C_3 = 0 \;,\; 36C_4t^7 - C_2t^7 = 0 \rightarrow C_4 = \frac{1}{36\times 14}C_0 \;\dots \Rightarrow u = C_0t^3\left(1 + \frac{x^2}{14} + \frac{x^4}{14\times 36} + \dots\right)$$

4- **با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله روبرو را حل کنید.** $t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - ty = 0 \;,\; y(0^+) = 1$

پاسخ : $\ell\{ty''\} = -\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right)' = -\left(s^2Y'(s) + 2sY(s) - 1\right) \;,\; \ell\{y'\} = sY(s) - 1 \;,\; \ell\{ty\} = -Y'(s)$

$$\Rightarrow -s^2Y'(s) - 2sY(s) + 1 + 2sY(s) - 2 + Y'(s) = 0 \Rightarrow \left(1-s^2\right)Y'(s) - 1 = 0 \Rightarrow Y'(s) = \frac{1}{1-s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+s) - \ln(1-s)\right] \;,\; F'(s) = \frac{1}{1-s^2} \Rightarrow \ell\{Y(s)\} = -\frac{1}{t}\ell\{Y'(s)\} = -\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{t}\right) = y(t)$$

5- معادله روبرو را حل کنید . $y'' - 2y' + 3y = \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ \sin t & \pi \le t \end{cases}$

پاسخ : ابتدا معادله کمکی را تشکیل می دهیم : $r^2 - 2r + 3 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i\sqrt{2} \Rightarrow y_h = e^x\left[A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x\right]$

$y'' - 2y' + 3y = t \Rightarrow y = At + B \Rightarrow y = \frac{1}{3}t + \frac{2}{9} \quad 0 < t < \pi$, $y'' - 2y' + 3y = \sin t \Rightarrow y = \frac{1}{4}(\sin t + \cos t)$

6- الف) تبدیل لاپلاس تابع $\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du$ را بیابید .

ب) لاپلاس وارون $\ell^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)\right]$ را حساب کنید .

پاسخ : الف) $h(t) = \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du \Rightarrow h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-t} \Rightarrow \ell\{h'(t)\} = s\ell\{h(t)\} \Rightarrow \ell\left\{\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du\right\} = \frac{1}{s}\ell\left\{\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\right\} = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s+1}}$

ب) $F(s) = \cot^{-1}(s-1) \Rightarrow F'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2 + 1} \Rightarrow \ell^{-1}\{F'(s)\} = -e^t \sin t$, $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\} = te^{4t}$

با استفاده از کانولوشن داریم : $\ell^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)\right] = \int_0^t (-e^\lambda \sin\lambda)(t-\lambda)e^{4(t-\lambda)}d\lambda$

$\int e^{-3\lambda}\sin\lambda d\lambda = \frac{e^{-3\lambda}}{10}(-3\sin\lambda - \cos\lambda)$, $\int \lambda e^{-3\lambda}\sin\lambda d\lambda = \frac{\lambda e^{-3\lambda}(-3\sin\lambda - \cos\lambda)}{10} - \frac{e^{-3\lambda}(9\sin\lambda + 6\cos\lambda)}{100}$

$\Rightarrow \int_0^t (-e^\lambda \sin\lambda)(t-\lambda)e^{4(t-\lambda)}d\lambda = te^{4t}\left[\frac{e^{-3\lambda}}{10}(3\sin\lambda + \cos\lambda)\right]_0^t + e^{4t}\int_0^t \lambda e^{-3\lambda}\sin\lambda d\lambda$

$\ell^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)\right] = \frac{te^{4t}}{10}[3\sin t + \cos t - 1] - \frac{e^{4t}}{10}\left[te^{-3t}(3\sin t + \cos t) + \frac{e^{-3t}}{10}(9\sin t + 6\cos t - 6)\right]$

7- دستگاه روبرو را حل کنید . $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 6\int_0^t y(t)dt = -2 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 0 \end{cases}$ $x(0) = -5$, $y(0) = 6$

این سوال عیناً در 80/4/11 در سوال 6 تکرار شده است . تنها دو متغیر x , y جای یکدیگر را گرفته اند .

5- معادله روبرو را حل کنید .
$$y'' - 2y' + 3y = \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ \sin t & \pi \le t \end{cases}$$

پاسخ : ابتدا معادله کمکی را تشکیل می دهیم :
$$r^2 - 2r + 3 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i\sqrt{2} \Rightarrow y_h = e^x\left[A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x\right]$$

$$y'' - 2y' + 3y = t \Rightarrow y = At + B \Rightarrow y = \frac{1}{3}t + \frac{2}{9} \quad 0 < t < \pi \qquad , \qquad y'' - 2y' + 3y = \sin t \Rightarrow y = \frac{1}{4}(\sin t + \cos t)$$

6- الف) تبدیل لاپلاس تابع $\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du$ را بیابید .

ب) لاپلاس وارون $\ell^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)\right]$ را حساب کنید .

پاسخ : الف)
$$h(t) = \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du \Rightarrow h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-t} \Rightarrow \ell\{h'(t)\} = s\ell\{h(t)\} \Rightarrow \ell\left\{\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du\right\} = \frac{1}{s}\ell\left\{\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\right\} = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s+1}}$$

ب)
$$F(s) = \cot^{-1}(s-1) \Rightarrow F'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2 + 1} \Rightarrow \ell^{-1}\{F'(s)\} = -e^t\sin t \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\} = te^{4t}$$

با استفاده از کانولوشن داریم :
$$\ell^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)\right] = \int_0^t (-e^{\lambda}\sin\lambda)(t-\lambda)e^{4(t-\lambda)}d\lambda$$

$$\int e^{-3\lambda}\sin\lambda d\lambda = \frac{e^{-3\lambda}}{10}(-3\sin\lambda - \cos\lambda) \quad , \quad \int \lambda e^{-3\lambda}\sin\lambda d\lambda = \frac{\lambda e^{-3\lambda}(-3\sin\lambda - \cos\lambda)}{10} - \frac{e^{-3\lambda}(9\sin\lambda + 6\cos\lambda)}{100}$$

$$\Rightarrow \int_0^t (-e^{\lambda}\sin\lambda)(t-\lambda)e^{4(t-\lambda)}d\lambda = te^{4t}\left[\frac{e^{-3\lambda}}{10}(3\sin\lambda + \cos\lambda)\right]_0^t + e^{4t}\int_0^t \lambda e^{-3\lambda}\sin\lambda d\lambda$$

$$\ell^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)\right] = \frac{te^{4t}}{10}[3\sin t + \cos t - 1] - \frac{e^{4t}}{10}\left[te^{-3t}(3\sin t + \cos t) + \frac{e^{-3t}}{10}(9\sin t + 6\cos t - 6)\right]$$

7- دستگاه روبرو را حل کنید .
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 6\int_0^t y(t)dt = -2 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 0 \end{cases} \qquad x(0) = -5 \quad , \quad y(0) = 6$$

این سوال عیناً در 80/4/11 در سوال 6 تکرار شده است . تنها دو متغیر x , y جای یکدیگر را گرفته اند .

نمونه سوالات پایان ترم

معادلات دیفرانسیل

Mathema

شورای دانشجویان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

نام : نام خانوادگی : شماره دانشجویی : استاد درس : گروه ریاضی	به نام خدا سوالات پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل **دانشگاه امیرکبیر** دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	تاریخ : چهارشنبه ۸۸/۱۰/۲۳ مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه ساعت : ۹ صبح امتحان پایان ترم

۱- به کمک سری توانی حول $x_0 = 0$ معادله زیر را حل کنید (۳۰ نمره).

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

۲- با استفاده از تغییر متغیر $y = x^{1/2}u(t)$ که در آن $t = \frac{4}{5}\sqrt{3}x^{\frac{5}{4}}$ می‌باشد، معادله $y'' + 3\sqrt{x}y = 0$ را حل کنید (۲۰ نمره).

۳- مطلوب است :

الف : $\mathrm{L}\left\{e^{-t}\int_0^t \frac{1-\cos x}{x^2}dx\right\}$ (۱۰ نمره) .

ب : $\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2-4s+20}}\right\}$ (۱۰ نمره) .

۴- الف : نشان دهید که $f*g = g*f$ (۵ نمره).

ب : با استفاده از (الف) معادله دیفرانسیل-انتگرالی زیر را حل کنید (۱۰ نمره).

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t \lambda^2 y''(t-\lambda)d\lambda$$

۵- با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید (۱۰ نمره).

$$ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1\ ,\ \ y'(0) = 2$$

۶- در دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر فقط $y(t)$ را بیابید (۱۵ نمره).

$$\begin{cases} y' + x' = t, \\ y'' - x = e^{-t} \end{cases} \qquad y(0) = 3\ ,\ \ y'(0) = -2\ ,\ x(0) = 0$$

بارم ۱۱۰ نمره از کل ۱۸۰	به کمک معادلات دیفرانسیل می‌توانید رفتار سیستم های پیرامون خود را بهتر تحلیل کنید	موفق باشید

جواب ①: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \longrightarrow y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$

$x\cdot\frac{-3}{x} = -3 \quad , \quad x^2\cdot\frac{4}{x^2} = 4 \rightsquigarrow$ $x_0=0$ نقطه غیرعادی منظم

ریشه مضاعف معادله شاخص: $r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \longrightarrow r_1 = r_2 = 2$

پس یک جواب به شکل $y_1 = x^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ و جواب دیگر به شکل $y_2 = y_1\ln x + x^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ و جواب عمومی نیز به شکل $y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$ می‌باشد. حال داریم:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \rightsquigarrow y_1' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)c_n x^{n+1} \rightsquigarrow y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_n x^n$$

با جایگذاری در معادله اصلی: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}3c_n(n+2)x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}4c_n x^{n+2} = 0$

$n=0: \quad (2)(1)c_0 - 6c_0 + 4c_0 = 0 \rightsquigarrow c_0 \times 0 = 0 \Rightarrow$ c_0 دلخواه

$n \geq 1: \quad c_n = 0 \Rightarrow y_1 = c_0 x^2$

و برای جواب دوم داریم: $y_2 = c_0 x^2 \ln x + x^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$$y_2' = 2c_0 x\ln x + c_0 x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)a_n x^{n+1}$$

$$y_2'' = 2c_0 \ln x + 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^n$$

با جایگذاری در معادله اصلی: $2c_0x^2\ln x + 3c_0x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n+2} - 6c_0x^2\ln x -$
$3c_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty}3a_n(n+2)x^{n+2} + 4c_0x^2\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}4a_n x^{n+2} = 0$

$c_0x^2\ln x(2-6+4) = 0 \rightsquigarrow$ c_0 دلخواه

$n=1: \quad 6a_1 - 3a_1 + 4a_1 = 0 \rightsquigarrow a_1 = 0 \qquad n=2: \quad a_2 = 0$

برای تمام مقادیر a_n ، $n\geq 1$ داریم: $a_n = 0$ پس $y_2 = c_0 x^2 \ln x$

پس جواب عمومی به شکل $y = c_0 x^2 + c_0 x^2 \ln x$ است.

* یادآوری ... حتماً به خاطر می‌آورید که معادله $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ یک معادله اویلر (کوشی) محسوب می‌شود. می‌توان با قرار دادن $y = x^r$ بدست آوریم: $y = x^r \to y' = r x^{r-1} \to y'' = r(r-1) x^{r-2}$

جایگذاری در معادله اصلی:

$$x^2 \times r(r-1) x^{r-2} - 3x\, r x^{r-1} + 4x^r = 0$$

$$x^r(\underbrace{r(r-1) - 3r + 4}_{\text{معادله شاخص}}) = 0 \implies r_1 = r_2 = 2 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

$$y_1 = x^2 \qquad y_2 = x^2 \ln x \longrightarrow (\text{جواب عمومی})\ y_g = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

جواب (2):

$$y = x^{\frac{1}{2}} u \to y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} u + x^{1/2} u' \ \text{(I)} \to y'' = \frac{-1}{4} x^{-3/2} u + x^{-1/2} u' + x^{1/2} u'' \ \text{(II)}$$

$$* \ t = \frac{4}{5}\sqrt{3}\, x^{5/4} \ * \qquad \frac{dt}{dx} = \sqrt{3}\, x^{1/4}$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \sqrt{3}\, x^{1/4} \frac{du}{dt}$$

$$u'' = \frac{du'}{dx} = \frac{d(\sqrt{3}\, x^{1/4}\, du/dt)}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^{-3/4} \frac{du}{dt} + \sqrt{3}\, x^{1/4} \frac{d^2u}{dx\,dt}$$

که:

$$\frac{d^2u}{dx\,dt} = \frac{d^2u}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d^2u}{dt^2} \cdot \sqrt{3}\, x^{1/4}$$

حال مقادیر u ، u' و u'' را در (I) و (II) ، پس (I) و (II) را در معادله اصلی قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{-1}{4} x^{-3/2} u + x^{-1/2}\left(\sqrt{3}\, x^{1/4} \frac{du}{dt}\right) + x^{1/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} x^{-3/4} \frac{du}{dt} + \sqrt{3}\, x^{1/4} \frac{d^2u}{dt^2} \cdot \sqrt{3}\, x^{1/4}\right) +$$

$$3\cancel{x^{1/2}}(x^{1/2} u) = 0 \quad (3xu)$$

حال با توجه به رابطه (*) در معادله بالا به جای x ، t قرار می‌دهیم:

$t = \frac{4}{5}\sqrt{3}\, x^{5/4}$

②: $x^{1/4} = \left(\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^{1/5}$ ③: $x^{-1/4} = \left(\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^{-1/5}$ ④: $x = \left(\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^{4/5}$

$$\frac{-1}{4}\left(\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^{-7/5}u + \sqrt{3}\left(\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^{1/5}\frac{du}{dt} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^{-1/5}\frac{du}{dt} + 3\left(\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^{4/5}\frac{d^2u}{dt^2}$$
$$+ 3\left(\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^{4/5}u = 0$$

اگر معادله فوق را در $t^{9/2}$ ضرب کنیم تبدیل به معادله بسل می‌شود که جواب عمومی آن به صورت زیر است:

$$y = x^{1/2}\left(A J_{2/5}\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}(x^{5/4})\right) + B Y_{2/5}\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}(x^{5/4})\right)\right)$$

* نکته: تعمیم معادله دیفرانسیل به صورت $y'' + ax^b y = 0$ با استفاده از تغییر متغیر $y = x^{1/2}u(t)$، $t = \frac{2\sqrt{a}}{b+2}\left(x^{b+2}\right)^{1/2}$

حال تبدیل به معادله بسل می‌باشد جواب عمومی آن به فرم زیر است:

$$y = x^{1/2}\left[A J_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}\left(x^{b+2}\right)^{1/2}\right) + B Y_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}\left(x^{b+2}\right)^{1/2}\right)\right]$$

جواب ③: الف)

$$L\left[e^{-t}\int_0^t \frac{1-\cos x}{x^2}dx\right] = F(p) = F_1(p+1)$$

$$F_1(p) = L\left[\int_0^t \frac{1-\cos x}{x^2}dx\right] = \frac{1}{p}F_2(p) \qquad F_2(p) = L\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right]$$

می‌دانیم: $L(1-\cos x) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$ ، پس: $L\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \int_p^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right)du = \ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$

حال بار دیگر از همین خاصیت پیروی می‌کنیم یعنی:

$$L\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right] = \int_p^\infty \ln\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}du \overset{\text{جزء به جزء}}{=} p\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}p$$

پس: $F_2(p) = p\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}p \rightsquigarrow F_1(p) = \ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{Arctan}p}{p}$

$$\Rightarrow F(p) = \ln\frac{p+1}{\sqrt{(p+1)^2+1}} + \frac{\pi}{2p+2} - \frac{\operatorname{Arctan}(p+1)}{p+1}$$

ب)

※ توجه: اگر معادله مرتبه صفر بسل را بنویسیم، یعنی $xy'' + y' + xy = 0$ آن گاه با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم:

$L[xy''] + L[y'] + L[xy] = 0 \quad : \quad L[y''] = p^2 L(y) - py(0) - y'(0)$

$\circledast : L[xy''] = (-L[y''])' = \frac{d}{dp}(-L(y'')) = \frac{d}{dp}\left[-(p^2L(y) - py(0) - y'(0))\right] =$

$-2pL(y) - p^2L'(y) + y(0)$

$\circledast\circledast : L(y') = pL(y) - y(0) \qquad \circledast\circledast\circledast : L[xy] = -\frac{d}{dp}L(y) = -L'(y)$

$\Rightarrow L[xy''] + L[y'] + L[xy] = 0 \Rightarrow -2pL(y) - p^2L'(y) + y(0) + pL(y) - y(0) - L'(y) =$

$\Rightarrow (-1-p^2)L'(y) = pL(y) \Rightarrow \frac{L'(y)}{L(y)} = \frac{-p}{1+p^2} \Rightarrow \ln L(y) = \frac{-1}{2}\ln(1+p^2)$

$\Rightarrow L(y) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

پس به طور کلی داریم:

$$L[J_0(ax)] = \frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$$

حال به حل مسأله فوق می پردازیم:

$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4p+20}}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{(p-2)^2+16}}\right] =$

$= e^{2t} J_0(4x)$ ✓

جواب ④: الف)

می دانیم کانولوشن (کنولوسیون) دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که با نماد $(f*g)(t)$ نشان داده می شود، عبارتست از:

$(f*g)(t) = \int_0^t f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda$

حال برای اثبات خاصیت جابجایی کانولوشن کافی است قرار دهیم:

$t - \lambda = v \Rightarrow d\lambda = -dv$

پس: $(f*g)(t) = \int_0^t f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda = -\int_t^0 f(t-v)\, g(v)\, dv$

$=\int_0^t g(v)\,f(t-v)\,dv = (g*f)(t)$

ب) مانند الف داریم:

$$y(t)=e^{-t}+\int_0^t y''(v)(t-v)^2\,dv$$

حال از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y]=L[e^{-t}]+L\left[\int_0^t y''(v)(t-v)^2\,dv\right]$$

$$L[y]=\frac{1}{p+1}+L[y'']\frac{2!}{p^3} \to L[y]=\frac{1}{p+1}+\frac{2}{p^3}\left[p^2L[y]-p\,y(0)-y'(0)\right]$$

$$\to L[y]=\frac{1}{p+1}+\frac{2}{p}L[y]-\frac{2}{p^2}y(0)-\frac{2}{p^3}y'(0)$$

$$\frac{p-2}{p}L[y]=\frac{1}{p+1}-\frac{2y(0)}{p^2}-\frac{2y'(0)}{p^3}$$

$$\Rightarrow L[y]=\frac{p}{(p+1)(p-2)}-\frac{2y(0)}{p(p-2)}-\frac{2y'(0)}{p^2(p-2)}$$

$$L[y]=\frac{1/3}{p+1}+\frac{2/3}{p-2}+\frac{y(0)}{p}-\frac{y(0)}{p-2}+\frac{(\frac12 p+1)y'(0)}{p^2}-\frac{\frac12 y'(0)}{p-2}$$

$$\to y(t)=\frac13 e^{-t}+\frac23 e^{2t}+y(0)-y(0)e^{2t}+\frac12 y'(0)+t\,y'(0)-\frac12 y'(0)e^{2t}$$

جواب ۵:

با توجه به تبدیل لاپلاس داریم:

$$L[ty'']+L[(1-2t)y']-L[2y]=0$$

$$\to L[ty'']+L[y']-2L[ty']-2L[y]=0$$

$$L[ty'']=\frac{-d}{dp}L[y'']=-\frac{d}{dp}\left(p^2L[y]-p\,y(0)-y'(0)\right)=-2pL[y]-p^2L'[y]+y(0) \quad (*)$$

$$L[y']=pL[y]-y(0) \quad (**)$$

$$L[ty']=\frac{-d}{dp}L[y']=-\frac{d}{dp}\left(pL[y]-y(0)\right)=-L[y]-pL'(y) \quad (***)$$

$$\Rightarrow L[ty'']+L[y']-2L[ty']-2L[y]=0 \Rightarrow$$

برای راحتی کار قرار می‌دهیم: $L[y]=Y$ و $L'[y]=Y'$

شورای صنفی
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

$p Y - p^2 Y' + 1 + \dots - p^2)$

$\to \frac{Y'}{Y} = \frac{1}{2-p} \to \ln Y = \ln \frac{1}{2-p} \to Y = \frac{-1}{s-2} \to y(t) = -e^{2t}$ ✓

جواب ⑥:

$\xrightarrow{\text{از لاپلاس}} \begin{cases} L[y'] + L[x'] = L[t] \\ L[y''] - L[x] = L[e^{-t}] \end{cases} \to \begin{cases} pL[y] - \overset{3}{y(0)} + pL[x] - \overset{0}{x(0)} = \frac{1}{p} \\ p^2L[y] - p\overset{3}{y(0)} - \overset{2}{y'(0)} - L[x] = \frac{1}{p+1} \end{cases}$

دستگاه روبرو را حل می‌کنیم:

$\to \begin{cases} pL[y] + pL[x] = 3 + \frac{1}{p} \\ \times p \quad p^3L[y] - pL[x] = 3p^2 + \frac{p}{p+1} + 2p \end{cases}$

$(p + p^3) L[y] = 3p^2 + 2p + \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p} + 3 \xrightarrow{\div p}$

$(1+p^2) L[y] = 3p + 2 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p} \Rightarrow$

$L[y] = \frac{3p}{1+p^2} + \frac{2}{1+p^2} + \frac{1}{(p+1)(p^2+1)} + \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \frac{3}{p(p^2+1)} \Rightarrow$

$y(t) = 3\cos t + 2\sin t + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + t - \sin t + 3t - 3\cos t$ ✓

در حاشیه داریم:

$\frac{3}{p(1+p^2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{1+p^2} \to A + Ap^2 + Bp^2 + Cp = 3 \to A = 3,\ C = 0,\ B = -3$

$L^{-1}\left[\frac{3}{p(1+p^2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{3}{p} - \frac{3p}{1+p^2}\right] = 3t - \cos t$ و

$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} + \frac{-1}{1+p^2} \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+1)}\right] = t - \sin t$ و

$\frac{1}{(p+1)(1+p^2)} = \frac{A}{1+p} + \frac{Bp+C}{1+p^2} \to A + Ap^2 + Bp^2 + Bp + Cp + C = 1 \to A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2}$

$\to L^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)(1+p^2)}\right] = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$

نام :	به نام خدا	تاریخ : پنج شنبه ۸۸/۵/۱
نام خانوادگی :	سوالات پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
شماره دانشجویی :	دانشگاه امیر کبیر	ساعت : ۹ صبح
استاد درس : گروه ریاضی	دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	امتحان پایان ترم

۱- سه جمله اول بسط تابع زیر را بر حسب تابع لژاندر بیان کنید (۱۰ نمره) .

$$f(x)=\begin{cases}-1 \ , & -1\le x<0\\ x \ , & 0\le x\le 1\end{cases}$$

۲- نقاط تحلیلی (عادی) و منفرد منظم (غیرعادی منظم) معادله زیر را تعیین کنید. سپس به کمک سری توانی یک جواب آن معادله را به دست آورده و در آخر فقط فرم جواب دوم و عمومی آن را بنویسید (۳۰ نمره) .

$$x^2y''+3xy'+(1+x)y=0$$

۳- **الف :** با استفاده از تغییر متغیر $y=x^{-1/2}z(x)$ نشان دهید که جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر به صورت $y=x^{-1/2}(c_1\cos x+c_2\sin x)$ است (۱۰ نمره) .

$$4x^2y''+4xy'+(4x^2-1)y=0$$

ب : آیا جواب فوق به فرم دیگری می‌توان نوشت، در صورت مثبت بودن پاسخ، تساویهایی بنویسید (۵ نمره).

۴- به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید (۲۰ نمره) .

$$y''-y=\begin{cases}0 & ,\ 0\le t<1\\ t-1\ , & t\ge 1\end{cases} \ ; \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0$$

۵- مطلوب است :

الف : (۱۰ نمره) $\mathbf{L}\left\{te^{4t}\int_0^t \frac{1-\cos x}{x}\,dx\right\}$.

ب : (۱۰ نمره) $\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\ln\frac{s}{s-1}\right\}$.

۶- معادله دیفرانسیل- انتگرالی زیر را حل کنید (۱۵ نمره) .

$$y'+\sin t=1-\int_0^t y(x)dx \ \ ; \ \ y(0)=0$$

بارم ۱۱۰ نمره از کل ۱۸۰	به کمک معادلات دیفرانسیل می‌توانید رفتار سیستم های پیرامون خود را بهتر تحلیل کنید	موفق باشید

۲۸

۸۸۵,۱

پایان ترم ... دیفرانسیل

جواب ۱ :

با توجه به اینکه اگر F یک چند جمله‌ای مشخص باشد خواهیم داشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

طرفین تساوی را می‌توان در $P_m(x)$ ضرب کرده و سپس از طرفین تساوی بدست از -1 تا 1 انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx \rightsquigarrow \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx = \frac{2c_n}{c_n+1}$$

$$n = m \ : \ c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

با توجه به اینکه از فرمول رودریگس $\left(P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \right)$ می‌دانیم: $P_0(x) = 1$ ، $P_1(x) = x$ ، $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ ، $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$ ، ... داریم

$$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \dots$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^{0} (-1)\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx \right] = \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{-1}{4}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \cdot x\, dx = \frac{3}{2} \left[\int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{1} x^2\, dx \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] = \frac{5}{4}$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \left(\frac{1}{2}(3x^2-1) \right) = \frac{15}{4} \int_{-1}^{1} x^2 f(x) - \frac{5}{4} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{15}{4} \left[\int_{-1}^{0} -x^2\, dx \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{1} x^3\, dx \right] - \frac{5}{4} \left[\int_{-1}^{0} (-1)\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx \right] = \frac{15}{4} \left[\frac{-1}{12} \right] - \frac{5}{4} \left[\frac{-1}{2} \right] = \frac{5}{24}$$

$$\Longrightarrow \ f(x) = \frac{-1}{4} + \frac{5}{4} x + \frac{5}{48} (3x^2-1) + \dots$$

جواب ۲ :

$$x^2 y'' + 3x y' + (1+x) y = 0 \longrightarrow y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{1+x}{x^2} y = 0$$

$x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم (منفرد) و در بقیه نقاط عادی است.

$$\frac{3}{x} \cdot x = 3 \quad , \quad \frac{1+x}{x^2} \cdot x^2 = 1+x \Longrightarrow$$

معادله مشخصه آن :

$$r(r-1) + 3r + 1 = 0 \rightsquigarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \rightsquigarrow (r+1)^2 = 0 \rightsquigarrow r = -1$$

ریشه مضاعف

یک جواب به شکل $y_1 = x\sum_{n=0} c_n x^n$ و جواب دوم به شکل $y_2 = y_1 \ln x + x\sum_{n=1} A_n x^n$ و جواب عمومی آن به شکل

$y=\beta_1 y_1+\beta_2 y_2$ است . حال اگر $y_1=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}$ در نتیجه :

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) c_n x^{n-2} \qquad y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2) c_n x^{n-3}$$

حال برای مشخص کردن c_n ها ، مقادیر y_1 ، y_1' و y_1'' را در معادله اصلی جایگذاری می کنیم :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n (n-1) x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

ضریب x^0 : $0+0+C_1+C_0=0 \rightarrow C_1=-C_0$

ضریب x^1 : $0+3C_2+C_2+C_1=0 \rightarrow C_2=\frac{-1}{4}C_1=\frac{1}{4}C_0$

ضریب x^2 : $2C_3+6C_3+C_3+C_2=0 \rightarrow C_3=\frac{-1}{9}C_2$

$\vdots$

ضریب x^n : $(n)(n-1)C_{n+1}+3nC_{n+1}+C_{n+1}+C_n=0 \rightarrow C_{n+1}=\frac{-C_n}{n^2+2n+1}$

$$y_1 = C_0 x^{-1}+C_1+C_2 x+C_3 x^2+\dots \rightarrow y_1=C_0 x^{-1}-C_0+\frac{1}{4}C_0+\dots$$

جواب ۳ الف) :

$$y'=\frac{-1}{2}x^{-3/2}z+x^{-1/2}z' \ , \ y''=\frac{3}{4}x^{-5/2}z-x^{-3/2}z'+x^{-1/2}z''$$

پس از جایگزینی در معادله داریم :

$$3x^{-1/2}z-4x^{1/2}z'+4x^{3/2}z''-2x^{-1/2}z+4x^{1/2}z'+4x^{3/2}z-x^{-1/2}z=$$

$$4x^{3/2}(z''+z) \Rightarrow z=C_1\cos x+C_2\sin x$$

پس جواب عمومی معادله :

$$y=x^{-1/2}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

ب) :

بلی . می دانیم شکل کلی معادله بسل به صورت $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ است . حال برای معادله

$x^2y'' + xy' + (\ldots$ ... $= 0$

که بسل $\frac{1}{2}$ است. پس فرم کلی جواب به صورت $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$ است. ✓

جواب ۴:

$$y'' - y = (t-1)u_1(t) \rightarrow L[y''] - L[y] = L[(t-1)u_1(t)] \rightarrow$$

$$p^2 L[y] - p\,y(0) - y'(0) - L[y] = e^{-p}\frac{1}{p^2} \rightarrow (p^2-1)L[y] = \frac{e^{-p}}{p^2} + p$$

$$\rightarrow L[y] = \frac{e^{-p}}{p^2(p^2-1)} + \frac{p}{p^2-1} \rightarrow y = u_1(x)\sinh(x-1) + u_1(x)(x-1) + \cosh x$$

$$\frac{e^{-p}}{p^2(p^2-1)} = \frac{e^{-p}}{p^2-1} - \frac{e^{-p}}{p^2} \rightarrow L^{-1}\left[\frac{e^{-p}}{p^2(p^2-1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{e^{-p}}{p^2}\right]$$

$$= u_1(x)\sinh(x-1) + u_1(x)(x-1)$$

در حاشیه:

جواب ۵ الف):

$$F(p) = L\left[t\,e^{4t}\int_0^t \frac{1-\cos x}{x}\,dx\right] = -F_1'(p) = -\frac{d}{dp}F_1(p)$$

$$F_1(p) = L\left[e^{4t}\int_0^t \frac{1-\cos x}{x}\,dx\right] = F_2[p-4]$$

$$F_2(p) = L\left[\int_0^t \frac{1-\cos x}{x}\,dx\right] = \frac{1}{p}F_3(p)$$

$$F_3(p) = L\left[\frac{1-\cos x}{x}\right] = \int_p^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right) = \ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$$

$$\rightarrow F_2(p) = \frac{1}{p}\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p} \rightarrow F_1(p) = \frac{1}{p-4}\ln\frac{\sqrt{(p-4)^2+1}}{p-4} \rightarrow$$

$$F(p) = \frac{-d}{dp}F_1(p) = \frac{1}{(p-4)^2}\ln\frac{\sqrt{(p-4)^2+1}}{p} - \frac{1}{p-4} + \frac{\frac{d}{dp}\sqrt{(p-4)^2+1}}{\sqrt{(p-4)^2+1}} - \frac{1}{p-4} \quad ✓$$

ب):

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = \int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx$$

$F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}$; $L\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_s^{\infty} F(u)\,du \rightarrow \frac{f(x)}{x}=L^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(u)\,du\right]$

$\rightarrow f(x)=x\,L^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(u)\,du\right]$ $\quad F(u)=\frac{u}{(u^2+1)^2}$ $\quad \int_s^{\infty} F(u)\,du=\int_s^{\infty}\frac{u}{(u^2+1)^2}\,du$

$=\frac{-1}{2}\frac{1}{1+u^2}\Big]_s^{\infty}=\frac{-1}{2}\left[\frac{-1}{s^2+1}\right] \Rightarrow f(x)=x\,L^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x\cdot\sin x$

$G(s)=\ln\frac{s}{s-1}$; $L[-x f(x)]=\frac{d}{ds}F(s) \rightarrow -x f(x)=L^{-1}\left[\frac{d}{ds}F(s)\right]$

$\rightarrow f(x)=\frac{-1}{x}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}F(s)\right] \rightarrow \frac{d}{ds}G(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}$,

$L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right]=1-e^{t} \rightarrow g(t)=\frac{e^{t}-1}{t}$

$\Rightarrow L^{-1}[F(s)\,G(s)]=\frac{1}{2}\int_0^{t}(x\cdot\sin x)\,\frac{e^{t-x}-1}{t-x}\,dx$ ✓

جواب ⓓ:

$L[y']+L[\sin t]=L(1)-L\left[\int_0^{t} y(x)\,dx\right] \rightarrow$

$p\,L[y]-\cancel{y(0)}^{\,0}+\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}L[y] \xrightarrow{\times p}$

$p^2L[y]+\frac{p}{p^2+1}=1-L[y]$, $(p^2+1)\,L[y]=1-\frac{p}{p^2+1} \rightarrow$

$L[y]=\frac{1}{(p^2+1)}-\frac{p}{(p^2+1)^2}$, $L[\sin t]=\frac{1}{1+p^2}$

می‌دانیم $L[x f(x)]=-F'(p)$ پس داریم:

$L[x f(x)]=\frac{-d}{dp}\left(\frac{\frac{1}{2}}{p^2+1}\right)=L\left[\frac{1}{2}\sin t\right]$

$\rightarrow y(t)=\sin t+\frac{1}{2}\,t\sin t$ ✓

331	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل نیمسال اول ۸۸-۸۷ (۸۷/۱۱/۲)	وقت ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجوئی:	گروه:

۱	اگر $y_1 = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{(2!)(3!)}x^3 + \frac{1}{(3!)(4!)}x^4 + \cdots$ یک جواب معادله $xy'' - y = 0$ باشد، جواب دوم آن‌را بیابید و سپس فقط فرم جواب عمومی آن‌را بنوسید.	۲۵
۲	با استفاده از تغییر متغیر $z = 3\sqrt{x}$ و $u(z) = z^4 y(\frac{z^2}{9})$ معادله زیر را حل کنید $$4x^2y'' + 20xy' + (9x+7)y = 0$$	۲۵
۳	معادله زیر را حل کنید $$y'' + 4y = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3, \\ t, & t \ge 3, \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$	۲۰
۴	مطلوب است محاسبه الف) $L\left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right]$ (۷ نمره) ب) $\int_0^\infty \frac{e^{-4t} - e^{-8t}}{t} dt$ (۳ نمره) ج) $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cot^{-1}(s+1)\right]$ (۱۰ نمره)	۲۰
۵	با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید $$y'' + 2ty' - 4y = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$	۲۰

موفق باشید

۸۷/۱۱/۲

پایان ترم معادلات دیفرانسیل

جواب ①:

ابتدا معادله مشخصه را می‌یابیم: $y'' - \frac{1}{x}y = 0$ $\quad r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$\lim_{x\to 0} (\frac{-1}{x})x^2 = 0 = q_0 \rightarrow r(r-1) = 0 \rightarrow r_1 = 1 , r_2 = 0 \quad r_1 - r_2 \in N$

پس داریم: $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} , \quad y_2 = c y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$y_2' = c y_1' \ln x + c y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$

$y_2'' = c y_1'' \ln x + 2c y_1' \frac{1}{x} - c y_1 \frac{1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n . n . (n-1) x^{n-2}$

حال متغیرها را در معادله جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$c\, y_1'' . x . \ln x + 2c y_1' - c y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} n . b_n . (n-1) . x^{n-1} - c y_1 \ln x - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n =$

$c \ln x (\underbrace{x y_1'' - y_1}_{=0}) + 2c y_1' - c y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$

$2c y_1' - c y_1 \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c x^n}{(n!)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c x^n}{n! (n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c x^n}{(n!)^2} (2 - \frac{1}{n+1})$

$\Rightarrow c - b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c}{(n!)^2} (2 - \frac{1}{n+1}) + n(n+1) b_{n+1} - b_n \right] x^n = 0$

حال دنباله ضرایب را می‌یابیم: $b_0 = c , \quad \frac{b_0}{(n!)^2}(2 - \frac{1}{n+1}) + n(n+1) b_{n+1} - b_n = 0$

پس جواب عمومی معادله به صورت $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + c_2 (c y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$ است.

جواب ②:

$y = z^{-4} u(z) , \quad x = \frac{z^2}{9}$

$y' = -4 z^{-5} u z' + z^{-4} u'(z) z'$

$$y'' = 20 z^{-6} u(z') - 4 z^{-5} u'(z') - 4 z^{-5} u z'' - 4 z^{-5} u(z) + z u''(z')^{2} + z^{-4} u' z''$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2z}{9} \rightsquigarrow z' = \frac{9}{2z} \quad , \quad z' = \frac{3}{2} x^{-1/2}$$

$$z'' = -\frac{3}{4} x^{-3/2} = -\frac{3}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^{-3}$$

در معادله اصلی، پس از جایگذاری متغیرها، باید معادله به صورت $F(u'', u', u, z) = 0$ درآید. یعنی z' و z'' را برحسب z می‌نویسیم. پس از جایگذاری در معادله داریم:

$$\frac{4}{81} u''(z')^2 + \frac{4}{81} u' z'' + \frac{4}{81} u'(z')^2(-4z^{-1}) + \frac{4}{81} u'(-4z^{-1})(z')^2 + \frac{4}{81} u(20 z^{-2})(z')^2$$

$$+ \frac{4}{81} u(-4z^{-1}) z'' + \frac{20}{9} u' z' z^{-2} + \frac{20}{9} u(-4z^{-3}) z' + u z^{-2} + 7 u z^{-4} =$$

$$u'' + u' z^{-1} - 9 u z^{-2} + u) z^{-2} = 0 \xrightarrow{\times z^{4}} z^2 u'' + z u' + (z^2 - 9) u = 0$$ بسل مرتبه 3

$$u(z) = c_1 J_3(z) + c_2 Y_3(z) \quad , \quad z = 3\sqrt{x} \rightsquigarrow$$

$$81 x^2 y(x) = c_1 J_3(3\sqrt{x}) + c_2 Y_3(3\sqrt{x}) \rightsquigarrow$$

$$y(x) = \frac{c_1}{81} x^{-2} J_3(3\sqrt{x}) + \frac{c_2}{81} x^{-2} Y_3(3\sqrt{x}) \quad ✓$$

جواب ③:

$$y'' + 4y = t\, H(t-3) = t\, u(t-3)$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} s^2 L[y] - s y(0) - y'(0) + 4L[y] = \frac{-d}{ds}\left(\frac{e^{-3s}}{s}\right)$$

$$(s^2+4) L[y] = \left(\frac{3s+1}{s^2}\right) e^{-3s} \rightarrow L(y) = \frac{3s+1}{s^2(s^2+4)} e^{-3s}$$

می‌دانیم که:
$$L[u(t-a) f(t-a)] = e^{-as} L[f(t)]$$

$$Y(s) = \left(\frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4}\right) e^{-3s} \Rightarrow$$

$\Rightarrow L^{-1}[\ldots \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ldots-\frac{1}{4}\cos\ldots-\frac{1}{8}\ldots]$

$u(t-3)\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(t-3)-\frac{3}{4}\cos 2(t-3)-\frac{1}{8}\sin 2(t-3)\right]$ ✓

جواب ④ الف) :

می دانیم $L\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_p^\infty F(u)\,du$ پس داریم :

$$L\left[\frac{1}{t}(e^{-at}-e^{-bt})\right]=\int_p^\infty\left(\frac{1}{u+a}-\frac{1}{u+b}\right)du=\ln\frac{u+a}{u+b}\Big]_p^\infty=\ln\frac{p+b}{p+a}$$ ✓

ب) :

می دانیم نتیجه فرمول $L\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_p^\infty F(u)\,du$ به صورت $\int_0^\infty\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^\infty F(p)\,dp$ است.

پس داریم :

$$\int_0^\infty\frac{e^{-4t}-e^{-8t}}{t}dt=\int_0^\infty\left(\frac{1}{p+4}-\frac{1}{p+8}\right)dp=\ln\frac{p+4}{p+8}\Big]_0^\infty$$

$$=\ln\frac{8}{4}=\ln 2$$ ✓

ج) :

با توجه به کانولوشن داریم: $\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=L^{-1}[F(s)G(s)]=\int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$

پس داریم : $G(s)=\cot^{-1}(s+1)$, $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$. در نتیجه :

$f(t)=\cos t$ $\qquad L[-xf(x)]=\frac{d}{dp}F(p)\rightsquigarrow f(x)=\frac{-1}{x}L^{-1}\left[\frac{d}{dp}F(p)\right]$

$$g(t)=\frac{-1}{t}L^{-1}\left[\frac{-1}{1+(s+1)^2}\right]=\frac{1}{t}e^{-t}\sin t$$

$$\Rightarrow L^{-1}[F(s)G(s)]=\int_0^t\cos(t-x)\frac{e^{-x}\sin x}{x}dx$$ ✓

جواب ⑤ :

$$s^2Y-s\cancel{y(0)}^{0}-y'(0)^{0}-2\frac{d}{ds}(sY-\cancel{y(0)}^{0})-4Y=\frac{1}{s}$$

$$\to s^2 Y - 6Y - 2sY = \frac{1}{s} \Rightarrow Y - \left(\frac{s-6}{2s}\right) Y = \frac{-1}{2s^2} \to$$

$$y(s) = e^{\int \frac{s^2-6}{2s} ds} \left[\int e^{\int \frac{-s^2+6}{2s} ds} \frac{-1}{2s^2} ds \right] = \frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3} \left[\int \frac{-s}{2} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \right]$$

$$= \frac{1}{s^3} = L\left[\frac{1}{2} t^2\right] \to y(t) = \frac{t^2}{2} \checkmark$$

پایان ترم معادلات دیفرانسیل(۸۶/۴/۱۲)

وقت ۱۲۰ دقیقه

۱	معادله دیفرانسیل $xy''+(1+x)y'-y=0$ را درنظر بگیرید. الف) جواب عمومی، به صورت سری، حول $x_0=1$ را بیابید (۱۲ نمره) ب) $\boxed{\text{فقط}}$ فرم جواب عمومی، به صورت سری، حول $x_0=0$ را بیابید (۱۰ نمره).
۲	با استفاده از تغییر متغیر $x=t^3$ معادله $9x^2y''+9xy'+x^{2/3}y=0$ را حل کنید. (۱۵ نمره)
۳	تبدیل لاپلاس زیر را محاسبه کنید (۱۸ نمره) $$xe^{2x}\int_0^x t^{1/2}\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,dt$$
۴	تبدیلات زیر را محاسبه کنید الف) $\mathcal{L}\Big(\lvert\sin x\rvert\Big)=?$ (۱۰ نمره) ب) اگر $F(s)=\mathrm{L}\left[\sin(\sqrt{t})\right]$ با توجه به راهنمائی زیر $F(s)$ را بیابید (۱۵ نمره) راهنمایی: تابع $\sin(\sqrt{t})$ یک جواب خصوصی $4ty''(t)+2y'(t)+y(t)=0$ می‌باشد و $F(1)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1/4}$
۵	مطلوب است حل معادله انتگرالی زیر(۱۰ نمره) $$y(t)=\sin(t)-\int_0^t \cos x\,y'(t-x)dx,\quad y(0)=0$$
۶	معادله $\begin{cases}2y''+y'+2y=g(x)\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$ را حل کنید به طوری که $g(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<5\\ 1, & 5\le x\le 20\\ 0, & x>20\end{cases}$ (۲۰ نمره)

موفق باشید

جواب ۱ : الف)

$$xy'' + (1+x)y' - y = 0$$

$$X = x-1 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (X+1)\frac{d^2y}{dX^2} + (X+2)\frac{dy}{dX} - y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \; ; \; y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n X^{n-1} \; ; \; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n X^{n-2}$$

$$(X+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n X^{n-2} + (X+2)\sum_{n=1}^{\infty} n c_n X^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n X^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n X^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n X^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n X^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1} X^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} X^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)c_{n+1} X^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n = 0$$

$$2c_2 + 2c_1 - c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n+1)c_{n+1} + (n+1)(n+2)c_{n+2} + nc_n + 2(n+1) - c_n\right] X^n = 0$$

$$c_0 = 2(c_1 + c_2) \longrightarrow c_2 = \tfrac{1}{2}c_0 - c_1$$

$$n=1: \quad 2c_2 + 6c_3 + c_1 + 4c_1 - c_1 = 0 \longrightarrow c_1 = -c_3$$

$$n=2: \quad 6c_3 + 12c_4 + 2c_2 + 6c_3 - c_1 = 0 \longrightarrow c_4 = \frac{11}{12}c_2$$

$$n=3: \quad 12c_4 + 20c_5 + 3c_3 + 8c_4 - c_3 = 0 \longrightarrow c_5 = \frac{-61}{3}c_1$$

$$\to y = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 - c_2(x-1)^3 + \frac{11}{12}c_2(x-1)^4 - \frac{61}{3}c_1(x-1)^5 + \cdots$$

ب) :

$$y'' + \frac{1+x}{x}y' - \frac{1}{x}y = 0 \qquad x\cdot\frac{1+x}{x} = 1+x \; , \; x^2\cdot\frac{-1}{x} = -x$$

پس $x=0$ نقطه غیرعادی منظم است. معادله شاخص : $r(r-1)+r=0 \to r^2=0 \to r=0$ مضاعف

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \; , \; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} + (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0} c_n x^n = 0 \rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \rightarrow$$

$$c_1 - c_0 = 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)c_{n+1} + (n+1)c_{n+1} + nc_n - c_n] x^n = 0$$

$$n=1 : 6c_2 + 2c_2 + c_1 - c_1 = 0 \rightarrow c_2 = 0 \qquad (n+1)^2 c_{n+1} = (1-n)c_n \rightarrow$$

$$c_{n+1} = \frac{1-n}{(n+1)^2} c_n \rightarrow \quad c_3 = c_4 = \dots = 0$$

$$y = c_0 + c_1 x = c_0 + c_0 x \checkmark$$

جواب ②:

$$x = t^3 \rightarrow t = \sqrt[3]{x} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{3t^2} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3t^2} \cdot \frac{dy}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3t^2}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{3t^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$\frac{-2}{9t^5} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{9t^4} \frac{d^2y}{dt^2}$$

جایگذاری در معادله:

$$9t^6 \left[\frac{-2}{9t^5} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{9t^4} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right] + 9t^3 \frac{1}{3t^2} \frac{dy}{dt} + t^3 y = 0$$

$$-2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + t^3 y = 0 \rightarrow \qquad t\frac{d^2y}{dt} + \frac{dy}{dt} + ty = 0 \rightarrow$$

$$L\left[t\frac{d^2y}{dt^2}\right] = -\frac{d}{ds}\left(s^2 Y + sy(0) + y'(0)\right) \rightarrow L[ty] = \frac{-d}{ds}(Y)$$

$$-2sY - s^2 Y' - y(0) + sY + y(0) - Y' = 0 \rightarrow \frac{Y'}{Y} = \frac{-2s}{s^2+1}$$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{-2s}{s^2+1} ds \rightarrow \quad \underline{\ln Y = -\int \frac{du}{u} = -\ln u} = \ln u^{-1} = \ln(s^2+1)^{-1}$$

$\to Y = C(s^2+1) \quad \to y = L^{-1}\left[\frac{\;}{s^2+1}\right] = C\sin x \to y(\frac{\pi}{2}) = C\sin(\frac{\pi}{2})$

جواب ۳ :

$$F(p) = L\left[x e^{2x}\int_0^x t^{1/2}\,\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,dt\right] = -\frac{d}{dp}F_1(p)$$

$$F_1(p) = L\left[e^{2x}\int_0^x t^{1/2}\,\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,dt\right] = F_2(p-2)$$

$$F_2(p) = L\left[\int_0^x \underbrace{t^{1/2}}_{f(t)}\,\underbrace{\frac{\sin(x-t)}{x-t}}_{g(t)}\,dt\right] \overset{\text{ضرب کانولوشن}}{=\!=} F(p)\,G(p)$$

$$F(p) = L(x^{1/2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{3/2}} \quad , \quad G(p) = L\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_p^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} p$$

$$\to F_2(p) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} p\right) \to$$

$$F_1(p) = \frac{\Gamma(3/2)}{(p-2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(p-2)\right) \to$$

$$F(p) = \frac{-d}{dp}F_1(p) \Rightarrow F(p) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(p-2)^{-5/2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(p-2)\right) + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(p-2)^{3/2}} \times \frac{1}{1+(p-2)^2} \checkmark$$

جواب ۴ الف) :

$|\sin x|$ یک تابع متناوب با دوره تناوب π است .

$$L(|\sin x|) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt$$

$$\int e^{-st}\sin t\,dt = \frac{1}{1+\frac{1}{s^2}}\left[\frac{-1}{s}\sin t\, e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\cos t\right]$$

$$L[|\sin x|] = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{s^2}}\left(\frac{1}{s}e^{-s\pi} + \frac{1}{s^2}\right)\right] = \frac{s}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}\left[e^{-s\pi} + \frac{1}{s}\right]$$

ب) :

$$L(t y''(t)) = \frac{-d}{ds}L(y''(t)) = \frac{-d}{ds}\left[s^2 Y + sY(0) + y'(0)\right] =$$

$-2sY - s^2 Y' - y(0) \rightarrow$ $\quad (Y = L[y])$

$4[-2sY - s^2 Y' - y(0)] + 2[sY + y(0)] + Y = 0 \rightarrow$

$-4s^2 Y' + (-6s+1)Y = 0 \rightarrow \frac{dY}{Y} = \frac{1-6s}{4s^2} ds \rightarrow \ln Y = \frac{-1}{4s} - \frac{6}{4} \ln s$

$\rightarrow Y = c e^{-\frac{1}{4s}} . s^{-3/2} \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-1/4} = F(1) = c e^{-1/4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

پس: $\checkmark \; Y = F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-1/4s} . s^{-3/2}$

جواب ۵:

از طرفین لاپلاس می‌گیریم و به کمک فرمول کانولوشن داریم:

$Y = \frac{1}{s^2+1} - [sY . \frac{s}{s^2+1}]$

$Y(s^2+1) = 1 - s^2 Y \rightarrow Y = \frac{1}{1+2s^2} = \frac{1}{2(\frac{1}{2}+s^2)} \rightarrow f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \checkmark$

جواب ۶:

$2y'' + y' + 2y = g(x) = u_5(x) - u_{20}(x)$

از تبدیل لاپلاس:

$2p^2 L[y] - 2p\cancel{y(0)} - \cancel{2y'(0)} + pL[y] - y(0) + 2L[y] = \frac{e^{-5p}}{p} - \frac{e^{-20p}}{p}$

$(2p^2+p+2)L[y] = \frac{e^{-5p}}{p} - \frac{e^{-20p}}{p} \rightarrow L[y] = \frac{e^{-5p} - e^{-20p}}{p(2p^2+p+2)} \rightarrow$

$y(x) = \frac{1}{2} L^{-1} \left[\frac{e^{-5p} - e^{-20p}}{p[(p+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}]} \right]$

حال با توجه به کانولوشن داریم:

$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\frac{15}{16}}\right] = \frac{4}{\sqrt{15}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t$

$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1/4)^2+\frac{15}{16}}\right] = e^{-1/4 t} \frac{4}{\sqrt{15}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t$

$L^{-1}\left[\frac{1}{s} \times \frac{1}{(s+1/4)^2+\frac{15}{16}}\right] = \int_0^t e^{-1/4 u} \frac{4}{\sqrt{15}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} u \, du =$

$\frac{4}{\sqrt{15}} \left[\frac{e^{-1/4 u}}{\frac{1}{16}+\frac{15}{16}} \left(\frac{-1}{4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} u - \frac{\sqrt{15}}{4} \cos \frac{\sqrt{15}}{4} u \right) \Big|_0^t \right] =$

$\frac{4}{\sqrt{15}} \left[e^{-1/4 t} \left(\frac{-1}{4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t - \frac{\sqrt{15}}{4} \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t \right) + \frac{\sqrt{15}}{4} \right] = e^{-1/4 t} \left(\frac{-1}{\sqrt{15}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t - \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t \right.$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

نیمسال دوم ۸۶–۸۵ (۴ بهمن ۸۵)

وقت: ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجویی:	گروه:

۱) الف) تابع بسل نوع دوم از مرتبه صفر را به دست آورید. ($Y_0(x) = ?$) — ۳۰

ب) فقط فرم کلی تابع بسل نوع دوم از مرتبه یک را بنویسید.

۲) الف) نشان دهید $\frac{d}{dx}[J_0(x)] = -J_1(x)$ — ۲۵

ب) اگر $\mathcal{L}[J_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ آن‌گاه مطلوب است محاسبه لاپلاس $J_1(ax)$.

۳) معادله زیر را حل کنید — ۳۰

$$\begin{cases} 2y'(t) = -y(t) + e^t - \int_0^t e^{t-x} y'(x)dx \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

مطلوب است — ۳۵

الف) $\mathcal{L}\left[e^{x-|x|}\right] = ?$

ب) $\mathcal{L}\left[e^{4t}\int_0^t \frac{1}{x} e^{-4x}\sin(3x)dx\right]$

ج) $L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{(s-1)^4-16}\right] = ?$

د) $\mathcal{L}\left[\sin(\sqrt{t})\right] = ?$

موفق باشید

۸۵/۱۱/۴

پایان ترم معادلات دیفرانسیل

حل ① الف) هر معادله دیفرانسیل بفرم $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ که در آن ν (۱) عددی داده شده است، یک معادله بسل نامیده می‌شود.

$$y_2(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^m \qquad y_2'(x)=J_0'(x)\ln x+\frac{1}{x}J_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}m a_m x^{m-1}$$

$$y_2''(x)=J_0''(x)\ln x+\frac{2}{x}J_0'(x)-\frac{1}{x^2}J_0(x)+\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-2}$$

با جایگذاری در معادله $xy''+y'+xy=0$ داریم:

$$xJ_0''(x)\ln x+2J_0'(x)+J_0'(x)\ln x+xJ_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}m^2a_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^{m+1}=0$$

و از طرفی: $\ln x\,(xJ_0''(x)+J_0'(x)+xJ_0(x))=0$

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m} \qquad J_0'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}m!\,(m-1)!}x^{2m-1}$$

پس:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-2}m!\,(m-1)!}x^{2m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}m^2a_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^{m+1}=0$$

درنتیجه:

ضریب x^{2n}

$$a_1=0 \qquad -1+4a_2=0\rightarrow a_2=\frac{1}{4} \qquad \dots \qquad (2n+1)^2a_{2n+1}+a_{2n-1}=0$$

$$a_1=0\Rightarrow a_3=0,\ a_5=0,\ \dots,\ a_{2n+1}=0$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n+1)!\,n!}+(2n+2)^2a_{2n+2}+a_{2n}=0 \qquad \text{ضریب } x^{2n+1}:$$

$$n=1:\quad \frac{1}{4\times 2}+16a_4+a_2=0\ ,\qquad a_4=\frac{-3}{128}$$

$$a_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n!)^2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)}_{h_n}$$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1} \frac{(-1)^{m-1} L_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}$$

حال ترکیب خطی $a\left(y_2(x) + bJ_0(x)\right)$ بازای $a=\frac{2}{\pi}$ و $b=\gamma-\ln 2$ که γ ثابت اویلر است تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر است. یعنی:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} L_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right] \checkmark$$

ب)

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_1(x) - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{L_m+L_{m+1}}{m!\,(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$$

$$L_0=0,\quad L_p = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p} \quad ; \; p=1,2,\ldots$$

جواب ۲: الف)

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}$$

$$\frac{d}{dx}J_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(m+1)(-1)^{m+1}}{2^{2(m+1)}\left((m+1)!\right)^2} x^{2(m+1)-1}$$

$$= (-1)x\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\,m!\,(m+1)!} x^{2m} = -J_1(x) \checkmark$$

ب)

$$L\left(J_1(ax)\right) = L\left(-\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(J_0(ax)\right)\right) = \frac{-1}{a}L\left(\frac{d}{dx}\left(J_0(ax)\right)\right) =$$

$$\frac{-1}{a}\left[sL\left(J_0(ax)\right) - \underbrace{J_0(0)}_{0}\right] = \frac{-s}{a}\cdot\frac{1}{a}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1}} \checkmark$$

$$\left(L\left(f(bt)\right) = \frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right) \quad : \; L\left(f(t)\right) = F(s)\right)$$

جواب ۳:

از طرفین لاپلاس می‌گیریم. با توجه به اینکه انتگرال فوق کانولوشن e^x و $y(x)$ می‌باشد داریم:

$$2sY - 2 = 2sY - 2y(0) = -Y + \frac{1}{s-1} - (sY - 1)\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$$Y\left[2s + 1 + \frac{s}{s-1}\right] = 2\left[1 + \frac{1}{s-1}\right]$$

$$Y = L[y]$$

$$Y = \frac{2s}{(2s+1)(s-1)+s} = \frac{2s}{2s^2-1} = \frac{s}{s^2-\frac{1}{2}}$$

$$y(t) = \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \checkmark$$

جواب ④: الف)

$$L\left(e^{x-[x]}\right) = \int_0^\infty e^{-st} e^{t-[t]}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{(1-s)t}}{e^{[t]}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{e^{(1-s)t}}{e^n}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\int_n^{n+1} e^{(1-s)t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\,\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\Bigg]_{t=n}^{t=n+1} =$$

$$\frac{1}{1-s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\left[e^{n+1-ns-s} - e^{n-ns}\right] = \frac{1}{1-s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{1-ns-s} - e^{-ns}\right) =$$

$$\frac{1}{1-s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns}\left(e^{1-s} - 1\right) = \frac{e^{1-s}-1}{1-s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} = \frac{e^{1-s}-1}{1-s}\cdot\frac{1}{1-e^{-s}} \checkmark$$

ب)

$$L\left(\frac{1}{x}e^{-4x}\sin 3x\right) = ? \qquad L\left(\frac{1}{x}\sin 3x\right) = \int_s^\infty \frac{3}{t^2+9}\,dt = \tan^{-1}\frac{t}{3}\Bigg]_s^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{3} \qquad L(\sin 3x) = \frac{3}{s^2+9}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = 3$$

$$L\left(\frac{1}{x}e^{-4x}\sin 3x\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s+4}{3}$$

$$L\left(\int_0^t \frac{1}{x}e^{-4x}\sin 3x\,dx\right) = \frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s+4}{3}\right]$$

$$L\left(e^{4t}\int_0^t \frac{1}{x}e^{-4x}\sin 3x\,dx\right) = \frac{1}{s-4}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{3}\right) \checkmark$$

ج)

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^4-16}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-4)(s^2+4)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{8}}{s^2-4} + \frac{-\frac{1}{8}}{s^2+4}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{8}}{s^2-4}\right] + L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{8}}{s^2+4}\right] = \frac{1}{16}\left[\sinh 2t - \sin 2t\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^4-16}\right] = e^{t}\,\frac{1}{16}\left[\sinh 2t - \sin 2t\right]$$

$$L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{(s-1)^4-16}\right] = u_\pi(t)\, e^{t-\pi}\,\frac{1}{16}\left[\sinh 2(t-\pi) - \sin 2(t-\pi)\right]$$

که:

$$u_\pi(t) = \begin{cases} 0 & t<\pi \\ 1 & t>\pi \end{cases}$$

(د

می‌دانیم تابع $\sin(\sqrt{t})$ یک جواب خصوصی معادله $4ty'' + 2y' + y = 0$ می‌باشد و $F(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1/4}$. از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$L(ty''(t)) = \frac{-d}{ds}L(y''(t)) = \frac{-d}{ds}\left[s^2Y + sY(0) + Y'(0)\right] =$$

$$-2sY - s^2Y' - y(0)$$

$$4\left[-2sY - s^2Y' - y(\overset{0}{0})\right] + 2\left[sY + \cancel{y(0)}\right] + Y = 0$$

$$-4s^2Y' + (-6s+1)Y = 0$$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{1-6s}{4s^2}\,ds \rightarrow \ln Y = \frac{-1}{4s} - \frac{6}{4}\ln s \rightarrow$$

$$Y = C e^{\frac{-1}{4s}} \cdot s^{-3/2}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1/4} = F(1) = Ce^{-1/4} \Rightarrow C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

پس: $$Y = F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1/4s}\,s^{-3/2}$$ ✓

« به نام خدا »

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : مدت : ۱۲۰ دقیقه (۸۹/۴/۱)

نام استاد:

۱- تابع زیر را در نظر بگیرید: (۲۰ نمره)

$$f(x) = ۲x^۳ + ۲x^۲ + ۱$$

این تابع را بر حسب چند جمله‌ای لژاندار بنویسید و سپس انتگرال زیر را بر حسب مقادیر مختلف n محاسبه نمایید:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx$$

۲- (الف) نشان دهید $x = ۰$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله زیر است:

$$۴x^۲ y'' - ۸x^۲ y' + (۴x^۲ + ۱) y = ۰$$

(ب) در همسایگی $x = ۰$ جواب عمومی معادله را به دست آورید. (۲۵ نمره)

۳- (الف) معادله دیفرانسیل-انتگرال زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل نمایید. (۱۵ نمره)

$$y'(x) + ۲y(x) + \int_0^x y(t)\,dt = ۰,\ y(۰) = ۱$$

(ب) مطلوبست محاسبه $L^{-۱}\left(\dfrac{(s+۱)e^{-\pi s}}{s^۲ + s + ۱}\right)$ (۱۰ نمره)

۴- اگر $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-۱} e^{-x}\,dx$ برای $x > ۰$ مقدار $\Gamma'(۱)$ را محاسبه نمایید و سپس نشان دهید

$$L\big(Ln(t)\big) = \frac{\Gamma'(۱) - Ln(s)}{s}$$

۵- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \\ x'_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

(موفق باشید)

* خلاصه و گزیده‌ای از نکات معادلات دیفرانسیل

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری‌ها؛ "مقدمه‌ای بر سری‌های توانی"

اگر $\{a_n\}$ دنباله دلخواهی از اعداد حقیقی یا مختلط باشد، به سری $\sum a_n (x-x_0)^n$ یک سری توانی حول (به مرکز) x_0 گفته می‌شود.

شعاع همگرایی سری‌های توانی: عدد مثبت $R>0$ را شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ می‌نامند در صورتی‌که برای x هایی که $|x-x_0|<R$ باشند، سری همگرا و برای x هایی که $|x-x_0|>R$ باشند، سری واگرا شود.

برای یافتن شعاع همگرایی $\sum a_n (x-x_0)^n$: $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ یا $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

سری تیلور و مک‌لورن تابع $f(x)$: اگر تابع $f(x)$ دارای مشتقات تا هر مرتبه دلخواه در نقطه x_0 باشد، سری زیر را سری تیلور تابع f در نقطه x_0 نامند:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

اگر $x_0 = 0$ باشد، سری فوق را سری مک‌لورن تابع $f(x)$ می‌نامند.

تعریف: اگر سری تیلور تابع $f(x)$ حول x_0 در یک همسایگی آن یعنی مجموعه $|x-x_0|<R$ به تابع f همگرا باشد، f را در x_0 تحلیلی می‌نامند.

نکته: توابع چندجمله‌ای، $\sin x$، $\cos x$ و e^x در هر نقطه دلخواه تحلیلی و دارای شعاع همگرایی $R=\infty$ است.

نکته: توابع $\frac{1}{x+1}$، $\ln(1+x)$ و $\tan^{-1}(x)$ در $x=0$ تحلیلی و دارای شعاع همگرایی $R=1$ است.

نکته: اگر توابع f و g در x_0 تحلیلی باشند، توابع $f\pm g$ و $f.g$ نیز تحلیلی‌اند. f/g در صورتی‌که $g(x_0)\neq 0$ باشد، در x_0 تحلیلی است.

∴ حل معادله دیفرانسیل حول نقطه عادی: نقطه $x=x_0$ را برای معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ نقطه عادی می‌نامیم هرگاه توابع $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ در x_0 تحلیلی باشند.

∴ قضیه: در صورتی‌که x_0 نقطه عادی معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ باشد، در این صورت معادله دارای دو جواب مستقل خطی به شکل سری توانی حول x_0 یعنی $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ است.

روش بدست آوردن جواب معادله در نقطه عادی: جواب معادله بصورت $y=\sum_{n=0} a_n(x-x_0)^n$ است بنابراین

$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ برای بدست آوردن a_n بایستی y را در معادله صدق دهیم:

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

حال y' و y'' را در معادله صدق می‌دهیم و طرفین تساوی را با یکدیگر هم ارز قرار می‌دهیم تا رابطه بازگشتی برای a_n بدست آوریم.

نکته مهم: اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ جواب مسأله مقدار اولیه باشد، ضرایب a_n از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \Rightarrow a_0=y(x_0) \quad , \quad a_1=y'(x_0),\dots$$ (روش مشتقات متوالی (روش لیبنیتز - مک لورن))

مثال طلایی: چهار جمله اول سری جواب معادله $y''+(y')^2=e^x y^3$ با شرایط اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=2$ چیست؟

$$\left. y(0)=a_0=1 \right] \qquad \left. a_1=y'(0)=2 \right] \qquad \left. a_2=\frac{y''(0)}{2!}=\frac{?}{2}=\frac{-3}{2} \right]$$

$$x=0 \Rightarrow y''(0)+[y'(0)]^2=[y(0)]^3 \rightarrow y''(0)=-3$$

مشتق از معادله

$$\xrightarrow{} y'''+2y'y''=e^x\left[y^3+3y'y^2\right] \qquad \left. a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{19}{6} \right]$$

$$x=0 \Rightarrow y'''(0)+2[y'(0)\times y''(0)]=y^3(0)+3y(0)\times y'(0) \rightarrow y'''(0)=19$$

$$y=1+2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{6}x^3+\dots$$

حل معادله دیفرانسیل حول نقطه منفرد منتظم: - تعیین منفرد (تکین - غیرعادی) یا عادی بودن نقطه x_0:

در معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$، اگر حداقل یکی از توابع $p(x)$ و یا $q(x)$ در نقطه $x=x_0$ تحلیلی نباشند، این نقطه (x_0) را نقطه منفرد (تکین یا غیرعادی) می‌نامند. هرگاه $x=x_0$ یک نقطه منفرد باشد و هر دو حد زیر موجود باشند (متناهی باشند) نقطه x_0 را منفرد منتظم می‌نامند. اما در صورتیکه حتی یکی از دو حد زیر موجود نباشد (نامتناهی باشد) نقطه x_0 را منفرد نامنتظم می‌نامند.

$$p_0=\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)p(x)\right] \qquad q_0=\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)^2 q(x)\right]$$

به عبارت دیگر در صورتی که معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را به فرم $y'' + \frac{g(x)}{(x-a)}y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2}y = 0$ بنویسیم به شرط اینکه $g(x)$ و $h(x)$ هر دو در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند، $x=a$ را نقطه منفرد منظم و اگر حداقل یکی از توابع g یا h غیر تحلیلی باشند، $x=a$ را منفرد نامنظم نامیم.

روش تعمیم یافته فروبنیوسی برای حل معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم:

اگر $x=x_0$ نقطه تکین منظم معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد هر دو حد

$$x \to x_0 \begin{cases} p_0 = \lim (x-x_0)\,p(x) \\ q_0 = \lim (x-x_0)^2\,q(x) \end{cases}$$

موجود باشند، در این صورت معادله حداقل دارای یک جواب به فرم $y = (x-x_0)^r \sum a_n (x-x_0)^n$ خواهد بود که در آن r عددی مخالف صفر است. سری فوق را سری تعمیم یافته یا فروبنیوسی می‌نامند.

معادله مشخصه معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ به صورت $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$ است.

اگر r_1 و r_2 جواب‌های معادله مشخصه فوق باشند، بسته به حالات زیر می‌توان جواب معادله دیفرانسیل را مشخص نمود:

الف) اگر $r_2 \neq r_1$ باشند تفاضل آن‌ها نیز عدد صحیح نباشد:

$$\text{جواب عمومی: } y = Ay_1 + By_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2 = (x-x_0)^{r_2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \end{cases} \xrightarrow{\text{برای } x_0=0} \begin{cases} y_1 = x^{r_1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y_2 = x^{r_2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$

ب) معادله مشخصه دارای دو ریشه تکراری $r = r_1 = r_2$ باشد:

$$\begin{cases} y_1 = (x-x_0)^r \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2 = y_1 \operatorname{Ln}|x-x_0| + (x-x_0)^r \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \end{cases} \xrightarrow{\text{برای } x_0=0} \begin{cases} y_1 = x^r \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + x^r \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$

ج) معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز $r_2 < r_1$ باشد که تفاضل آنها عددی صحیح باشد:

$$x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x^{r_1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n & \text{(}r_1\text{ که بزرگتری)}; \\ y_2 = K y_1 \operatorname{Ln} x + x^{r_2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n & \text{(}r_2\text{ که کوچکتره)}; \end{cases}$$

❖ معادله لژاندر: معادله دیفرانسیل به فرم $(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0$ را معادله لژاندر می‌نامند.

با توجه به اینکه $x=0$ یک نقطه معمولی برای معادله فوق است، بنابراین معادله دارای جوابی به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ است که دارای رابطه بازگشتی مقابل و شعاع همگرایی $R=1$ می‌باشد: $n\geq 0$ $\quad C_{n+2}=-\dfrac{(m-n)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}C_n$

جواب عمومی معادله به صورت $y=c_0R_m(x)+c_1S_m(x)$ خواهد بود که بسته به زوج یا فرد بودن m، به حالتهای زیر دسته‌بندی می‌شود:

اگر $m=n$ یک عدد صحیح نامنفی باشد:

حالت ۱) اگر n زوج باشد: در این صورت یک جواب (مثلاً R_n) به صورت چندجمله‌ای از درجه n خواهد بود که فقط شامل توانهای زوج تا x^n می‌باشد و جواب دیگر به صورت یک سری توانی است.

حالت ۲) اگر n فرد باشد: در این صورت یک جواب (مثلاً S_n) به صورت چندجمله‌ای از درجه n خواهد بود که فقط شامل توانهای فرد تا x می‌باشد و جواب دیگر به صورت یک سری توانی است.

اگر c_0 یا c_1 طوری انتخاب شود که مقدار چندجمله‌ای فوق در $x=1$ برابر 1 شود، آن را چندجمله‌ای لژاندر از درجه n می‌نامند و با $P_n(x)$ نمایش می‌دهند. در این حالت جواب دوم که یک سری است را با $Q_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

برای محاسبه $P_n(x)$ می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

۱) استفاده از فرمول صریح:
$$P_n(x)=\sum_{K=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^K\frac{(2n-2K)!}{2^n K!(n-K)!(n-2K)!}x^{n-2K}$$

۲) تابع مولد: چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$، ضرایب t^n در بسط مک لورن $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ می‌باشد.
$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

۳) فرمول رودریگز (رودریگس):
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

۴) با دانستن مقادیر $P_0(x)$، $P_1(x)$ و $P_2(x)$ و رابطه بازگشتی زیر می‌توان بقیه $P_n(x)$ ها را بدست آورد.

$P_0(x)=1$ ، $P_1(x)=x$ ، $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$ و $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$ یا $P_n(x)=\frac{1}{n}\left[(2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x)\right]$

خواص مهم تابع لژاندر $P_n(x)$:

I) $P_n(1)=1$ ، $P_n(-1)=(-1)^n$

II) $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$ $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ $\begin{cases}\text{if } n \text{ فرد} \to P_n(x) \text{ فرد}\\ \text{if } n \text{ زوج} \to P_n(x) \text{ زوج}\end{cases}$

III) $P_{2n+1}(0)=0$ ، $P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

IV) مجموعه چند جمله‌ای $P_n(x)$ ها توابعی متعامد هستند:

$m\neq n \Rightarrow \int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0$

نکته: $P_m(x)=1$: $\int_{-1}^{1}P_n(x)\,dx=\int_{-1}^{1}P_0(x)P_n(x)\,dx=0$ $n\neq 0$

$m=n \Rightarrow \int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$

V) برای هر $n\neq 0$ داریم: $\int_{-1}^{1}P_n(x)\,dx=0$

VI) چند رابطه بازگشتی برای تابع لژاندر:

1) $P_n(x)=\frac{1}{n}\left[(2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x)\right]$

2) $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$ 3) $(x^2-1)P'_n(x)=nxP_n(x)-nP_{n-1}(x)$

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[-1,1]$ پیوسته قطعه‌ای باشد و در نقاط ناپیوستگی، مشتق چپ و راست آن موجود باشد.

تابع f را در این بازه می‌توان برحسب تابع لژاندر به صورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$ نوشت که:

$c_n=\frac{2}{2n+1}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx$

نکته: در هر نقطه ناپیوستگی، سری به مقدار $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ همگرا می‌شود.

معادله بسل: هر معادله به فرم $x^2y''+xy'+(x^2-k^2)y=0$ که در آن k یک عدد دلخواه است را معادله بسل می‌نامند. چون $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است، لذا معادله مشخصه آن به صورت $r^2+(1-1)r+(-k^2)=0$ یعنی $r^2-k^2=0$ بنابراین:

$r_1=+k$ $r_2=-k$ $y=\sum c_nx^{n+r}$

جواب متناظر با $\nu = \nu_1$ را تابع بسل نوع اول گویند و با $J_\nu(x)$ نمایش می‌دهند. $J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$

تابع $J_\nu(x)$ دارای شعاع همگرایی ∞ است و آن را تابع بسل نوع اول از مرتبه ν می‌نامند.

تابع گاما $(\Gamma(x))$: این تابع برای $x>0$ به صورت $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$ تعریف می‌شود.

خواص تابع گاما:

رابطه بازگشتی: $1)\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\Gamma(1) = 1$ ، $3)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ، اگر n عدد صحیح باشد $(x=n)$: $2)\ \Gamma(n+1) = n!$

خواص تابع بسل نوع اول:

1) برای $n \in \mathbb{N}$ داریم: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

2) $J_n(x)$ برای nهای زوج، تابعی زوج (شامل توانهای زوج) است 3) $J_n(x)$ برای nهای فرد، تابعی فرد (شامل توانهای فرد) است

4) مهم: $\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_\nu(x)\right) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \rightsquigarrow \int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\, dx = x^{\nu} J_\nu(x)$

مهم: $\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \rightsquigarrow \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\, dx = -x^{-\nu} J_\nu(x)$

و $\int J_1(x)\, dx = -J_0(x)$

$$* \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) & \text{کاهش مرتبه تابع بسل اول} \\ J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x) & \text{افزایش مرتبه تابع بسل اول} \end{cases}$$

تابع بسل نوع دوم:

جواب معادله متناظر با $\nu_1 = +\nu$ را تابع بسل نوع اول می‌نامند. پس جواب دوم که متناظر با $\nu_2 = -\nu$ است با جایگذاری $-\nu$ در معادله بسل نوع اول بدست می‌آید:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

اگر $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$ باشد، جواب عمومی معادله بسل عبارتست از: $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$

ولی در صورتیکه $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ باشد، جواب دوم لگاریتمی است و آن را به صورت $y_2 = \alpha J_\nu(x) \ln x + x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

می‌نویسیم. ... به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$Y_n(x) = a\left(y_2 + b J_n(x)\right) \quad , \quad a = \frac{2}{\pi} \quad , \quad b = \gamma - \ln 2$$

در معادله فوق $\gamma = 0{,}5772$ را ثابت اویلر می‌نامند. تابع $Y_n(x)$ را تابع بسل نوع دوم (یا تابع نیومن) مرتبه n نامند.

$$\begin{cases} Y_\nu(x) = \dfrac{1}{\sin(\pi\nu)}\left(J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)\right) & (\nu \neq 0, 1, 2, \ldots) \\ Y_n(x) = \lim\limits_{\nu \to n} Y_\nu(x) & (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

فرم کلی تابع بسل نوع دوم:

که در این صورت جواب عمومی معادله بسل به صورت $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$ خواهد بود.

روابط بیان شده برای تابع بسل نوع اول، بدون تغییر برای تابع بسل نوع دوم نیز برقرار است.

معادلات قابل تبدیل به معادله بسل: برخی معادلات را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به معادله بسل تبدیل نمود.

نکته I) معادله $x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0$ با تغییر متغیر $z = \lambda x$ به معادله بسل از مرتبه ν برحسب تابع y و متغیر مستقل z تبدیل می‌شود:

$$y = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 J_{-\nu}(\lambda x)$$

نکته II) معادله $x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - \nu^2) y = 0$ با تغییر متغیر $z = x^2$ به معادله بسل از مرتبه ν با متغیر مستقل z تبدیل می‌شود:

$$y = C_1 J_\nu(x^2) + C_2 J_{-\nu}(x^2)$$

نکته III) معادله $4x^2 y'' + 4x y' + (x - \nu^2) y$ با تغییر متغیر $z = \sqrt{x}$ به معادله بسل مرتبه ν با پارامتر مستقل z تبدیل می‌شود:

$$y = C_1 J_\nu(\sqrt{x}) + C_2 J_{-\nu}(\sqrt{x})$$

تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل خطی:

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برای $t > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $s > 0$ ،

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

در صورتی که انتگرال فوق موجود باشد، حاصل را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامیم.

اگر $H(s) = L[f(t)]$ باشد، آن گاه $f(t) = L[F(s)]$ را لاپلاس معکوس $H(s)$ می‌نامیم.

تبدیل لاپلاس و معکوس آن دارای خاصیت خطی هستند: $L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)]$

تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم:

$f(t)$	K	Kt^n	Kt^α	Ke^{at}	$K\sin at$	$K\cos at$
$F(s)$	$K\frac{1}{s}$	$K\frac{n!}{s^{n+1}}$ $n\in\mathbb{N}$	$K\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ $\alpha>-1$	$K\frac{1}{s-a}$	$K\frac{a}{s^2+a^2}$	$K\frac{s}{s^2+a^2}$

$f(t)$	$K\sinh at$	$K\cosh at$	Ke^{iax}	بسل مرتبه صفر $J_0(t)$	$J_1(t)$
$F(s)$	$K\frac{a}{s^2-a^2}$	$K\frac{s}{s^2-a^2}$	$K\frac{s+ia}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$	$1-\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

∴ قضیه انتقال اول: اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد: $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$

∴ تبدیل لاپلاس مشتق: اگر $f(t)$ بر روی بازه $[0,\infty)$ از مرتبه نمایی $\left[\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{e^{at}}=0\right]$ و $f'(t)$ به صورت قطعه‌ای پیوسته باشد و $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، آن گاه:

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0) \qquad L[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \qquad \dots$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

∴ مشتق از تبدیل لاپلاس: اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$L[tf(t)] = -F'(s) \qquad L[t^2f(t)] = +F''(s) \qquad \dots \qquad L[t^nf(t)] = (-1)^nF^{(n)}(s)$$

تذکر: با توجه به روابط فوق اگر مشتق تبدیل لاپلاس تابع $(F'(s))$ را داشته باشیم و لاپلاس معکوس آن را بتوانیم بیابیم، تابع $f(t)$ را می‌توان ...