کتابچه نمونه سوالات چیست:

سایت ما **افتخار** دارد برای اولین بار در ایران توانسته است کتابچه نمونه سوالات تمام دروس پیام نور که هر یک حاوی تمامی آزمون های برگزار شده پیام نور (تمامی نیمسالهای موجود حتی الامکان با جواب) را در یک فایل به نام کتابچه جمع آوری کند و هر ترم نیز آن را آپدیت نماید.

مراحل ساخت یک کتابچه نمونه سوال

(برای آشنایی با زحمت بسیار زیاد تولید آن در هر ترم) :

دسته بندی فایلها – سرچ بر اساس کد درس – چسباندن سوال و جواب – پیدا کردن یک درس در نیمسالهای مختلف و چسباندن به کتابچه همان درس – چسباندن نیمسالهای مختلف یک درس به یکدیگر – وارد کردن اطلاعات تک تک نیمسالها در سایت – آپلود کتابچه و خیلی موارد دیگر..

همچنین با توجه به تغییرات کدهای درسی دانشگاه استثنائات زیادی در ساخت کتابچه بوجود می آید که کار ساخت کتابچه را بسیار پیچیده می کند .

فهرست مطالب

فصل اوّل

پیدایش فیزیک کوانتومی

۱ــ رابطهٔ (۱ــ۱) بین چگالی انرژی در کاواک و توان گسیلی را ثابت کنید. [راهنمایی: برای اثبات این رابطه به‌شکل نگاه کنید. بزرگی المان حجم سایه‌دار برابراست با $dV = r^{۲} dr \sin\theta d\theta d\phi$ که در آن r فاصله از مبدأ (در روزنه به‌مساحت dA)، θ زاویه با قائم، و ϕ زاویهٔ سمتی حول محوری است که بر روزنه عمود است. انرژی داخل این المان حجم برابر است با dV ضربدر چگالی انرژی. تابش همسانگرد است و در نتیجه آنچه بیرون می آید برابر است با زاویهٔ فضایی $dA \cos\theta/۴\pi r^{۲}$ ضربدر انرژی. از این عبارت باید روی زوایای θ و ϕ انتگرال بگیریم و چنانچه شار تابش را خواسته باشیم باید روی r نیز از ۰ تا $c\Delta t$ انتگرال بگیریم ($c\Delta t$ فاصله‌ای است که تابش در مدت زمان مفروض Δt طی می‌کند).]

از هندسهٔ شکل مسئله، انرژی درون حجم dV برابر است با

$$U(\nu, T) dV = U(\nu, T) r^{۲} dr \sin\theta d\theta d\phi$$

انرژیی که از این چشمه از سوراخی به مساحت dA بیرون می آید برابر است با

$$dE(\nu, T) = U(\nu, T) dV \frac{dA \cos\theta}{۴\pi r^{۲}}$$

بنابراین انرژی کلّ گسیل شده چنین می‌شود

$$\begin{aligned} dE(\nu, T) &= \int_{۰}^{c\Delta t} dr \int_{۰}^{\pi/۲} d\theta \int_{۰}^{۲\pi} d\phi U(\nu, T) \sin\theta \cos\theta \frac{dA}{۴\pi} \\ &= \frac{dA}{۴\pi} ۲\pi c \Delta t\, U(\nu, T) \int_{۰}^{\pi/۲} d\theta \sin\theta \cos\theta \\ &= \frac{۱}{۴} c \Delta t\, dA\, U(\nu, T) \end{aligned}$$

بنابر تعریف گسیلندگی این مقدار برابر است با $E \Delta t\, dA$ و داریم

$$E(\nu, T) = \frac{c}{۴} U(\nu, T)$$

۲ــ با استفاده از رابطهٔ (۱ــ٦) چگالی انرژی را در بازهٔ طول‌موج $\Delta\lambda$ حساب کنید. از رابطه‌ای که به‌دست می‌آورید مقدار $\lambda = \lambda_{\max}$ را حساب کنید که به‌ازای آن این چگالی بیشینه می‌شود. نشان

دهید که $\lambda_{\max}$ به شکل b/T است و ثابت b را پیدا کنید و با استفاده از برآوردی که از دمای خورشید کرده‌اید طول‌موج $\lambda_{\max}$ را برای تابش خورشیدی حساب کنید. [هنگام محاسبهٔ b به جواب x معادلهٔ $(۵-x)=۵e^{-x}$ نیاز خواهید داشت.]

داریم

$$\begin{aligned} w(\lambda,T) &= U(\nu,T)\left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| \\ &= U\left(\frac{c}{\lambda},T\right)\frac{c}{\lambda^{۲}} \\ &= \frac{۸\pi hc}{\lambda^{۵}}\frac{۱}{e^{hc/\lambda kT}-۱} \end{aligned}$$

اگر $dw(\lambda,T)/d\lambda=۰$ آنگاه شدّت بیشینه می‌شود. داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{۱}{\lambda^{۵}}\frac{۱}{e^{A/\lambda}-۱}\right) &= \left(-۵\frac{۱}{\lambda^{۶}}-\frac{۱}{\lambda^{۵}}\frac{e^{A/\lambda}}{e^{A/\lambda}-۱}\left(-\frac{A}{\lambda^{۲}}\right)\right)\frac{۱}{e^{A/\lambda}-۱} \\ &= ۰ \end{aligned}$$

که در آن $A=hc/kT$. با فرض این که $x=A/\lambda$، از معادلهٔ بالا داریم

$$۵-x=۵\,e^{-x}$$

جواب این معادله $x=۴{,}۹۶۵$ است و در نتیجه

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}T &= \frac{hc}{۴{,}۹۶۵\,k} \\ &= ۲{,}۸۹۸\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

در مثال ۱—۱ برآورد کردیم که دمای سطح خورشید $۶۰۰۰\ \mathrm{K}$ است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}^{\mathrm{sun}} &= \frac{۲۸{,}۹۸\times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{mK}}{۶\times ۱۰^{۳}\ \mathrm{K}} \\ &= ۴{,}۸۳\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{m}=۴۸۳\ \mathrm{nm} \end{aligned}$$

۳— نور ماورابنفش به‌طول‌موج $۳۵۰\ \mathrm{nm}$ بر سطح پتاسیم می‌تابد. انرژی بیشینهٔ فوتوالکترونها $۱{,}۶\ \mathrm{eV}$ است. تابع‌کار پتاسیم چقدر است؟

رابطه‌ای که باید به‌کار ببریم چنین است

$$h\nu=K+W$$

که در آن K انرژی جنبشی الکترون و W تابع کار فلز است. در اینجا

$$\begin{aligned} h\nu &= \frac{hc}{\lambda} \\ &= \frac{(۶٫۶۲۶ \times ۱۰^{-۳۴}\ \mathrm{J.s})(۳ \times ۱۰^{۸}\ \mathrm{m/s})}{۳۵۰ \times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{m}} \\ &= ۵٫۶۸ \times ۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{J} = ۳٫۵۵\ \mathrm{eV} \end{aligned}$$

به‌ازای $K = ۱٫۶۰\ \mathrm{eV}$ داریم $W = ۱٫۹۵\ \mathrm{eV}$.

۴— بیشینه انرژی فوتوالکترونها از آلومینیم برای تابش $۲۰۰\ \mathrm{nm}$ برابربا $۲٫۳\ \mathrm{eV}$ و برای تابش $۲۵۸\ \mathrm{nm}$ برابربا $۰٫۹۰\ \mathrm{eV}$ است. با استفاده از این داده‌ها ثابت پلانک و تابع‌کار آلومینیم را حساب کنید.

از رابطهٔ

$$\frac{hc}{\lambda_۱} - \frac{hc}{\lambda_۲} = K_۱ - K_۲$$

استفاده می‌کنیم چون W از طرفین حذف می‌شود. داریم

$$\begin{aligned} h &= \frac{۱}{c}\,\frac{\lambda_۱\lambda_۲}{\lambda_۲ - \lambda_۱}\,(K_۱ - K_۲) \\ &= \frac{(۲۰۰ \times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{m})(۲۵۸ \times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{m})}{(۳ \times ۱۰^{۸}\ \mathrm{m/s})(۵۸ \times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{m})} \\ &\qquad \times (۲٫۳ - ۰٫۹)\ \mathrm{eV} \times (۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹})\ \mathrm{J/eV} \\ &= ۶٫۶۴ \times ۱۰^{-۳۴}\ \mathrm{J.s} \end{aligned}$$

۵— فوتون $۱۰۰\ \mathrm{MeV}$ با پروتون ساکنی برخورد می‌کند. اتلاف انرژی بیشینهٔ ممکن فوتون چقدر است؟

افت بیشینهٔ انرژی فوتون در برخورد شاخ به شاخ رخ می‌دهد که در آن فوتون به عقب پراکنده می‌شود. فرض می‌کنیم انرژی فوتون فرودی $h\nu$ و انرژی فوتونی که به عقب پراکنده می‌شود $h\nu'$ باشد. انرژی پروتون پس‌زده را E می‌گیریم. اندازه‌حرکت پس‌زنی از رابطهٔ $E = \sqrt{p^۲c^۲ + m^۲c^۴}$ به‌دست‌می‌آید. رابطه پایستگی انرژی چنین است

$$h\nu + mc^۲ = h\nu' + E$$

رابطهٔ پایستگی اندازه‌حرکت چنین است

$$\frac{h\nu}{c} = -\frac{h\nu'}{c} + p$$

یعنی

$$h\nu = -h\nu' + pc$$

داریم $E + pc - mc^۲ = ۲h\nu$ که از آن

$$p^۲c^۲ + m^۲c^۴ = (۲h\nu - pc + mc^۲)^۲$$

در نتیجه

$$pc = \frac{۴h^۲\nu^۲ + ۴h\nu mc^۲}{۴h\nu + ۲mc^۲}$$

افت انرژی فوتون با انرژی جنبشی پروتون $K = E - mc^۲$ برابر است. به‌ازای $h\nu = ۱۰۰\ \mathrm{MeV}$ و $mc^۲ = ۹۳۸\ \mathrm{MeV}$ داریم

$$pc = ۱۸۲\,\mathrm{MeV}$$

و

$$E - mc^۲ = K = ۱۷{,}۶\,\mathrm{MeV}$$

۶– فوتون $۱۰۰\ \mathrm{keV}$ با الکترون ساکنی برخورد می‌کند. این فوتون تحت زاویهٔ ۹۰° پراکنده می‌شود. انرژی این فوتون پس‌از برخورد چقدر است؟ انرژی جنبشی الکترون پس‌از برخورد برحسب الکترون ولت چقدر است و راستای پس‌زنی آن چیست؟

فرض کنید $h\nu$ انرژی فوتون فرودی، $h\nu'$ انرژی فوتون نهایی و p اندازه‌حرکت الکترون خروجی باشد. از قانون پایستگی انرژی داریم

$$h\nu + mc^۲ = h\nu' + \sqrt{p^۲c^۲ + m^۲c^۴}$$

معادله‌ای نیز برای پایستگی اندازه‌حرکت می‌نویسیم که در آن فرض کرده‌ایم که فوتون اولیّه در راستای x و فوتون نهایی در راستای y حرکت می‌کند. اگر این معادله را در c ضرب کنیم داریم

$$h\nu\,\mathbf{i} = h\nu'\,\mathbf{j} + (p_x c\,\mathbf{i} + p_y c\,\mathbf{j})$$

بنابراین داریم $p_x c = h\nu$ و $p_y c = -h\nu'$. با استفاده از این دو رابطه معادلهٔ قانون پایستگی انرژی را چنین می‌نویسیم

$$(h\nu + mc^۲ - h\nu')^۲ = m^۲c^۴ + c^۲(p_x^۲ + p_y^۲) = m^۲c^۴ + (h\nu)^۲ + (h\nu')^۲$$

از این رابطه داریم

$$h\nu' = h\nu\left(\frac{mc^۲}{h\nu + mc^۲}\right)$$

با استفاده از این رابطه انرژی جنبشی الکترون را حساب می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
K &= h\nu - h\nu' \\
&= h\nu\left(1 - \frac{mc^2}{h\nu + mc^2}\right) \\
&= h\nu\,\frac{h\nu}{h\nu + mc^2} \\
&= \frac{(100\ \mathrm{keV})^2}{100\ \mathrm{keV} + 510\ \mathrm{keV}} \\
&= 16.4\ \mathrm{keV}
\end{aligned}
$$

همچنین داریم

$$\mathbf{p}c = (100\ \mathrm{keV})\,\mathbf{i} + (-83.6\ \mathrm{keV})\,\mathbf{j}$$

که جهت الکترون پس‌زده را تعیین می‌کند.

۷– الکترونی به انرژی ۱۰۰ MeV با فوتونی به‌طول‌موج 3×10^6 nm (متناظر با زمینهٔ جهانی تابش جسم سیاه) برخورد می‌کند. اتلاف انرژی بیشینهٔ الکترون چقدر است؟

انرژی فوتون برابر است با

$$
\begin{aligned}
h\nu &= \frac{hc}{\lambda} \\
&= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J.s})(3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{3 \times 10^{6} \times 10^{-9}\ \mathrm{m}} \\
&= 6.63 \times 10^{-17}\ \mathrm{J} = 4.14 \times 10^{-4}\ \mathrm{MeV}
\end{aligned}
$$

اگر قانون پایستگی اندازه‌حرکت در برخوردهای رودررو (افت انرژی بیشینه) را به‌توان دو برسانیم داریم

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + p^2 + 2\left(\frac{h\nu}{c}\right) p\,\eta_i = \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 + p'^2 + 2\left(\frac{h\nu'}{c}\right) p'\,\eta_f$$

در اینجا $\eta_i = \pm 1$ که در آن علامت مثبت برای موردی است که فوتون و الکترون در یک جهت حرکت می‌کنند و علامت منفی برای موردی است که این دو در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. برای η_f نیز چنین است. اگر این رابطه را در c^2 ضرب کنیم داریم

$$(h\nu)^2 + (pc)^2 + 2(h\nu)pc\,\eta_i = (h\nu')^2 + (p'c)^2 + 2(h\nu')p'c\,\eta_f$$

مجذور معادلهٔ پایستگی انرژی که در آن E برحسب اندازه‌حرکت و جرم بیان شده باشد چنین است

$$(h\nu)^2 + (pc)^2 + m^2c^4 + 2Eh\nu = (h\nu')^2 + (p'c)^2 + m^2c^4 + 2E'h\nu'$$

اگر جملات شامل جرم را از دو طرف حذف کنیم و سپس دو معادلهٔ قبل را از هم کسر کنیم داریم

$$h\nu(E - \eta_i p c) = h\nu'(E' - \eta_f p' c)$$

از این رابطه می‌توانیم $h\nu'$ را حساب کنیم و قانون پایستگی انرژی را به‌شکل زیر بنویسیم

$$E - E' = h\nu\left(\frac{E - \eta_i p c}{E' - \eta_f p' c} - ۱\right)$$

افت انرژی به‌ازای $\eta_i = -۱$ و $\eta_f = ۱$ بیشینه می‌شود. با فرض این که اندازه‌حرکت نهایی الکترون خیلی به صفر نزدیک نیست می‌توانیم بنویسیم $E + pc = ۲E$ و $E' - p'c = (mc^۲)^۲/۲E'$. بنابراین

$$E - E' = h\nu\left(\frac{۲E \times ۲E'}{(mc^۲)^۲}\right)$$

نتیجه می‌گیریم که $۱/E' = ۱/E + ۱۶\,h\nu$ که در آن انرژیها برحسب MeV بیان می‌شوند. از اینجا داریم $E' = (۱۰۰/۱٫۶۴) = ۶۱\ \text{MeV}$ و افت انرژی برابر می‌شود با $۳۹\ \text{MeV}$.

۸ــ باریکه‌ای از پرتوهای ایکس از الکترون ساکنی پراکنده می‌شود. اگر طول‌موج پرتوهای ایکسی که تحت زاویهٔ ۶۰° نسبت به محور باریکه پراکنده می‌شوند $۰٫۰۳۵\ \text{Å}$ باشد، انرژی پرتوهای ایکس چقدر است؟

داریم $\lambda' = ۰٫۰۳۵ \times ۱۰^{-۱۰}\ \text{m}$. این مقدار را باید در رابطهٔ زیر قرار دهیم

$$\begin{aligned}
\lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_e c}(۱ - \cos ۶۰^\circ) = \frac{h}{۲m_e c} \\
&= \frac{۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\ \text{J.s}}{۲ \times (۰٫۹ \times ۱۰^{-۳۰}\ \text{kg})(۳ \times ۱۰^{۸}\ \text{m/s})} \\
&= ۱٫۲۳ \times ۱۰^{-۱۲}\ \text{m}
\end{aligned}$$

بنابراین $\lambda = (۳٫۵۰ - ۱٫۲۳) \times ۱۰^{-۱۲}\ \text{m} = ۲٫۳ \times ۱۰^{-۱۲}\ \text{m}$.

انرژی فوتون پرتو‌ــX برابر می‌شود با

$$\begin{aligned}
h\nu &= \frac{hc}{\lambda} \\
&= \frac{(۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\ \text{J.s})(۳ \times ۱۰^{۸}\ \text{m/s})}{(۲٫۳ \times ۱۰^{-۱۲}\ \text{m})(۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\ \text{J/eV})} \\
&= ۵٫۴ \times ۱۰^{۵}\ \text{eV}
\end{aligned}$$

۹ــ هستهٔ ازت (جرم پروتون $۱۴\times$ ≅ جرم) فوتونی به‌انرژی $۶٫۲\ \text{MeV}$ گسیل می‌کند. اگر هسته در آغاز ساکن باشد انرژی پس‌زنی هسته برحسب الکترون ولت چقدر است؟

وقتی که هسته در آغاز ساکن است اندازه‌حرکت پس‌زنی‌اش باید با اندازه‌حرکت فوتون گسیل‌شده برابر شود. بنابراین بزرگی آن برابر است با $p = h\nu/c$ که در آن $h\nu = ۶{,}۲\ \mathrm{MeV}$. انرژی پس‌زنی برابر است با

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^۲}{۲M} = h\nu\frac{h\nu}{۲Mc^۲} \\ &= (۶{,}۲\ \mathrm{MeV})\frac{۶{,}۲\ \mathrm{MeV}}{۲ \times ۱۴ \times (۹۴۰\ \mathrm{MeV})} \\ &= ۱{,}۵ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{MeV} \end{aligned}$$

۱۰− بلوری با فاصلهٔ صفحات $۰{,}۳۲\ \mathrm{nm}$ را درنظر بگیرید. مرتبهٔ بزرگی انرژیهای (الف) الکترونها، (ب) هسته‌های هلیوم (جرم پروتون $\times ۴ \cong$ جرم) چقدر باشند تا بتوان سه بیشینهٔ تداخلی را مشاهده کرد؟

فرمول $\lambda = ۲a\sin\theta/n$ ایجاب می‌کند که $\lambda/\sin\theta \leq ۲a/۳$. چون $\lambda = h/p$، داریم $p \geq ۳h/۲a\sin\theta$، و در نتیجه انرژی جنبشی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$E = \frac{p^۲}{۲m} \geq \frac{۹h^۲}{۸ma^۲\sin^۲\theta}$$

بنابراین کمینه انرژی الکترون برابر است با

$$\begin{aligned} K &= \frac{۹(۶{,}۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\ \mathrm{J.s})^۲}{۸(۰{,}۹ \times ۱۰^{-۳۰}\ \mathrm{kg})(۰{,}۳۲ \times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{m})(۱{,}۶ \times ۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{J/eV})} \\ &= ۳{,}۳۵\ \mathrm{eV} \end{aligned}$$

چون اتمهای هیلیوم $۴(۱{,}۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\ \mathrm{kg})/(۰{,}۹ \times ۱۰^{-۳۰}\ \mathrm{kg}) = ۷{,}۴۲ \times ۱۰^۳$ برابر سنگینتر هستند داریم

$$\begin{aligned} K &= \frac{۳۳{,}۵\ \mathrm{eV}}{۷{,}۴۲ \times ۱۰^۳} \\ &= ۴{,}۵ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{eV} \end{aligned}$$

۱۱− کوچکترین فاصله‌ای با میکروسکوپ می‌توان تفکیک کرد از مرتبهٔ بزرگی طول‌موجی است که در آن به‌کار می‌رود. انرژی الکترونها در میکروسکوپ الکترونی چقدر باید باشد تا فاصلهٔ (الف) $۱۵\ \mathrm{nm}$، (ب) $۰{,}۵\ \mathrm{nm}$ را بتوان تفکیک کرد؟

از $K = p^۲/۲m = h^۲/۲m\lambda^۲$ استفاده می‌کنیم که در آن $\lambda = ۱۵ \times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{m}$ و داریم

$$\begin{aligned} K &= \frac{(۶{,}۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J.s})^۲}{۲(۰{,}۹ \times ۱۰^{-۳۰}\,\mathrm{kg})^۲(۱{,}۶ \times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{J/eV})} \\ &= ۶{,}۷۸ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

به‌ازای $\lambda = ۰{,}۵\,\mathrm{nm}$ طول‌موج ۳۰ برابر کوچکتر و در نتیجه انرژی ۹۰۰ برابر بزرگتر، یعنی $K = ۶{,}۱۰\,\mathrm{eV}$، می‌شود.

۱۲ــ اگر فرض کنیم که در هر حالت مانای اتم هیدرژن الکترون در مدار دایره‌ای حرکت می‌کند که پیرامون آن مضرب صحیحی از طول‌موج است آنگاه می‌توانیم نتایج نظریهٔ بوهر را به‌دست آوریم. این محاسبات را انجام دهید.

محیط هر مدار دایره‌ای شکلی به‌شعاع r برابر است با $۲\pi r$. اگر تعداد n طول‌موج λ در چنین مداری بگنجد باید داشته باشیم $۲\pi r = n\lambda = nh/p$. بنابراین به‌شرط

$$pr = nh/۲\pi = n\hbar$$

می‌رسیم که همان شرط برابر بودن اندازه‌حرکت زاویه‌ای در مدارهای دایره‌ای شکل با مضرب درستی از $\hbar$ است.

۱۳ــ می‌خواهیم فاصلهٔ بین صفحات مجاور بلوری را اندازه‌بگیریم. اگر پرتوهای ایکسی به طول‌موج $۰{,}۵\,\mathrm{\AA}$ تحت زاویهٔ ۵° آشکار شوند این فاصله چقدر می‌شود؟ بیشینهٔ دوّم در چه زاویه‌ای مشاهده می‌شود؟

داریم $a = n\lambda/۲\sin\theta$. به‌ازای $n = ۱$ و $\lambda = ۰{,}۵ \times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}$ به‌دست می‌آوریم $a = ۲{,}۸۷ \times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}$. به‌ازای $n = ۲$ باید داشته باشیم $\sin\theta_۲ = ۲\sin\theta_۱$. چون زوایا بسیار کوچک هستند داریم $\theta_۲ = ۲\theta_۱$. بنابراین زاویه برابر است با ۱۰°.

۱۴ــ اگر انرژی نوسانگر هماهنگ $p^۲/۲m + m\omega^۲ r^۲/۲$ باشد، یعنی نیرو $m\omega^۲ r$ باشد، با استفاده از قواعد کوانتش بوهر ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ را حساب کنید. خود را به مدارهای دایره‌ای محدود کنید. همتای فرمول ریدبرگ در اینجا چیست؟ نشان دهید که اصل توافق به‌ازای همهٔ مقادیر عدد کوانتومی n که برای کوانتیده کردن اندازه‌حرکت زاویه‌ای به‌کار می‌روند برقرار است.

انرژی کلّ برابر است با

$$\begin{aligned} E &= \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}m\omega^۲ r^۲ \\ &= m\omega^۲ r^۲ = n\hbar\omega \end{aligned}$$

در رسیدن به سطر آخر از شرط کوانتش اندازه‌حرکت زاویه‌ای برای مدارهای دایره‌ای شکل، یعنی

$mvr = n\hbar$ که در آن $v = \omega r$، استفاده کرده‌ایم. اینک فرمول ریدبرگ چنین است

$$\begin{aligned}\nu(n \to n') &= \frac{E_n - E_{n'}}{h} \\ &= \frac{\hbar\omega(n-n')}{h} \\ &= (n-n')\frac{\omega}{2\pi}\end{aligned}$$

فرکانس تابش در حدّ کلاسیک همان فرکانس دوران $\nu_{\mathrm{cl}} = \omega/2\pi$ است که با فرکانس کوانتومی به‌ازای $n - n' = 1$ وفق می‌دهد. اگر قاعدهٔ انتخاب $\Delta n = 1$ برقرار باشد آنگاه فرکانسهای کلاسیکی و کوانتومی به‌ازای همهٔ مقادیر n یکسان خواهند بود.

۱۵ــ با استفاده از قواعد کوانتش بوهر حالتهای انرژی پتانسیل

$$V(r) = V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^k$$

را حساب کنید که در آن k بسیار بزرگ است. شکل این پتانسیل را رسم کنید و نشان دهید که مقادیر انرژی به سمت $E_n \simeq Cn^2$ میل می‌کنند.

با پتانسیل $V(r) = V_0(r/a)^k$ معادله‌ای که حرکت دایره‌ای را توصیف می‌کند چنین است

$$\begin{aligned}m\frac{v^2}{r} &= \left|\frac{dV}{dr}\right| \\ &= \frac{1}{r}kV_0\left(\frac{r}{a}\right)^k\end{aligned}$$

بنابراین

$$v = \sqrt{\frac{kV_0}{m}}\left(\frac{r}{a}\right)^{k/2}$$

شرط کوانتش اندازه‌حرکت زاویه‌ای $mvr = n\hbar$ به‌شکل زیر است

$$\sqrt{ma^2kV_0}\left(\frac{r}{a}\right)^{(k+2)/2} = n\hbar$$

با استفاده از این نتیجه و معادلهٔ پیشین داریم

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mv^2 + V_0\left(\frac{r}{a}\right)^k \\ &= \left(\frac{k}{2}+1\right)V_0\left(\frac{r}{a}\right)^k \\ &= \left(\frac{k}{2}+1\right)V_0\left(\frac{n^2\hbar^2}{ma^2kV_0}\right)^{k/(k+2)}\end{aligned}$$

در حدّ $k \gg 1$ داریم

$$E \rightarrow \frac{1}{2}(kV_0)^{2/(k+2)}\left(\frac{\hbar^2}{ma^2}\right)^{k/(k+2)}(n^2)^{k/(k+2)}$$
$$\rightarrow \frac{\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

از نتیجهٔ آخر V_0 حذف می‌شود. اگر به شکل پتانسیل در حدّ k های بزرگ توجه کنیم چنین امری موجّه می‌نماید. به‌ازای $r < a$ پتانسیل تقریباً صفر است. به‌ازای $r > a$ پتانسیل بی‌نهایت می‌شود و جعبه‌ای با دیواره‌های بی‌نهایت را می‌ماند. پارامتر V_0 بعد انرژی دارد. در حدّ جعبهٔ بی‌نهایت با شرط کوانتومی پارامتر V_0 معنی فیزیکی ندارد و مقیاس انرژی با $\hbar^2/2ma^2$ توصیف می‌شود.

۱۶ــ انرژی چرخندهٔ تخت برابراست با

$$E = \frac{L^2}{2I}$$

که در آن L اندازه‌حرکت زاویه‌ای و I گشتاور لختی است. قواعد کوانتش بوهر را به‌کار ببرید و ترازهای انرژی این چرخنده را حساب کنید. اگر شرط فرکانس بوهر برای تابش در گذارهایی از حالت n_1 به حالت n_2 برقرار باشد نشان دهید که (الف) اصل توافق برقرار است، و (ب) از این شرط نتیجه می‌شود که فقط گذارهای $\Delta n = \pm 1$ می‌توانند رخ دهند.

از شرط $L = n\hbar$ داریم

$$E = \frac{n^2\hbar^2}{2I}$$

در گذار از n_1 به n_2 قاعدهٔ بوهر فرکانس تابش را تعیین می‌کند

$$\nu_{12} = \frac{E_1 - E_2}{h}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2Ih}(n_1^2 - n_2^2)$$
$$= \frac{\hbar}{4\pi I}(n_1^2 - n_2^2)$$

فرض می‌کنیم $n_1 = n_2 + \Delta n$ آنگاه در حدّ n های بزرگ داریم $(n_1^2 - n_2^2) \rightarrow 2n_2\Delta n$ و در نتیجه

$$\nu_{12} \rightarrow \frac{1}{2\pi}\frac{\hbar n_2}{I}\Delta n = \frac{1}{2\pi}\frac{L}{I}\Delta n$$

فرکانس کلاسیکی تابش همان فرکانس دوران یعنی $\omega = L/I$ است و داریم

$$\nu_{cl} = \frac{\omega}{2\pi}\frac{L}{I}$$

می‌بینیم که اگر $\Delta n = ۱$ آنگاه این فرکانس با $\nu_{۱۲}$ برابر می‌شود.

۱۷ – گاهی مولکولها مانند چرخنده رفتار می‌کنند. اگر طیفهای دورانی با تابشی مشخص شوند که طول‌موج آن از مرتبهٔ $۱۰^{۶}$ nm است و از آن به‌منظور برآورد فواصل مولکولی در مولکولی مانند $H_۲$ استفاده شود چه فواصلی (برحسب نومتر) به‌دست می‌آید؟

گاف انرژی بین ترازهای پائین طیفهای دورانی از مرتبهٔ $\hbar^۲/I = (۱/۲\pi)h\hbar/MR^۲$ است که در آن M جرم کاهش‌یافتهٔ دو هسته و R فاصلهٔ آنهاست. هم‌ارز آن می‌توانیم بنویسیم $۲ \times m(R/۲)^۲ = MR^۲$. بنابراین

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{۱}{۲\pi} h \frac{\hbar}{MR^۲}$$

و داریم

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{۲\pi Mc}} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{\pi m c}} \\ &= \sqrt{\frac{(۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J.s})(۱۰^{-۳}\,\mathrm{m})}{\pi(۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg})(۳ \times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m/s})}} = ۲۶\,\mathrm{nm} \end{aligned}$$

فصل دوّم

دوگانگی موجی ذره‌ای، احتمال، و معادلهٔ شرودینگر

۱ — اگر داشته باشیم

$$A(k) = \frac{N}{(k^۲ + \alpha^۲)}$$

تابع‌موج $\psi(x)$ را حساب کنید. $A(k)$ و $\psi(x)$ را رسم کنید و نشان دهید داریم $\Delta k \Delta x > ۱$ که از α مستقل است.

داریم

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, A(k)\, e^{ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{N}{k^۲ + \alpha^۲}\, e^{ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{N}{k^۲ + \alpha^۲}\, \cos kx \end{aligned}$$

زیرا فقط قسمت زوج $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ در انتگرال سهم دارد. جواب این انتگرال را می‌توان در کتابهای انتگرال یافت و نتیجه چنین است

$$\psi(x) = N \frac{\pi}{\alpha}\, e^{-\alpha|x|}$$

بنابراین

$$|\psi(x)|^۲ = \frac{N^۲ \pi^۲}{\alpha^۲}\, e^{-۲\alpha|x|}$$

اگر به شکل تابع $|A(k)|^۲$ نگاه کنیم پی می‌بریم که این تابع در $k = \pm\alpha$ به یک چهارم مقدار بیشینهٔ خود افت می‌کند. بنابراین پهنای آن را می‌توانیم $\Delta k = ۲\alpha$ برآورد کنیم. مجذور تابع‌موج در نقاط $x = \pm ۱/۲\alpha$ به یک سوّم مقدار بیشینهٔ خود افت می‌کند و از چنین انتخابی داریم $\Delta k \Delta x = ۱$. انتخابهای اندک متفاوت اعداد دیگری را نتیجه می‌دهند ولی در همهٔ موارد حاصلضرب پهناها مستقل از α است.

۲– رابطهٔ بین طول‌موج λ و فرکانس ν در موج‌بری با

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu^۲ - \nu_\circ^۲}}$$

داده شده است. سرعت گروه چنین امواجی چقدر است؟

از تعریف سرعت گروه داریم

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} \\ &= \frac{۲\pi d\nu}{۲\pi d(۱/\lambda)} \\ &= \frac{d\nu}{d(۱/\lambda)} \\ &= -\lambda^۲ \frac{d\nu}{d\lambda} \end{aligned}$$

رابطهٔ بین طول‌موج و فرکانس را می‌توان به‌شکل

$$\nu^۲ - \nu_\circ^۲ = \frac{c^۲}{\lambda^۲}$$

نوشت و بنابراین

$$-\lambda^۲ \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c^۲}{\nu\lambda} = c\sqrt{۱ - (\nu_\circ/\nu)^۲}$$

۳– رابطهٔ بین فرکانس و طول‌موج برای امواج کشش سطحی در آب کم‌عمق چنین است:

$$\nu = \sqrt{\frac{۲\pi T}{\rho\lambda^۳}}$$

که در آن T کشش سطحی و ρ چگالی است. سرعت گروه این امواج چقدر است؟

از فرمول v_g که در مسئلهٔ پیشین به‌دست آوردیم برای

$$v = \sqrt{\frac{۲\pi T}{\rho}}\lambda^{-۳/۲}$$

استفاده می‌کنیم تا سرعت گروه را حساب کنیم

$$\begin{aligned} v_g &= -\lambda^۲ \frac{d\nu}{d\lambda} \\ &= \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۲\pi T}{\rho\lambda}} \end{aligned}$$

۴– رابطهٔ بین فرکانس و طول‌موج برای امواج گرانشی عمق آب چنین است:

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{۲\pi\lambda}}$$

سرعت گروه چنین امواجی چقدر است؟

برای امواج گرانشی عمق آب داریم

$$v = \sqrt{\frac{g}{۲\pi}}\lambda^{-۱/۲}$$

بنابراین

$$v_g = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\lambda g}{۲\pi}}$$

۵– مسئلهٔ پخش شدن بستهٔ موج گوسی را درنظر بگیرید که ذرّهٔ آزادی را توصیف می‌کند. اگر داشته باشیم:

$$\omega = \frac{k^۲\hbar}{۲m}$$

تغییر نسبی اندازهٔ بستهٔ موج در یک ثانیه برای موارد زیر چقدر است؟

(الف) بستهٔ موج الکترونی به جرم $۰٫۹ \times ۱۰^{-۳۰}$ kg را توصیف می‌کند. ابعاد بستهٔ موج را یکبار $۱۰^{-۶}$ m و بار دیگر $۱۰^{-۱۰}$ m درنظر بگیرید.

(ب) بستهٔ موج ذرّه‌ای به جرم $۱۰^{-۳}$ kg را توصیف می‌کند و اندازهٔ آن $۰٫۰۱$ m است. (بهتر است پهنا را برحسب $\hbar/mc$ بیان کنید که در آن m جرم ذرّه‌ای است که بسته آن را توصیف می‌کند.)

داریم $\omega = \hbar k^۲/۲m$، $\beta = \hbar/m$ و نیز پهنای اولیّهٔ بسته‌موج برابر است با $w(۰) = \sqrt{۲}\alpha$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{w(t)}{w(۰)} &= \sqrt{۱ + \frac{\beta^۲t^۲}{۲\alpha^۲}} \\
&= \sqrt{۱ + \frac{\hbar^۲t^۲}{۲m^۲\alpha^۲}} \\
&= \sqrt{۱ + \frac{۲\hbar^۲t^۲}{m^۲w^۴(۰)}}
\end{aligned}$$

(الف) به‌ازای $t = ۱$، $m = ۰٫۹ \times ۱۰^{-۳۰}$ kg و $w(۰) = ۱۰^{-۶}$ m داریم

$$w(۱) = ۱٫۷ \times ۱۰^{۲}\,\mathrm{m}$$

و به‌ازای $\text{m}\ ۱۰^{-۱۰}$ $= w(۰)$ محاسبه نشان می‌دهد که

$$w(۱) = ۱٫۷ \times ۱۰^{۶}\ \text{m}$$

این دو عدد اعداد بسیار بزرگی هستند. اگر توجه کنیم که سرعت مشخصهٔ ذرّه‌ای که در گسترهٔ Δx پخش است برابر است با $v = \hbar/m\Delta x$ و در اینجا m بسیار کوچک است آنگاه بزرگ بودن این اعداد موجه می‌نماید.

(ب) برای جسمی به‌جرم $\text{kg}\ ۱۰^{-۳}$ و $w(۰) = ۱۰^{-۲}\ \text{m}$ و $t = ۱\ \text{s}$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{۲\hbar^۲ t^۲}{m^۲ w^۴(۰)} &= \frac{۲(۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۳۴}\ \text{J.s})^۲ \times (۱\ \text{s})^۲}{(۱۰^{-۳}\ \text{kg})^۲ \times (۱۰^{-۲}\ \text{m})^۴} \\ &= ۲٫۲ \times ۱۰^{-۵۴}\end{aligned}$$

که عدد فوق‌العاده کوچکی است و در نتیجه $w(t) = w(۰)$.

۶– می‌خواهیم باریکه‌ای از الکترونها را تا فاصلهٔ $\text{km}\ ۱۰^۴$ پرتاب کنیم. اگر پهنای اوّلیهٔ بسته‌موج $\text{mm}\ ۱۰^{-۳}$ باشد پهنایش پس‌از طی این فاصله چقدر می‌شود مشروط‌براین که انرژی جنبشی آن (الف) eV ۱۳٫۶ و (ب) MeV ۱۰۰ باشد؟ [احتیاط: رابطهٔ بین انرژی جنبشی و اندازه‌حرکت همیشه $\text{K. E.} = p^۲/۲m$ نیست!]

برای الکترونهای eV۱۳٫۶ داریم $v/c = ۱/۱۳۷$ و از این رو می‌توانیم از عبارت غیرنسبیّتی انرژی جنبشی استفاده کنیم. از رابطه‌ای استفاده می‌کنیم که در مسئلهٔ ۵ به‌دست آوردیم. به‌ازای مسافت $۱۰^۴\ \text{km} = ۱۰^۷\ \text{m}$ و سرعت $۳ \times ۱۰^۸\ \text{m/s}/۱۳۷$ داریم $t = ۴٫۶\ \text{s}$. در این مسئله $w(۰) = ۱۰^{-۳}\ \text{m}$ و داریم

$$w(t) = (۱۰^{-۳}\ \text{m})\sqrt{۱ + \frac{۲(۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۳۴}\ \text{J.s})^۲ (۴٫۶\ \text{s})^۲}{(۰٫۹ \times ۱۰^{-۳۰}\ \text{kg})^۲ (۱۰^{-۳}\ \text{m})^۴}}$$

برای الکترونهای MeV ۱۰۰ با تقریب خوبی داریم $E = pc$، یعنی $\beta = ۰$ و بنابراین بسته‌موج پهن نمی‌شود.

۷– بسته‌موجی را برای نیوترینوها در نظر بگیرید. با تقریب بسیار خوبی نیوترینوها را می‌توان ذرّات بدون جرم پنداشت و درنتیجه برای آنها $E = pc$. نشان دهید که چنین بسته‌موجی پهن نمی‌شود.

برای هر ذرّهٔ بدون جرم $E = pc$ و بنابراین $\beta = ۰$ و پهن‌شدگی نداریم.

۸– تابع موجی به‌شکل زیر را درنظر بگیرید:

$$\psi(x) = Ae^{-\mu|x|}$$

تابع‌موج در فضای اندازه‌حرکت $\phi(p)$ را حساب کنید.

داریم

$$
\begin{aligned}
\phi(p) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, A\, e^{-\mu|x|} e^{-ipx/\hbar} \\
&= \frac{A}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\left\{\int_{-\infty}^{۰} dx\, e^{(\mu-ik)x} + \int_{۰}^{+\infty} dx\, e^{-(\mu+ik)x}\right\} \\
&= \frac{A}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\left\{\frac{۱}{\mu-ik} + \frac{۱}{\mu+ik}\right\} \\
&= \frac{A}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\frac{۲\mu}{\mu^۲+k^۲}
\end{aligned}
$$

که در آن $k = p/\hbar$.

۹ــ مثال مسئلهٔ ۸ را درنظر بگیرید. ثابت A را چنان تعیین کنید که $\psi(x)$ را بهنجار کند.

داریم

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, A^۲\, e^{-۲\mu|x|} &= A^۲\left\{\int_{-\infty}^{۰} dx\, e^{۲\mu x} + \int_{۰}^{+\infty} dx\, e^{-۲\mu x}\right\} \\
&= A^۲\frac{۱}{\mu} \\
&= ۱
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$A = \sqrt{\mu}$$

۱۰ــ اگر $\psi(x,t)$ از معادلهٔ (۲ــ۲۳) پیروی کند نشان دهید که قانون پایستگی (۲ــ۳۳) برقرار است مشروط‌براین‌که $V(x)$ حقیقی باشد.

این مسئله را در متن کتاب حلّ کرده‌ایم.

۱۱ــ فرض کنید $V(x)$ موهومی است. روابطی برای

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x,t)$$

به‌دست آورید. برای جذب ذرّات کمیّت آخر باید منفی باشد (چون ذرّات ناپدید می‌شوند احتمال این‌که جایی باشند کاهش می‌یابد). این امر چه قیدی بر قسمت موهومی $V(x)$ تحمیل می‌کند؟

معادلهٔ شرودینگری را در نظر بگیرید که در آن $V(x)$ موهومی است. داریم

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\frac{i\hbar}{۲m}\frac{\partial^۲\psi(x,t)}{\partial x^۲}-\frac{i}{\hbar}V(x)\psi(x,t)$$

و

$$\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t}=-\frac{i\hbar}{۲m}\frac{\partial^۲\psi^*(x,t)}{\partial x^۲}+\frac{i}{\hbar}V^*(x)\psi^*(x,t)$$

اینک داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) &= \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi+\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\\ &= \left(-\frac{i\hbar}{۲m}\frac{\partial^۲\psi^*}{\partial x^۲}+\frac{i}{\hbar}V^*\psi^*\right)\psi+\psi^*\left(\frac{i\hbar}{۲m}\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲}-\frac{i}{\hbar}V\psi\right)\\ &= -\frac{i\hbar}{۲m}\left(\frac{\partial^۲\psi^*}{\partial x^۲}\psi-\psi^*\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲}\right)+\frac{i}{\hbar}(V^*-V)\psi^*\psi\\ &= -\frac{i\hbar}{۲m}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}+\frac{۲\,\mathrm{Im}V(x)}{\hbar}\psi^*\psi\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}dx|\psi(x,t)|^۲=\frac{۲}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,(\mathrm{Im}V(x))\,|\psi(x,t)|^۲$$

طرف چپ این معادله باید منفی باشد که چیزی از آن نمی‌توان دربارهٔ $\mathrm{Im}V(x)$ استنباط کرد جز این که این کمیّت نمی‌تواند همه جا مثبت باشد ولی اگر علامتش ثابت بود حتماً منفی است.

۱۲ــ توزیع نمرات در کلاسی به‌شرح زیر است:

نمرات	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰	۵۵	۶۰
تعداد دانشجو	۰	۱	۰	۲	۶	۳	۱۳	۱۶	۹	۷	۲	۱

(الف) هیستوگرام این توزیع را رسم کنید.
(ب) نمرهٔ میانگین کلاس را حساب کنید.
(ج) کمیّت $(\Delta g)^۲=\left(\left\langle g^۲\right\rangle-\langle g\rangle^۲\right)$ را حساب کنید.

(الف) رسم نمودار هیستوگرام این توزیع ساده است.
(ب) و (ج) میانگین و واریانس در این توزیع به‌شرح زیرند

$$\begin{aligned}\langle g\rangle &= \frac{\sum_g g n_g}{\sum_g n_g}\\ &= ۳۸/۵\end{aligned}$$

$Ce^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}$	$(g-\langle g\rangle)^۲/(\Delta g)^۲$	n_g	g
۰٫۰۹۷	۰٫۰۰۵۴	۵٫۲۲	۱	۶۰
۰٫۸۳۳	۰٫۰۴۶۳	۳٫۰۷	۲	۵۵
۴٫۰۴	۰٫۲۲۴۷	۱٫۴۹	۷	۵۰
۱۱٫۱۶	۰٫۶۲۱	۰٫۴۸	۹	۴۵
۱۷٫۵۳	۰٫۹۷۵	۰٫۰۲۵	۱۶	۴۰
۱۵٫۶۶	۰٫۸۷۱	۰٫۱۳۸	۱۳	۳۵
۷٫۹۶	۰٫۴۴۲	۰٫۸۱۶	۳	۳۰
۲٫۳۰	۰٫۱۲۸	۲٫۰۵۸	۶	۲۵
۰٫۳۸	۰٫۰۲۱	۳٫۸۶۴	۲	۲۰
۰٫۰۳۶	۰٫۰۰۲	۶٫۲۳۵	۰	۱۵
۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۰۱	۹٫۷۰	۱	۱۰
"۰"	"۰"	۱۲٫۹۷	۰	۵

و

$$\begin{aligned}(\Delta g)^۲ &= \left(\left\langle g^۲\right\rangle - \langle g\rangle^۲\right)\\ &= \frac{\sum_g g^۲ n_g}{\sum_g n_g} - \left(\frac{\sum_g g n_g}{\sum_g n_g}\right)^۲\\ &= ۱۵۷۰٫۸ - ۱۴۸۲٫۳ = ۸۸٫۶\end{aligned}$$

۱۳ــ هیستوگرام خود را با توزیعی به‌شکل

$$N(g) = Ce^{-(g-\langle g\rangle)^۲/(\Delta g)^۲}$$

مقایسه کنید که در آن C چنان انتخاب شده‌است که $\sum_g N(g) = ۶۰$.

جدول زیر نتیجه محاسبات عددی این مسئله است.

۱۴ــ نشان دهید که توزیع نمرات زیر

نمرات	۱۰	۵۰	۶۰
تعداد دانشجو	۱۹	۳۴	۷

به نمرهٔ میانگین یکسانی می‌انجامد ولی پخش‌شدگی Δg آن فرق می‌کند. این پخش شدگی چقدر است؟

حلّ این مسئله ساده است.

۱۵ــ تابع‌موج

$$\psi(x) = \frac{۲N \sin kx}{x}$$

را درنظر بگیرید که در مثال اوّل به‌دست‌آوردیم. به‌ازای چه‌مقداری از N این تابع‌موج بهنجار می‌شود؟ [راهنمایی: می‌توانید از انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\sin t}{t}\right)^۲ = \pi$$

استفاده کنید.]

باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} ۱ &= ۴N^۲ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^۲ kx}{x^۲} \\ &= ۴N^۲ k \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\sin^۲ t}{t^۲} \\ &= ۴\pi N^۲ k \end{aligned}$$

بنابراین

$$N = \sqrt{\frac{۱}{۴\pi k}}$$

۱۶ــ تابع‌موج

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۴} e^{-\alpha x^۲/۲}$$

را درنظر بگیرید. کمیّت $\langle x^n \rangle$ را به‌ازای $n = ۱, ۲$ حساب کنید. می‌توانید جواب $\left\langle x^{۱۷} \right\rangle$ را حدس بزنید؟

داریم

$$\langle x^n \rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۲} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n e^{-\alpha x^۲}$$

توجه کنید که این انتگرال به‌ازای n های درست فرد صفر می‌شود چون بقیّهٔ انتگرالده زوج است.

به‌ازای عدد درست زوج $n = ۲m$ داریم

$$\begin{aligned}\langle x^{۲m}\rangle &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۲}\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^m \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x^۲} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۲}\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^m \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۲}\end{aligned}$$

به‌ازای $n = ۱$ و نیز $n = ۱۷$ این کمیّت صفر است، حال آن که به‌ازای $n = ۲$ یعنی $m = ۱$ برابر است با $۱/۲\alpha$.

۱۷ـــ $\phi(p)$ را برای تابع‌موج مسئلهٔ ۱۶ حساب کنید. کمیّت $\langle p^n\rangle$ را به‌ازای $n = ۱, ۲$ حساب کنید.

داریم

$$\phi(p) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۴} e^{-\alpha x^۲/۲}$$

اگر نما را به‌شکل

$$-\frac{\alpha}{۲}x^۲ - ix\frac{p}{\hbar} = -\frac{\alpha}{۲}\left(x + \frac{ip}{\hbar\alpha}\right)^۲ - \frac{p^۲}{۲\hbar^۲\alpha}$$

بنویسیم محاسبهٔ این انتگرال ساده می‌شود. جواب چنین است

$$\phi(p) = \frac{۱}{\sqrt{\pi\hbar}} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{۱/۴} e^{-p^۲/\alpha\hbar^۲}$$

به‌ازای n های زوج، یعنی $n = ۲m$، داریم

$$\begin{aligned}\langle p^{۲m}\rangle &= \frac{۱}{\pi\hbar}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{۱/۲} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p^{۲m} e^{-p^۲/\alpha\hbar^۲} \\ &= \frac{۱}{\pi\hbar}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{۱/۲}\left(-\frac{d}{d\beta}\right)^m \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{۱/۲}\end{aligned}$$

که در آن $\beta = ۱/\alpha\hbar^۲$. به‌ازای توانهای فرد انتگرال صفر می‌شود.

۱۸ـــ با استفاده از تعاریف $(\Delta x)^۲ = \langle x^۲\rangle - \langle x\rangle^۲$ و $(\Delta p)^۲ = \langle p^۲\rangle - \langle p\rangle^۲$ و نتایج مسایل ۱۶ و ۱۷ نشان دهید که $\Delta p\Delta x \geq \hbar/۲$.

به‌ازای $m = ۱$ در جوابهای دو مسئلهٔ ۱۶ و ۱۷ داریم

$$\begin{aligned}(\Delta x)^۲ &= \langle x^۲\rangle = \frac{۱}{۲\alpha} \\ (\Delta p)^۲ &= \langle p^۲\rangle = \frac{\alpha\hbar^۲}{۲}\end{aligned}$$

بنابراین $\Delta x\Delta p = \hbar/۲$ که در واقع کوچکترین مقدار ممکن برای حاصلضرب پخش‌شدگیهاست.

۱۹ــ قدرت انرژی پتانسیل هسته‌ای را برآورد کنید، مشروط براین که بدانیم "اندازهٔ" جعبه‌ای که پتانسیل هسته‌ای را توصیف می‌کند برابراست با 10^{-15} m و برای خارج کردن ذرّه‌ای از این چاه پتانسیل ۸ MeV انرژی لازم است.
(الف) با استفاده از اصل عدم قطعیّت کمیّت $\langle p^2 \rangle$ را برای نوکلئونی در این جعبه برآورد کنید و اگر جرم نوکلئون $M = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg باشد انرژی جنبشی این نوکلئون را برآورد کنید.
(ب) چون پتانسیلی که سبب بستگی می‌شود باید بیش از این مقدار باشد انرژی پتانسیل منفی چقدر است؟

این مسئله در فصل ۲ ویرایشهای اوّل و دوّم کتاب گاسیوروویچ حلّ شده‌است.

۲۰ــ از دیافراگمی که به‌مدّت $\Delta t = 10^{-10}$ sec باز می‌شود نور تکرنگی عبور می‌کند. پخش‌شدگی در فرکانس نور بر اثر دیافراگم چقدر است؟

از رابطه عدم قطعیّت بین زمان و فرکانس، یعنی $\Delta\nu\Delta t \geq 1$ پخش‌شدگی در فرکانس برابر است با $\Delta\nu = 1/\Delta t = 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$. این پخش‌شدگی را با فرکانس نور مرئی نوعی $\lambda = 500$ nm مقایسه کنید که برابر است با $\nu = c/\lambda = 6 \times 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$.

۲۱ــ هسته‌ها که نوعاً به‌اندازهٔ 10^{-12} cm هستند اغلب الکترونهایی با انرژیهای بین ۱ تا ۱۰ MeV گسیل می‌کنند. از اصل عدم قطعیّت نشان دهید که الکترونهایی با انرژی ۱ MeV نمی‌توانند قبل‌از واپاشی در داخل هسته وجود داشته باشند.

۲۲ــ نشان دهید که معادلهٔ (۲ــ۴۹) برقرار است.

داریم

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) x \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p)\, e^{ipx/\hbar} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} e^{ipx/\hbar} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi^*(p)\, i\hbar \frac{\partial \phi(p)}{\partial p}
\end{aligned}$$

در این محاسبات ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرده‌ایم که کار موجهی است چون انتظار داریم توابع‌موج در بی‌نهایت سریعتر از هر توانی از x به‌سمت صفر میل می‌کنند. برای توابع‌موج فضای اندازه‌حرکت نیز که توابعی از p هستند چنین امری صادق است.

فصل سوّم

ویژه‌مقادیر، ویژه‌توابع، و قضیّه بسط

۱– عملگرهای زیر را درنظر بگیرید:

(الف) $O_1\psi(x) = x^3\psi(x)$ (ب) $O_2\psi(x) = x(d/dx)\psi(x)$

(ج) $O_3\psi(x) = \lambda\,\psi^*(x)$ (د) $O_4\psi(x) = e^{\psi(x)}$

(هـ) $O_5\psi(x) = [d\psi(x)/dx]$ (و) $O_6\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx'(\psi(x')x')$

عملگرهای (الف)، (ب) و (و) خطی هستند.

۲– معادلهٔ ویژه‌مقدار زیر را حلّ کنید:

$$O_6\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

چه‌مقادیری از ویژه‌مقدار λ به ویژه‌توابع انتگرال‌پذیرمجذوری منجر می‌شوند؟
(راهنمایی: از طرفین این معادله نسبت به x دیفرانسیل بگیرید.)

داریم

$$\int_{-\infty}^{x} dx'\,x'\,\psi(x') = \lambda\,\psi(x)$$

برای حلّ این معادله از طرفین آن نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\lambda\frac{d\psi(x)}{dx} = x\,\psi(x)$$

یکی از جوابهای این معادله را می‌توانیم با نوشتن $d\psi/\psi = (1/\lambda)x\,dx$ به‌دست آوریم که از آن داریم

$$\psi(x) = C\,e^{\lambda x^2/2}$$

اگر بخواهیم انتگرالی که $O_6\psi(x)$ را تعریف می‌کند وجود داشته باشد باید داشته باشیم $\lambda < 0$.

۳– روابط جابجایی (الف) $[O_2, O_6]$ و (ب) $[O_1, O_2]$ را حساب کنید. روش محاسبهٔ $[A,B]$ این است که عبارت $A(B\psi) - B(A\psi)$ را به‌شکل $C\psi$ بیان کنید.

(الف)

$$\begin{aligned} O_۲O_٦\psi(x) - O_٦O_۲\psi(x) &= x\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\, \psi(x') - \int_{-\infty}^{x} dx'\, x'^۲\, \frac{d\psi(x')}{dx'} \\ &= x^۲\psi(x) - \int_{-\infty}^{x} dx'\, \frac{d}{dx'}(x'^۲\psi(x')) + ۲\int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\, \psi(x') \\ &= ۲O_٦\psi(x) \end{aligned}$$

چون این معادله برای هر $\psi(x)$ که به سرعت در بی‌نهایت صفر می‌شود برقرار است نتیجه می‌گیریم که

$$[O_۲, O_٦] = ۲O_٦$$

(ب)

$$\begin{aligned} O_۱O_۲\psi(x) - O_۲O_۱\psi(x) &= O_۱\left(x\frac{d\psi}{dx}\right) - O_۲(x^۳\psi) \\ &= x^۴\frac{d\psi}{dx} - x\frac{d}{dx}(x^۳\psi) \\ &= -۳x^۳\psi(x) \\ &= -۳O_۱\psi(x) \end{aligned}$$

بنابراین

$$[O_۱, O_۲] = -۳O_۱$$

۴— کمیّت زیر را برای ویژه‌توابع $u_n(x)$ در معادلهٔ (۳—۲۱) حساب کنید:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^۲\rangle}$$

با استفاده از $\langle p^۲\rangle$ در معادلهٔ (۳—۲٦) عبارت

$$\Delta x\Delta p$$

را حساب کنید. ویژه‌گی این عبارت آن است که برای حالتهای بالاتر با n افزایش می‌یابد.

می‌خواهیم عبارت

$$\langle x^۲\rangle = \frac{۲}{a}\int_{\circ}^{a} dx\, x^۲ \sin^۲\frac{n\pi x}{a}$$

را حساب کنیم. با تغییر $u \equiv \pi x/a$ داریم

$$\begin{aligned} \langle x^۲\rangle &= \frac{۲}{a}\frac{a^۳}{\pi^۳}\int_{\circ}^{\pi} du\, u^۲ \sin^۲ nu \\ &= \frac{a^۲}{\pi^۲}\int_{\circ}^{\pi} du\, u^۲(۱ - \cos ۲nu) \end{aligned}$$

محاسبهٔ انتگرال اوّل آسان است. برای محاسبهٔ انتگرال دوّم از رابطهٔ

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{\pi} du\, u^{\text{۲}} \cos\alpha u &= -\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{\text{۲}} \int_{\circ}^{\pi} du\, \cos\alpha u \\ &= -\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{\text{۲}} \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}\end{aligned}$$

در پایان قرار می‌دهیم $\alpha = n\pi$ و با اندک عملیّات جبری به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\langle x^{\text{۲}}\rangle = \frac{a^{\text{۲}}}{\text{۳}} - \frac{a^{\text{۲}}}{\text{۲}\pi^{\text{۲}}n^{\text{۲}}}$$

بنابراین به‌ازای n های بزرگ داریم $\Delta x = a/\sqrt{\text{۳}}$. چون $\langle p^{\text{۲}}\rangle = \hbar^{\text{۲}}n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}/a^{\text{۲}}$ داریم $\Delta p = \hbar\pi n/a$ و در نتیجه

$$\Delta x\Delta p \approx \frac{n\pi\hbar}{\sqrt{\text{۳}}}$$

یعنی حاصلضرب عدم قطعیّتها با n افزایش می‌یابد.

۵– الکترونی به‌جرم $m = \text{۰٫۹} \times \text{۱۰}^{-\text{۳۰}}$ kg را در جعبهٔ بی‌نهایتی به‌ابعاد $a = \text{۱۰}^{-\text{۹}}$ m درنظر بگیرید. (الف) اختلاف انرژی بین حالت پایه و اولین حالت برانگیخته چقدر است؟ جواب خود را برحسب eV بیان کنید. (ب) فرض کنید بنابر قاعدهٔ بوهر گذار از حالت $n = \text{۲}$ به حالت $n = \text{۱}$ با گسیل فوتونی همراه باشد. طول‌موج این فوتون چقدر است؟

با استفاده از $E_n = \hbar^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}n^{\text{۲}}/\text{۲}ma^{\text{۲}}$ داریم

$$\begin{aligned}E_{\text{۲}} - E_{\text{۱}} &= \text{۳}\frac{(\text{۱٫۰۵} \times \text{۱۰}^{-\text{۳۴}}\,\text{J.s})^{\text{۲}}}{\text{۲}(\text{۰٫۹} \times \text{۱۰}^{-\text{۳۰}}\,\text{kg})(\text{۱۰}^{-\text{۹}}\,\text{m})^{\text{۲}}}\frac{\text{۱}}{(\text{۱٫۶} \times \text{۱۰}^{-\text{۱۹}}\,\text{J/eV})} \\ &= \text{۰٫۱۱۵}\,\text{eV}\end{aligned}$$

داریم $\Delta E = hc/\lambda$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{\text{۲}\pi\hbar c}{\Delta E} \\ &= \frac{\text{۲}\pi(\text{۲٫} \times \text{۱۰}^{-\text{۷}}\text{eV.m})}{\text{۰٫۱۱۵}\,\text{eV}} \\ &= \text{۱٫۴۲} \times \text{۱۰}^{-\text{۵}}\,\text{m}\end{aligned}$$

که در آن یکای $\hbar c$ را از یکای J.m به یکای eV.m تبدیل کرده‌ایم.

۶– الکترونی را در جعبهٔ ماکروسکوپی به‌ابعاد $a = \text{۲}$ cm درنظر بگیرید. (الف) چه‌مقداری از n متناظر با ۵ eV ر۱ است؟ (ب) در این گسترهٔ انرژی، اختلاف انرژی بین حالت n و $n + \text{۱}$ چقدر است؟

(الف) در اینجا می‌نویسیم

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{2ma^2E}{\hbar^2\pi^2}\right)^{1/2} \\ &= \left[\frac{2(0.9\times10^{-30}\,\mathrm{kg})(2\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2(1.5\,\mathrm{eV})(1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J/eV})}{(1.05\times10^{-34}\,\mathrm{J.s})^2(3.14)^2}\right]^{1/2} \\ &= 4\times10^{7} \end{aligned}$$

(ب) داریم

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}2n\Delta n \\ &= \frac{(1.05\times10^{-34}\,\mathrm{J.s})^2(3.14)^2}{2(0.9\times10^{-30}\,\mathrm{kg})(2\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}2(4\times10^{7}) \\ &= 1.2\times10^{-26}\,\mathrm{J} = 7.6\times10^{-8}\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

۷– جعبهٔ بی‌نهایتی با پهنای نامعلوم را درنظر بگیرید. در گذارهایی بین مقادیر مجاور n فوتونهایی با انرژیهای مختلف گسیل می‌شوند. معلوم شده‌است که طولانی‌ترین طول‌موج بین این فوتونهای مختلف برابراست‌با $450\times10^{-9}\,\mathrm{m}$. با استفاده از این اطلاعات پهنای جعبهٔ بی‌نهایت را تعیین کنید.

بلندترین طول‌موج با کوچکترین فرکانس متناظر است. چون ΔE متناسب است با $(n+1)^2-n^2=2n+1$، کوچکترین مقدار با $n=1$ متناظر خواهد بود (حالت $n=0$ وجود ندارد). بنابراین داریم

$$h\frac{c}{\lambda} = 3\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

اگر فرض کنیم که با الکترونهایی سروکار داریم که جرم آنها $m = 0.9\times10^{-30}\,\mathrm{kg}$ آنگاه

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{3\hbar\pi\lambda}{4mc}\right)^{1/2} \\ &= \left[\frac{3\times3.14(1.05\times10^{-34}\,\mathrm{J.s})(4.5\times10^{-7}\,\mathrm{m})}{4(0.9\times10^{-30}\,\mathrm{kg})(3\times10^{8}\,\mathrm{m/s})}\right]^{1/2} \\ &= 6.4\times10^{-10}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

۸– جعبهٔ بی‌نهایتی را درنظر بگیرید که از $x=-a/2$ تا $x=a/2$ گسترده است. بدون این‌که معادلهٔ

شرودینگر را حلّ کنید، فقط با بررسی شکل توابع‌موج بلافاصله فرمولی کلی برای ویژه‌مقادیر جعبه‌ای که از $x=-a/۲$ تا $x=\circ$ گسترده است بنویسید. (راهنمایی: توابع‌موج در چه نقاطی گره دارند؟)

ویژه‌مقادیر انرژی برای جعبهٔ بی‌نهایت با پهنای a برابرند با $E_n=\hbar^۲\pi^۲n^۲/۲ma^۲$ که در آن $n=۱,۲,۳,\ldots$. جوابهای فرد متناظر با جوابهای زوج تحت $x\to -x$ هستند حال آن که جوابهای زوج متناظر با جوابهای فرد تحت بازتابش هستند. این جوابها در $x=\circ$ صفر می‌شوند و همین جوابها هستند که در شرایط مرزی "نیم چاه" مورد نظر ما را صدق می‌کنند. بنابراین ویژه‌مقادیر انرژی با E_n تعیین می‌شوند که در آن n عدد درست زوج است.

۹– تابع‌موج ذرّه‌ای که در نیمهٔ سمت چپ جعبه‌ای جایگزیده است که دیواره‌هایش در $x=\pm a/۲$ قرار دارند چنین است:

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{۲}{a}} & -\frac{a}{۲}<x<\circ\\ \circ & \circ<x<\frac{a}{۲}\end{cases}$$

(الف) آیا ذرّه در لحظات بعد جایگزیده می‌ماند؟ (ب) احتمال این‌که اندازه‌گیری انرژی ذرّه انرژی حالت پایه را نتیجه دهد چقدر است؟ انرژی اولین حالت برانگیخته را چطور؟

جواب عمومی چنین است

$$\psi(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}C_n u_n(x)\,e^{-iE_nt/\hbar}$$

که در آن ضرایب C_n با رابطهٔ

$$C_n=\int_{-a/۲}^{a/۲}dx\,u_n^*(x)\,\psi(x,\circ)$$

تعریف می‌شوند.

(الف) آشکار است که در زمانهای بعدی تابع‌موج در طرف چپ جعبه جایگزیده نمی‌ماند چون رابطهٔ فاز خاصّی که موجب تداخل کلّی در $x>\circ$ می‌شود در زمانهای $t\neq\circ$ دیگر برقرار نمی‌ماند (بر اثر عامل $e^{-iE_nt/\hbar}$).

(ب) برای تابع‌موج خود داریم

$$\begin{aligned}C_n &= \sqrt{\frac{۲}{a}}\int_{-a/۲}^{\circ}dx\,u_n(x)\\ &= \sqrt{\frac{۲}{a}}\int_{-a/۲}^{\circ}dx\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\\ &= \frac{۲}{a}\left[-\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\right]_{\circ}^{a/۲}\\ &= \frac{۲}{n\pi}\left[۱-\cos\frac{n\pi}{۲}\right]\end{aligned}$$

در اینجا از جواب جعبه‌ای که از $x = ۰$ تا $x = a$ گستره است استفاده کرده‌ایم چون جابجایی جعبه هیچ پیامد فیزیکی ندارد. بنابراین

$$P_۱ = |C_۱|^۲ = \frac{۴}{\pi^۲}$$

و

$$P_۲ = |C_۲|^۲ = \frac{۱}{\pi^۲}|(۱-(-۱))|^۲ = \frac{۴}{\pi^۲}$$

۱۰ــ تابع‌موج مسئلهٔ ۹ را درنظر بگیرید. (الف) احتمال این که اندازه‌گیری انرژی ذرّه انرژی حالت nام را نتیجه دهد چقدر است؟ (ب) با استفاده‌از تساوی

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۸}$$

نشان دهید که مجموع احتمالات برابر با یک است.

(الف) از جواب مسئلهٔ پیشین استفاده می‌کنیم و داریم

$$P_n = |C_n|^۲ = \frac{۴}{n^۲\pi^۲} f_n$$

که در آن به‌ازای n های درست فرد $f_n = ۱$، به‌ازای $n = ۴, ۸, ۱۲, \ldots$ داریم $f_n = ۰$ و به‌ازای $n = ۲, ۶, ۱۰, \ldots$ داریم $f_n = ۴$.

(ب) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=۱}^{\infty} P_n &= \frac{۴}{\pi^۲}\sum_{\text{فرد}} \frac{۱}{n^۲} + \frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۲,۶,۱۰,\ldots} \frac{۴}{n^۲} \\ &= \frac{۸}{\pi^۲}\sum_{\text{فرد}} \frac{۱}{n^۲} \\ &= ۱ \end{aligned}$$

توجه کنید که در صورت مسئله باید گفته می‌شد که جمع به اعداد درست فرد محدود است.

۱۱ــ ویژه‌توابع پتانسیل

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty \quad x < ۰;\ \ x > ۰ \\ &= ۰ \quad ۰ < x < a \end{aligned}$$

به‌شکل زیرند:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

فرض کنید تابع‌موج بهنجار اولیهٔ ذره‌ای در این پتانسیل چنین است:

$$\psi(x,0) = A\left(\frac{\sin \pi x}{a}\right)^5$$

(الف) شکل $\psi(x,t)$ چیست؟ (ب) ثابت A را بدون محاسبهٔ انتگرال $\int d\theta \sin^{10}\theta$ حساب کنید. (ج) احتمال این‌که اندازه‌گیری انرژی نتیجهٔ E_3 را به‌دست بدهد که در آن $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$، چقدر است؟ [راهنمایی: عبارت $([e^{i\theta}-e^{-i\theta}]/2i)^5$ را به‌شکل سری توانی $e^{5i\theta}+\cdots-e^{-5i\theta}$ بسط دهید و سپس آن را به‌شکل سری عبارتهایی شامل $\sin 5\theta$ و غیره درآورید.]

این مسئله را با استفاده از اتحاد حل می‌کنیم. از راهنمایی مسئله پیداست که

$$\begin{aligned}
\sin^5 x &= \left(\frac{1}{2i}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5 \\
&= \frac{1}{16}\frac{1}{2i}\left(e^{5ix}-5e^{3ix} = 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\psi(x,0) = A\sqrt{\frac{a}{2}}\,\frac{1}{16}\left(u_5(x) - 5u_3(x) + 10u_1(x)\right)$$

(الف) داریم

$$\psi(x,t) = A\sqrt{\frac{a}{2}}\,\frac{1}{16}\left(u_5(x)e^{-iE_5t/\hbar} - 5u_3(x)e^{-iE_3t/\hbar} + 10u_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}\right)$$

(ب) با استفاده از $1 = \int_0^a dx|\psi(x,0)|^2$ می‌توانیم ثابت A را حساب کنیم ولی انجام چنین کاری هم‌ارز است با این که مجموع احتمالهای یافتن همهٔ ویژه‌مقادیر ممکن انرژی را برابر با یک قرار دهیم. اینک داریم

$$P_5 = \frac{a}{2}A^2\frac{1}{256};\quad P_3 = \frac{a}{2}A^2\frac{25}{256};\quad P_1 = \frac{a}{2}A^2\frac{100}{256}$$

در نتیجه

$$A^2 = \frac{256}{63a}$$

احتمال یافتن حالتی با انرژی E_3 برابر است با ۲۵/۱۲۶.

۱۲— ذره‌ای در جعبه‌ای است که دیواره‌های آن در $x = \pm a$ قرار دارند. ناگهان دیواره‌ها به $x = \pm b$ $(b > a)$ رانده می‌شوند. احتمال این‌که ذره در حالت پایهٔ پتانسیل جدید یافت شود چقدر

است؟ احتمال این که در اولین حالت برانگیختهٔ یافت شود چقدر است؟ مورد اخیر پاسخ ساده‌ای دارد. این پاسخ چیست؟

تابع‌موج اولیّه به‌ازای $x \leq -a$ و $x \geq +a$ صفر می‌شود. در ناحیهٔ بین این دو مرز این تابع با $\cos \pi x/۲a$ متناسب است زیرا این تابع اوّلین تابع مثلثاتی بدون گره است که در $x = \pm a$ صفر می‌شود. ثابت بهنجارش از شرط زیر تعیین می‌شود

$$\begin{aligned} ۱ &= N^۲ \int_{-a}^{a} dx \cos^۲ \frac{\pi x}{۲a} \\ &= N^۲ \left(\frac{۲a}{\pi}\right) \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} du \cos^۲ u \\ &= N^۲ a \end{aligned}$$

بنابراین داریم $N = \sqrt{۱/a}$. حال این تابع را برحسب ویژه‌حالتهای جعبهٔ پتانسیل بی‌نهایت با مرزهایی در $x = \pm b$ بسط می‌دهیم. می‌نویسیم

$$\sqrt{\frac{۱}{a}} \cos \frac{\pi x}{۲a} = \sum_{n=۱}^{\infty} C_n u_n(x;b)$$

و داریم

$$\begin{aligned} C_n &= \int_{-b}^{b} dx\, u_n(x;b) \psi(x) \\ &= \int_{-a}^{a} dx\, u_n(x;b) \sqrt{\frac{۱}{a}} \cos \frac{\pi x}{۲a} \end{aligned}$$

به‌ویژه پس‌از اندک عملیّات جبری و با استفاده از اتّحاد مثلثاتی

$$\cos u \cos v = \frac{۱}{۲}[\cos(u-v) + \cos(u+v)]$$

داریم

$$\begin{aligned} C_۱ &= \int_{-a}^{a} dx \cos \frac{\pi x}{۲b} \cos \frac{\pi x}{۲a} \\ &= \sqrt{\frac{۱}{ab}} \int_{-a}^{a} dx \frac{۱}{۲} \left[\cos \frac{\pi x(b-a)}{۲ab} + \cos \frac{\pi x(b+a)}{۲ab}\right] \\ &= \frac{۴b\sqrt{ab}}{\pi(b^۲ - a^۲)} \cos \frac{\pi a}{۲b} \end{aligned}$$

بنابراین

$$P_۱ = |C_۱|^۲ = \frac{۱۶ab^۳}{\pi^۲(b^۲-a^۲)^۲} \cos^۲ \frac{\pi a}{۲b}$$

محاسبهٔ $C_۲$ آسان است چون تابع $\psi(x)$ تابعی زوج از x و تابع $u_۲(x)$ تابع فردی است از x و انتگرال روی بازه‌ای متقارن حول $x = ۰$ صفر می‌شود. بنابراین احتمال $P_۲$ برابر با صفر خواهد بود.

۱۳ — محاسبات مثال (۳—۶) را برای ذرّه‌ای انجام دهید که درآغاز در ویژه‌حالت nاُم باشد. نشان دهید که احتمال متناظر با آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌اید:

$$\frac{۲n^۲\pi}{\hbar a^۳}\,\frac{۱-(۱)^n\ \cos pa/\hbar}{\left[(p/\hbar)^۲-(n\pi/a)^۲\right]^۲}$$

این توزیع را رسم کنید. نشان دهید که این توزیع با رابطهٔ عدم‌قطعیّت سازگار است و اگر n بزرگ باشد با اصل توافق وفق می‌دهد.

نخست محاسبات زیر را انجام می‌دهیم

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \int_۰^a dx\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,\frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\\
&= \frac{۱}{i}\sqrt{\frac{۱}{۴\pi\hbar a}}\left(\int_۰^a dx\, e^{ix(n\pi/a+p/\hbar)}-\int_۰^a dx\, e^{ix(-n\pi/a+p/\hbar)}\right)\\
&= \sqrt{\frac{۱}{۴\pi\hbar a}}\left(\frac{e^{iap/\hbar}(-۱)^n-۱}{p/\hbar-n\pi/a}-\frac{e^{iap/\hbar}(-۱)^n-۱}{p/\hbar+n\pi/a}\right)\\
&= \sqrt{\frac{۱}{۴\pi\hbar a}}\,\frac{۲n\pi/a}{(n\pi/a)^۲-(p/\hbar)^۲}\left[(-۱)^n\cos pa/\hbar-۱+i(-۱)^n\sin pa/\hbar\right]
\end{aligned}$$

از این رابطه به‌دست می آوریم

$$\begin{aligned}
P(p) &= |\phi(p)|^۲\\
&= \frac{۲n^۲\pi}{a^۳\hbar}\,\frac{۱-(-۱)^n\cos pa/\hbar}{\left[(n\pi/a)^۲-(p/\hbar)^۲\right]^۲}
\end{aligned}$$

تابع $P(p)$ در $p = n\pi\hbar/a$ بی‌نهایت نمی‌شود ولی در این نقطه قلهٔ معینی دارد. اگر بنویسیم $p/\hbar = n\pi/a+\epsilon$ آنگاه صورت کسر برابر با $۱-\cos a\epsilon \approx a^۲\epsilon^۲/۲$ و مخرج آن برابر با $(۲n\pi\epsilon/a)^۲$ می‌شود و در نتیجه در محلّ قله داریم $P(n\pi\hbar/a) = a/۴\pi\hbar$. این که قله در $p^۲/۲m = \hbar^۲\pi^۲n^۲/۲ma^۲$ رخ می‌دهد با اصل عدم قطعیّت سازگار است زیرا انرژی جنبشی ذرّه، چنانچه از سمت راست این معادله پیداست، همان انرژی ذرّه در جعبهٔ بی‌نهایت به‌پهنای a است. برای تایید آنچه گفتیم باید نشان دهیم که توزیع قلهٔ بلندی به‌ازای n های بزرگ دارد. به‌صورت کسر توجه کنید که به‌ازای $a\epsilon = \pi/۲$ یعنی به‌ازای $p/\hbar = n\pi/a+\pi/۲a = (n+۱/۲)\pi/a$ صفر می‌شود که حاکی از این است که پهنای توزیع برابر است با $\Delta p = \pi\hbar/۲a$. چون تابع‌موج فضای x در بازهٔ $۰ \le x \le a$ جایگزیده است فقط می‌دانیم که $\Delta x = a$. نتیجهٔ $\Delta x\Delta p \approx (\pi/۲)\hbar$ با اصل عدم قطعیّت سازگار است.

۱۴ــ ذرّه‌ای در فضای آزاد درآغاز با بستهٔ‌موج

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۴} e^{-\alpha x^۲/۲}$$

توصیف شده‌است. (الف) احتمال این که اندازه‌حرکت در گسترهٔ $(p, p+dp)$ باشد چقدر است؟ (ب) مقدار چشمداشتی انرژی چقدر است؟ آیا می‌توانید با استدلال ساده‌ای براساس "اندازهٔ" تابع‌موج و اصل عدم‌قطعیّت بگوئید که چرا جواب تقریباً همان است که به‌دست آورده‌اید؟

مراحل زیر را انجام می‌دهیم

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۴} e^{-\alpha x^۲/۲} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۴} \left(\frac{۱}{۲\pi\hbar}\right)^{۱/۲} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha(x-ip/\alpha\hbar)^۲} e^{-p^۲/۲\alpha\hbar^۲} \\
&= \left(\frac{۱}{\pi\alpha\hbar^۲}\right)^{۱/۴} e^{-p^۲/۲\alpha\hbar^۲}
\end{aligned}$$

از اینجا احتمال این که اندازه‌حرکت در گسترهٔ $(p, p+dp)$ باشد برابر است با

$$|\phi(p)|^۲ dp = \left(\frac{۱}{\pi\alpha\hbar^۲}\right)^{۱/۲} e^{-p^۲/\alpha\hbar^۲}$$

برای محاسبهٔ مقدار چشمداشتی انرژی داریم

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{p^۲}{۲m} \right\rangle &= \frac{۱}{۲m} \left(\frac{۱}{\pi\alpha\hbar^۲}\right)^{۱/۲} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p^۲ e^{-p^۲/\alpha\hbar^۲} \\
&= \frac{۱}{۲m} \left(\frac{۱}{\pi\alpha\hbar^۲}\right)^{۱/۲} \frac{\sqrt{\pi}}{۲} (\alpha\hbar^۲)^{۳/۲} \\
&= \frac{\alpha\hbar^۲}{۲m}
\end{aligned}$$

اگر بخواهیم مقدار چشمداشتی انرژی را براساس اصل عدم قطعیّت برآورد کنیم باید توجه کنیم که پهنای بسته‌موج برابر است با $۱/\sqrt{\alpha}$. از اینجا برآورد می‌کنیم که $\Delta p \approx \hbar/\Delta x = \hbar\sqrt{\alpha}$ و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}
\Delta E &\approx \frac{(\Delta p)^۲}{۲m} \\
&= \frac{\alpha\hbar^۲}{۲m}
\end{aligned}$$

این که مقدار دقیق را به‌دست آورده‌ایم از آنجاست که هم تعریف پهنای بسته‌موج و هم مقدار عددی رابطهٔ عدم قطعیّت انعطاف پذیرند.

۱۵ــ تابع‌موج ذرّه‌ای چنین است:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

شار این تابع‌موج چقدر است؟

داریم

$$\begin{aligned} j(x) &= \frac{\hbar}{۲im}\left(\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d\psi^*(x)}{dx}\psi(x)\right) \\ &= \frac{\hbar}{۲im}\left[\left(A^*e^{-ikx} + B^*e^{ikx}\right)\left(ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}\right) - \text{c.c.}\right] \\ &= \frac{\hbar}{۲im}\Big[ik|A|^۲ - ik|B|^۲ + ikAB^*e^{۲ikx} - ikA^*Be^{-۲ikx} \\ &\quad -(-ik)|A|^۲ - (ik)|B|^۲ - (-ik)A^*Be^{-۲ikx} - ikAB^*e^{۲ikx}\Big] \\ &= \frac{\hbar k}{m}\left[|A|^۲ - |B|^۲\right] \end{aligned}$$

این عبارت مجموع دو شار است که یکی مربوط به موج Ae^{ikx} است که از راست می‌آید و دیگری مربوط به موج Be^{-ikx} است که از چپ می‌آید.

۱٦ــ شار ذرّه‌ای که با تابع‌موج زیر توصیف می‌شود چقدر است؟

$$\psi(x) = u(x)e^{ikx}$$

که در آن $u(x)$ تابع حقیقی است.

در اینجا داریم

$$\begin{aligned} j(x) &= \frac{\hbar}{۲im}\left[u(x)e^{-ikx}\left(iku(x)e^{ikx} + \frac{du(x)}{dx}e^{ikx}\right) - \text{c.c.}\right] \\ &= \frac{\hbar}{۲im}\left[\left(iku^۲(x) + u(x)\frac{du(x)}{dx}\right) - \text{c.c.}\right] \\ &= \frac{\hbar k}{m}u^۲(x) \end{aligned}$$

۱۷ــ ویژه‌توابع ذرّه در جعبه‌ای با دیوارهٔ‌های $x = \pm a$ را درنظر بگیرید. بدون این که انتگرالی محاسبه کنید ثابت کنید که به‌ازای تمام ویژه‌توابع مقدار چشمداشتی کمیّت زیر صفر می‌شود:

$$x^۲p^۳ + ۳xp^۳x + p^۳x^۲$$

تحت بازتابش $x \to -x$ هم x و هم $p = -i\hbar\partial/\partial x$ تغییر علامت می‌دهند و از آنجا که تابعی که در مسئله داده‌شده شامل توانهای فردی از x و/یا p است بنابراین تابع فردی است از x. می‌دانیم که ویژه‌توابع جعبه متقارن حول محور x پاریتهٔ معینی دارند. بنابراین $u_n(x) = \pm u_n(x)$ و در نتیجه انتگرالده تحت $x \to -x$ پادمتقارن است. چون انتگرال روی بازه‌ای است که تحت این تبادل متقارن است بنابراین صفر می شود.

۱۸– ثابت کنید که عملگر پاریته که با رابطهٔ

$$P\psi(x) = \psi(-x)$$

تعریف می‌شود عملگر هرمیتی است و ویژه‌توابع P متناظر با ویژه‌مقادیر ۱+ و ۱– متعامدند.

باید ثابت کنیم که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(P\psi(x))^*\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\psi^*(x)P\psi(x)$$

سمت چپ این معادله برابر است با

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\psi^*(-x)\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\psi^*(y)\psi(-y)$$

که با تغییر متغییر $x \to -y$ با سمت راست معادلهٔ بالا برابر است.

ویژه‌توابعی از عملگر P با ویژه‌مقدار ۱+ توابعی هستند که برای آنها $u(x) = u(-x)$، حال آن که آندسته از این ویژه‌توابع که ویژه مقدارشان ۱– است در رابطهٔ $v(x) = -v(-x)$ صدق می‌کنند. حال حاصلضرب نرده‌ای این ویژه‌توابع چنین است

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)v(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,u^*(-y)v(-y)\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,u^*(x)v(x)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)v(x) = ۰$$

۱۹– با استفاده از استدلال پاریته نشان دهید که ضرایب A_n در مثال ۳–۵ به‌ازای n های زوج همه صفر می‌شوند.

رسم نمودار تابع $\psi(x)$ نشان می‌دهد که این تابع حول $x = a/۲$ متقارن است، یعنی انتگرال $\int_۰^a dx\,\psi(x)\,u_n(x)$ برای ویژه‌توابعی از $u_n(x)$ که تحت بازتابش حول این محور فرد هستند صفر خواهد شد و ازاین‌رو به‌ازای $n = ۲, ۴, ۶, \ldots$ این انتگرال صفر می‌شود.

فصل چهارم

پتانسیلهای یک‌بعدی

۱ــ پتانسیل دلخواهی را درنظر بگیرید که در ناحیهٔ معیّنی از محور x جایگزیده‌است. جوابهای معادلهٔ شرودینگر به‌ترتیب در سمت چپ و سمت راست ناحیهٔ پتانسیل داده‌شده‌اند:
نشان دهید که اگر بنویسیم:

$$\begin{aligned} C &= S_{۱۱}A + S_{۱۲}D \\ B &= S_{۲۱}A + S_{۲۲}D \end{aligned}$$

یعنی رابطهٔ امواج "خروجی" با امواج "ورودی" چنین باشد:

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{۱۱} & S_{۱۲} \\ S_{۲۱} & S_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

آنگاه روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} |S_{۱۱}|^{۲} + |S_{۲۱}|^{۲} &= ۱ \\ |S_{۱۲}|^{۲} + |S_{۲۲}|^{۲} &= ۱ \\ S_{۱۱}S^*_{۱۲} + S_{۲۱}S^*_{۲۲} &= ۰ \end{aligned}$$

با استفاده از این رابطه نشان دهید که ماتریس

$$S = \begin{pmatrix} S_{۱۱} & S_{۱۲} \\ S_{۲۱} & S_{۲۲} \end{pmatrix}$$

و ترانهاد آن یکانی هستند. (راهنمایی: از پایستگی شار استفاده کنید و فرض کنید A و D اعداد موهومی دلخواهی هستند.)

جواب در ناحیهٔ سمت چپ پتانسیل $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ است. در مسئلهٔ ۱۵ فصل ۳ نشان دادیم که شار متناظر با این جواب برابر است با

$$j(x) = \frac{\hbar k}{m}(|A|^{۲} - |B|^{۲})$$

جواب در ناحیهٔ سمت راست این پتانسیل $\psi(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$ است و شار متناظر آن برابر است با

$$j(x) = \frac{\hbar k}{m}(|C|^{۲} - |D|^{۲})$$

این دو شار از x مستقل هستند. قانون پایستگی شار ایجاب می‌کند که این شارها با هم برابر باشند و در نتیجه داریم

$$|A|^۲ + |D|^۲ = |B|^۲ + |C|^۲$$

حال اگر دو رابطهٔ

$$C = S_{۱۱}A + S_{۱۲}D$$
$$B = S_{۲۱}A + S_{۲۲}D$$

را در رابطهٔ بالا قرار دهیم خواهیم داشت

$$|A|^۲ + |D|^۲ = (S_{۲۱}A + S_{۲۲}D)(S^*_{۲۱}A^* + S^*_{۲۲}D^*) + (S_{۱۱}A + S_{۱۲}D)(S^*_{۱۱}A^* + S^*_{۱۲}D^*)$$

ضرایب $|A|^۲$ و $|D|^۲$ را از دو با هم مساوی و ضریب AD^* را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$|S_{۲۱}|^۲ + |S_{۱۱}|^۲ = ۱$$
$$|S_{۲۲}|^۲ + |S_{۱۲}|^۲ = ۱$$
$$S_{۱۲}S^*_{۲۲} + S_{۱۱}S^*_{۱۲} = ۰$$

حال ماتریس

$$\begin{pmatrix} S_{۱۱} & S_{۲۱} \\ S_{۱۲} & S_{۲۲} \end{pmatrix}$$

را درنظر می‌گیریم. اگر ماتریس S^{tr} یکانی باشد آنگاه باید $SS^{tr} = ۱$ یا

$$\begin{pmatrix} S_{۱۱} & S_{۲۱} \\ S_{۱۲} & S_{۲۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^*_{۱۱} & S^*_{۱۲} \\ S^*_{۲۱} & S^*_{۲۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

یعنی

$$|S_{۱۱}|^۲ + |S_{۲۱}|^۲ = |S_{۱۲}|^۲ + |S_{۲۲}|^۲ = ۱$$
$$S_{۱۱}S^*_{۱۲} + S_{۲۱}S^*_{۲۲} = ۰$$

اینها همان شرایطی هستند که در بالا آنها را به‌دست آوردیم. از این روابط نتیجه می‌گیریم که ماتریس S^{tr} یکانی است و از این رو ماتریس S یکانی است.

۲– عناصر ماتریس پراکندگی $S_{۱۱}$، $S_{۱۲}$، $S_{۲۱}$ و $S_{۲۲}$ را برای پتانسیل

$$\begin{aligned} V(x) &= ۰ \qquad x < -a \\ &= V_۰ \quad -a < x < a \\ &= ۰ \qquad x < a \end{aligned}$$

را حساب کنید و نشان دهید که شرایط کلیی که در مسئلهٔ ۱ اثبات شد در اینجا برقرارند.

در متن کتاب ضرایب R و T این پتانسیل را پیدا کرده‌ایم. فرض می‌کنیم که $V_0 > 0$. در آنجا با توابع‌موجی به‌شکل $e^{ikx} + Re^{-ikx}$ برای ناحیهٔ $x < -a$ و Te^{ikx} برای ناحیهٔ $x > a$ سروکار داشیم. با نمادگذاری مسئلهٔ ۱ همین فصل به این نتیجه می‌رسیم که اگر $A = 1$ و $D = 0$ آنگاه $C = S_{11} = T$ و $B = S_{21} = R$. برای یافتن عناصر دیگر ماتریس S باید همین مسئله را با $A = 0$ و $D = 1$ در نظر بگیریم. می‌توانیم این مسئله را با تطبیق توابع‌موج در مرزهای حفرهٔ پتانسیل به‌دست آوریم ولی بهتر است که در جوابی که داریم x را به $-x$ تبدیل کنیم و آنگاه پیدا می‌کنیم که $S_{12} = R$ و $S_{22} = T$. به‌آسانی درمی‌یابیم که

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = |R|^2 + |T|^2 = 1$$

و نیز

$$S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = TR^* + RT^* = 2\mathrm{Re}(TR^*)$$

اگر به جوابهای T و R در متن کتاب نگاه کنیم می‌بینیم که حاصلضرب T و R^* به‌شکل (عدد)$\times(-i)$ است و در نتیجه قسمت حقیقی آن برابر است با صفر و تأیید می‌شود که ماتریس S یکانی است.

۳ــ عناصر $S_{11} \cdots S_{22}$ توابعی از k هستند. نشان دهید که

$$\begin{aligned} S_{11}(-k) &= S_{11}^*(k) \\ S_{22}(-k) &= S_{22}^*(k) \\ S_{12}(-k) &= S_{21}^*(k) \end{aligned}$$

یعنی ماتریس پراکندگی دارای خاصیّت زیر است:

$$S(-k) = S^\dagger(k)$$

توابع‌موج سمت چپ و راست را به‌شکل

$$\psi_{\text{چپ}}(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}$$
$$\psi_{\text{راست}}(x) = C\,e^{ikx} + D\,e^{-ikx}$$

درنظر می‌یریم. حال k را به $-k$ تبدیل و همه چیز را مزدوج می‌کنیم. داریم

$$\psi'_{\text{چپ}}(x) = A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}$$
$$\psi'_{\text{راست}}(x) = C^* e^{-ikx} + D^* e^{-ikx}$$

اینک تبدیل $k \to -k$ و مزدوج کردن روابط اصلی را به

$$C^* = S^*_{۱۱}(-k)A^* + S^*_{۱۲}(-k)D^*$$
$$B^* = S^*_{۲۱}(-k)A^* + S^*_{۲۲}(-k)D^*$$

تبدیل می‌کند. از سوی دیگر ما دامنه‌های خروجی C^* و B^* را به دامنه‌های ورودی A^* و D^* مربوط می‌کنیم و در نتیجه روابط مسئلهٔ ۱ چنین می‌شوند

$$C^* = S_{۱۱}(k)A^* + S_{۱۲}(k)D^*$$
$$B^* = S_{۲۱}(k)A^* + S_{۲۲}(k)D^*$$

مقایسه نشان می‌دهد که $S_{۱۱}(k) = S^*_{۱۱}(-k)$، $S_{۲۲}(k) = S^*_{۲۲}(-k)$ و $S_{۱۲}(k) = S^*_{۲۱}(-k)$. این نتایج را می‌توان به‌شکل ماتریسی $\mathbf{S}(k) = \mathbf{S}^\dagger(-k)$ نوشت.

۴- برای پتانسیلهایی که شکلها نشان می‌دهند بدون حل معادلهٔ شرودینگر جوابهای آن را بنویسید و تطبیق ویژه‌توابع و مشتقهای آنها را آنجام ندهید:

(الف) اگر پتانسیل نباشد شاری به‌بزرگی $\hbar k/m$ از چپ فرود می‌آید ($E < V_۰$).

(ب) اگر پتانسیل نباشد شاری به‌بزرگی $\hbar k/m$ از راست فرود می‌آید ($E < V_۰$).

(الف) شار داده‌شده نشان می‌دهد که موجی که از $x = -\infty$ می‌آید به‌شکل e^{ikx} است با دامنهٔ واحد. اینک جوابهای نواحی مختلف را می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
x < b, &\quad e^{ikx} + R\,e^{-ikx}, &\quad k^۲ = ۲mE/\hbar^۲\\
-b < x < -a, &\quad A\,e^{\kappa x} + B\,e^{-\kappa x}, &\quad \kappa^۲ = ۲m(V_۰ - E)/\hbar^۲\\
-a < x < c, &\quad C\,e^{ikx} + D\,e^{-ikx}, &\\
c < x < d, &\quad M\,e^{iqx} + N\,e^{-iqx}, &\quad q^۲ = ۲m(E + V_۱)/\hbar^۲\\
d < x, &\quad T\,e^{ikx} &
\end{aligned}$$

(ب) داریم

$$\begin{aligned}
x < ۰, &\quad u(x) = ۰ &\\
۰ < x < a, &\quad A\sin kx, &\quad k^۲ = ۲mE/\hbar^۲\\
a < x < b, &\quad B\,e^{\kappa x} + C\,e^{-\kappa x}, &\quad \kappa^۲ = ۲m(V_۰ - E)/\hbar^۲\\
b < x &\quad e^{-ikx} + R\,e^{ikx} &
\end{aligned}$$

چون در $x = ۰$ بازتابش کلی داریم بنابراین $|R|^۲ = ۱$.

۵– نشان دهید که شرایط حالت مقیّد (۴–۵۱) و (۴–۵۲) را می‌توان از صفر قرار دادن مخرجها در رابطهٔ (۴–۲۶) به‌ازای $k = i\kappa$ به‌دست آورد. آیا می‌توانید استدلال کنید که چرا این امر تصادفی نیست؟

مخرج کسر رابطهٔ (۴–۲۶) در متن کتاب به‌شکل زیر است

$$D = 2kq\cos 2qa - i(q^2 + k^2)\sin 2qa$$

اگر قرار دهیم $k = i\kappa$ آنگاه داریم

$$D = i\Big(2\kappa q\cos 2qa - (q^2 - \kappa^2)\sin 2qa\Big)$$

مخرج وقتی صفر می‌شود که

$$\begin{aligned}\tan 2qa &= \frac{2\tan qa}{1 - \tan^2 qa}\\ &= \frac{2q\kappa}{q^2 - \kappa^2}\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}\tan qa &= -\frac{q^2 - \kappa^2}{2\kappa q} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{q^2 - \kappa^2}{2\kappa q}\right)^2}\\ &= -\frac{q^2 - \kappa^2}{2\kappa q} \pm \frac{q^2 + \kappa^2}{2\kappa q}\end{aligned}$$

این شرط همان شرط (۴–۵۱) در متن کتاب است.

می‌خواهیم بدانیم که چرا باید چنین باشد. وقتی که $k = i\kappa$ تابع‌موج سمت چپ به‌شکل $e^{-\kappa x} + R(i\kappa)e^{\kappa x}$ است. تابع $e^{-\kappa x}$ در $x \to -\infty$ بی‌نهایت می‌شود و تابع‌موج فقط وقتی معنی پیدا می‌کند که این جمله با جملهٔ دیگری بی‌اثر شود، یعنی وقتی که $R(i\kappa) = \infty$. دانشجویان باید بتوانند ثابت کنند که صورتهای کسرها نیز به‌ازای $k = i\kappa$ یکسان هستند.

۶– ماتریس پراکندگی برای پتانسیل زیر را درنظر بگیرید:

$$\frac{2m}{\hbar^2}V(x) = \frac{\lambda}{a}\delta(x - a)$$

نشان دهید که این ماتریس به‌شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} \frac{2ika}{2ika-\lambda} & \frac{\lambda}{2ika-\lambda}e^{-2ikb} \\ \frac{\lambda}{2ika-\lambda}e^{2ikb} & \frac{2ika}{2ika-\lambda} \end{pmatrix}$$

ثابت کنید که ماتریس فوق یکانی است و اگر عناصر آن بی‌نهایت شوند شرط حالتهای مقیّد به‌دست‌می‌آید (این شرط فقط به‌ازای $\lambda < 0$ رخ می‌دهد).

جواب چنین است

$$\begin{aligned} u(x) &= A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}, \quad x<b \\ &= C\,e^{ikx} + D\,e^{-ikx}, \quad x>b \end{aligned}$$

شرط پیوستگی در $x=b$ به رابطهٔ

$$A\,e^{ikb} + B\,e^{-ikb} = C\,e^{ikb} + D\,e^{-ikb}$$

می‌انجامد و شرط مشتق چنین می‌شود

$$\left(ikA\,e^{ikb} - ikB\,e^{-ikb}\right) - \left(ikC\,e^{ikb} - ikD\,e^{-ikb}\right) = (\lambda/a)\left(A\,e^{ikb} + B\,e^{-ikb}\right)$$

با نمادگذاری

$$A\,e^{ikb} = \alpha; \quad B\,e^{-ikb} = \beta; \quad C\,e^{ikb} = \gamma; \quad D\,e^{-ikb} = \delta$$

این معادلات به‌شکل زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \gamma + \delta \\ ik(\alpha - \beta + \gamma - \delta) &= (\lambda/a)(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

می‌توانیم (γ, β) را برحسب (α, δ) بنویسیم

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2ika}{2ika - \lambda}\alpha + \frac{\lambda}{2ika - \lambda}\delta \\ \beta &= \frac{\lambda}{2ika - \lambda}\alpha + \frac{2ika}{2ika - \lambda}\delta \end{aligned}$$

اینک می‌توانیم این دو رابطه را برحسب A، B، C و D بنویسیم و ماتریس S را به‌دست آوریم

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \dfrac{2ika}{2ika - \lambda} & \dfrac{\lambda}{2ika - \lambda} e^{-2ikb} \\ \dfrac{\lambda}{2ika - \lambda} e^{2ikb} & \dfrac{2ika}{2ika - \lambda} \end{pmatrix}$$

این ماتریس یکانی است چون

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 &= \frac{4k^2a^2}{4k^2a^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda^2}{4k^2a^2 + \lambda^2} = 1 \\ S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* &= \left(\frac{2ika}{2ika - \lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{-2ika - \lambda} e^{-2ikb}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda}{2ika - \lambda} e^{-2ikb}\right)\left(\frac{-2ika}{-2ika - \lambda}\right) = 0 \end{aligned}$$

عناصر ماتریسی به‌ازای $\lambda = ۲ika$ بی‌نهایت می‌شوند. این شرط برحسب $\kappa = -ik$ چنین است $\kappa = -\lambda/۲a = |\lambda|/۲a$.

۷— پتانسیل نوسانگرهماهنگ را درنظر بگیرید که با عبارت توان سهٔ کوچکی مختل شده‌است:

$$V(x) = \frac{۱}{۲}m\omega^۲\left(x^۲ - \frac{x^۳}{a}\right)$$

اگر a در مقایسه‌با بعُد مشخصهٔ $(\hbar/m\omega)^{۱/۲}$ بزرگ باشد حالتها نیمه‌پایدار می‌شوند، چون حالت پائینترین انرژی نمی‌تواند وجود داشته‌باشد (همینکه $x \to \infty$، انرژی به‌مقدار دلخواهی منفی می‌شود). احتمال تونل‌زنی از حالت‌پایه به ناحیه‌ای دور در سمت راست را برآورد کنید.

نما در عبارت $T = e^{-S}$ برابر است با

$$\begin{aligned} S &= \frac{۲}{\hbar}\int_A^B dx\sqrt{۲m[V(x) - E]} \\ &= \frac{۲}{\hbar}\int_A^B dx\sqrt{۲m\left[\frac{m\omega^۲}{۲}\left(x^۲ - \frac{x^۳}{a}\right)\right] - \frac{\hbar\omega}{۲}} \end{aligned}$$

که در آن A و B نقاط برگشت هستند، یعنی نقاطی که در آنها کمّیت داخل علامت رادیکال صفر می‌شود. با تغییر به متغیّرهای بدون بعد زیر این عبارت ساده می‌شود

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}y; \quad \eta = \frac{a}{\sqrt{\hbar/m\omega}} \ll ۱$$

اینک انتگرال چنین است

$$T = ۲\int_{y_۱}^{y_۲} dy\sqrt{y^۲ - \eta y^۳ - ۱}, \quad \eta \ll ۱$$

که در آن حالا نقاط $y_۱$ و $y_۲$ نقاط برگشت هستند. نمودار پتانسیل نشان می‌دهد که $y_۲$ خیلی بزرگ است. در این ناحیه می‌توان از ۱− داخل رادیکال چشم‌پوشید و با تقریب خوبی نوشت $y_۲ = ۱/\eta$. نقطهٔ برگشت دیگر در y نه چندان بزرگی رخ می‌دهد و در نتیجه می‌توانیم عبارت وسط زیر رادیکال را نادیده بگیریم و مقدار $y_۱$ برابر با ۱ می‌شود. بنابراین باید انتگرال

$$\int_۱^{۱/\eta} dy\sqrt{y^۲ - \eta y^۳ - ۱}$$

را برآورد کنیم. بیشینه مقدار انتگرالده در $۰ = ۲y - ۳\eta y^۲$ یعنی در $y = ۲/۳\eta$ رخ می‌دهد. ما سهم از این نقطه به بعد را با نادیده گرفتن ۱− در انتگرالده برآورد می‌کنیم. داریم

$$\int_{۲/۳\eta}^{۱/\eta} dy\, y\sqrt{۱ - \eta y} = \frac{۲}{\eta^۲}\left[\frac{(۱ - \eta y)^{۵/۲}}{۵} - \frac{(۱ - \eta y)^{۳/۲}}{۳}\right]_{۲/۳\eta}^{۱/\eta} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۱۳۵}\frac{۱}{\eta^۲}$$

برآورد این انتگرال در ناحیهٔ $۲/۳\eta < y < ۱$ دشوارتر است. بهرحال با نگهداشتن ۱− در انتگرالده حدّ پائین S را به‌دست می‌آوریم

$$S > ۰/۲۱/\eta^۲$$

ضریب e^S باید در زمان مشخصه‌ای ضرب شود که زمان رفت و برگشت ذرّه با انرژی $\hbar\omega/۲$ در داخل پتانسیل است که باید از مرتبهٔ $۱/\omega$ باشد. بنابراین زمان برآورد شده طولانیتر است از

$$\frac{\text{ثابت}}{\omega} e^{۰/۲/\eta^۲}$$

۸− پتانسیل شکل زیر را درنظر بگیرید:

که در آن

$$V(x) = \frac{\hbar^۲ l(l+۱)}{۲mx^۲} \qquad x > R$$

طول‌عمر ذرّه‌ای با انرژی E را در این پتانسیل برآورد کنید. (خارج پتانسیل سدّ مرکزگریزی در دنیای سه‌بعدی را نمایش می‌دهد.) نتیجه را برحسب نسبت بدون‌بعد l/kR بیان کنید که در آن $E = \hbar^۲k^۲/۲m$ و $l \gg ۱$.

ضریب سدّ برابر است با e^S که در آن

$$S = \frac{۲}{\hbar}\int_{R_۰}^{b} dx \sqrt{\frac{\hbar^۲ l(l+۱)}{x^۲} - ۲mE}$$

در اینجا b مقداری است از x که به‌ازای آن انتگرالده صفر می‌شود، یعنی با $۲mE/\hbar^۲ = k^۲$ داریم $b = \sqrt{l(l+۱)}/k$. اندک عملیّات جبری نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} S &= ۲\sqrt{l(l+۱)}\int_{R_۰/b}^{۱} \frac{du}{u}\sqrt{۱-u^۲} \\ &= ۲\sqrt{l(l+۱)}\left[\ln\frac{۱+\sqrt{۱-(R_۰/b)^۲}}{R_۰/b} - \sqrt{۱-(R_۰/b)^۲}\right] \end{aligned}$$

حال برای l های بزرگ متغیّر $f = R_۰/b \approx kR_۰/l$ را معرفی می‌کنیم. به‌ازای $f \ll ۱$ داریم

$$\begin{aligned} e^S e^S &= \left[\frac{۱+\sqrt{۱-f^۲}}{f}\right]^{۲l} e^{-۲l\sqrt{۱-f^۲}} \\ &\approx \left(\frac{e}{۲}\right)^{-۲l} f^{-۲l} \end{aligned}$$

این عبارت را باید در زمان رفت و برگشت در داخل جعبه ضرب کنیم. ضریب مهمّ $f^{۲l}$ است که بما می‌گوید طول عمر با $(kR_۰)^{-۲l}$ متناسب است و در نتیجه به‌ازای k های کوچک به‌شکل توان l رشد می‌کند. هم‌ارز آن می‌توانیم بگوییم که احتمال واپاشی به‌شکل $(kR_۰)^{۲l}$ افت می‌کند.

۹– استدلال زیر را درنظر بگیرید. اگر الکترونی در پتانسیلی به‌پهنای a قرار داشته‌باشد آنگاه بنابر اصل عدم قطعیّت انرژی جنبشی الکترون بزرگتر از $\hbar^۲/۲ma^۲$ می‌شود. بنابراین برای‌این‌که حالت مقیّدی داشته باشیم انرژی پتانسیل نه‌تنها باید منفی باشد بلکه باید بزرگیش نیز از $\hbar^۲/۲ma^۲$ بزرگتر باشد. از سوی دیگر نشان داده‌ایم که مقدار $V_۰$ هرقدر هم کوچک باشد، مشروط براینکه منفی است در یک‌بعد همیشه حالت مقیّدی خواهیم داشت. اشکال این استدلال چیست؟

این استدلال درست نیست چون الکترون در داخل پتانسیل جایگزیده نیست. در واقع وقتی که پیوند ضعیف باشد تابع‌موج الکترون در ناحیه‌ای به وسعت $R = ۱/a = \hbar\sqrt{۲mE_B}$ گسترده است که برای پیوند ضعیف به‌مراتب بزرگتر است از a.

۱۰– پتانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty \qquad x < ۰ \\ &= ۰ \qquad x > a \\ &= \text{در وسط تابع منفی از } x \end{aligned}$$

فرض کنید که می‌دانیم تابع‌موج در داخل این پتانسیل چنان است که

$$\left.\frac{۱}{u}\frac{du}{dx}\right|_{x=a} = f(E)$$

(الف) انرژی بستگی حالت مقیّد برحسب $f(E_B)$ چقدر است؟

(ب) فرض کنید که تغییرات تابع $f(E)$ نسبت به متغییر E کُند باشد و بتوان آن را ثابت گرفت. اگر تابع‌موج به‌ازای $x > a$ به‌شکل $e^{-ikx} + R(k)e^{ikx}$ باشد دامنهٔ بازتابیدهٔ $R(k)$ را برحسب f حساب کنید و ثابت کنید که $|R(k)|^۲ = ۱$.

برای حالتهای مقیّد جواب در ناحیهٔ $x > a$ باید به‌شکل

$$u(x) = Ae^{-\alpha x}$$

باشد که در آن $\alpha = \sqrt{۲mE_B}/\hbar$. در $x = a$ تطبیق $(۱/u)(du/dx)$ نتیجه می‌دهد

$$-\alpha = f(E_B)$$

اگر $f(E)$ ثابت باشد آنگاه α را می‌دانیم. حتی اگر $f(E)$ در گستره‌ای از انرژی که E های مثبت کوچک را می‌پوشاند فقط اندکی تغییر کند می‌توانیم انرژی پیوندی را برحسب ضریب بازتابش تعیین کنیم. در ناحیهٔ $x > a$ برای انرژیهای مثبت تابع‌موج $u(x)$ به‌شکل $e^{-ikx} + R(k)e^{ikx}$ است و تطبیق نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} f(E) &\approx -\alpha \\ &= -ik\frac{e^{-ika} - Re^{ika}}{e^{-ika} + Re^{ika}} \\ &= -ik\frac{۱ - Re^{۲ika}}{۱ + Re^{۲ika}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$R = e^{-\text{۲}ika}\frac{k+i\alpha}{k-i\alpha}$$

می‌بینیم که $|R|^\text{۲} = \text{۱}$.

چون چاه حول $x = \circ$ متقارن است باید توابع‌موج را در نقاط $x = b$ و $x = a$ تطبیق دهیم. مورد $E < \circ$ را بررسی می‌کنیم. با معرفی $\alpha^\text{۲} = \text{۲}m|E|/\hbar^\text{۲}$ و $q^\text{۲} = \text{۲}m(V_\circ - |E|)/\hbar^\text{۲}$ داریم

<u>جوابهای زوج:</u>

$$\begin{aligned}
u(x) &= \cosh\alpha x, \qquad \circ < x < b \\
&= A\sin qx + B\cos qx, \qquad b < x < a \\
&= C e^{-\alpha x}, \qquad a < x
\end{aligned}$$

تطبیق $(\text{۱}/u)(du/dx)$ در نقاط $x = b$ و $x = a$ به معادلات زیر می‌انجامد

$$\begin{aligned}
\alpha\,\tanh\alpha b &= q\frac{A\cos qb - B\sin qb}{A\sin qb + B\cos qb} \\
-\alpha &= q\frac{A\cos qa - B\sin qa}{A\sin qa + B\cos qa}
\end{aligned}$$

از معادلهٔ اوّل داریم

$$\frac{B}{A} = \frac{q\cos qb - \alpha\tanh\alpha b\,\sin qb}{q\sin qb + \alpha\tanh\alpha b\,\cos qb}$$

و از معادلهٔ دوّم داریم

$$\frac{B}{A} = \frac{q\cos qa + \alpha\sin qa}{q\sin qa - \alpha\cos qa}$$

با مساوی قرار دادن این دو و طرفین و وسطین کردن معادلهٔ به‌دست آمده، پس از اندک عملیّات جبری داریم

$$q^\text{۲}\sin q(a-b) - \alpha\cos q(a-b) = \alpha\tanh\alpha b\,[\alpha\sin q(a-b) + q\cos q(a-b)]$$

یا

$$\frac{\sin q(a-b)}{\cos q(a-b)} = \frac{\alpha q(\tanh\alpha b + \text{۱})}{q^\text{۲} - \alpha^\text{۲}\tanh\alpha b}$$

<u>جوابهای فرد:</u>

تنها فرق این مورد با مورد جوابهای زوج در این است که شکل $u(x)$ به‌ازای $\circ < x < b$ در اینجا $\sinh\alpha x$ است. نتیجه‌ای که خواهیم گرفت همان نتیجهٔ بالاست با این تفاوت که در آن $\tanh\alpha b$ با $\coth\alpha b$ جایگزین شده‌است.

۱۱ــ ذرّه‌ای را در پتانسیل دوتایی شکل زیر درنظر بگیرید. نشان دهید که شرایط ویژه‌مقدار را برای جوابهای زوج و فرد می‌توان به‌ترتیب به‌شکل زیر نوشت:

$$\tan q(a-b) = \frac{qa\,(1+\tanh ab)}{q^2-\alpha^2\tanh ab}$$

و

$$\tan q(a-b) = \frac{qa\,(1+\coth ab)}{q^2-\alpha^2\coth ab}$$

که در آن $-E=\hbar^2\alpha^2/2m$ و $E+V_0=\hbar^2q^2/2m$.

(الف) شرط این که حداکثر دو حالت مقیّد داشته باشیم هم‌ارز است با این که حداکثر یک حالت مقیّد فرد داشته باشیم. شکل مناسب برای این مسئله شکل ۴-۸ کتاب است و ما شرطی را می‌خواهیم که نقطه تلاقی با منحنی تانژانتی که در $3\pi/2$ شروع می‌شود نداشته باشیم. یعنی به‌ازای $y\le 3\pi/2$ داریم

$$\frac{\sqrt{\lambda-y^2}}{y}=0$$

از این معادله داریم $y^2=\lambda$ که در آن $y<3\pi/2$، یعنی $\lambda<9\pi^2/4$.

(ب) شرط این که حداکثر سه حالت مقیّد داشته باشیم به‌این معنی است که حداکثر دو حالت مقیّد زوج داشته باشیم و شکل مناسب این مورد شکل ۴ــ۷ کتاب است. در اینجا شرط ما این است که $y<2\pi$، یعنی $\lambda<4\pi^2$.

(ج) داریم $y=\pi$ و از این رو انرژی پیوندی دوّمین حالت مقیّد زوج صفر است، یعنی $\lambda=\pi^2$. از اینجا دربارهٔ اوّلین حالت مقیّد چه می‌گفت؟ تنها چیزی که می‌دانیم این است که y جواب معادلهٔ (۴ــ۵۴) است که در آن $\lambda=\pi^2$. معادلهٔ (۴ــ۵۴) را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned}\tan^2 y &= \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}\\ &= \frac{\lambda-y^2}{y^2}\\ &= \frac{1-(y^2/\lambda)}{(y^2/\lambda)}\end{aligned}$$

بنابراین شرط داشتن حالت زوج $\cos y=y/\sqrt{\lambda}$ و شرط داشتن حالت فرد $\sin y=y/\sqrt{\lambda}$ است. با قرار دادن $\sqrt{\lambda}=\pi$ به معادله‌ای مثلثاتی می‌رسیم و تنها چیزی که می‌توانیم بگوئیم این است که انرژی پیوندی f حالت زوج بیشتر از انرژی پیوندی حالت فرد است.

۱۲ــ با استفاده از شکلهای ۴ــ۷ و ۴ــ۸ دربارهٔ موارد زیر بحث کنید:

(الف) شرط این‌که حداکثر دو حالت مقید در مسئله داشته باشیم چیست؟

(ب) شرط این‌که حداکثر سه حالت مقید در مسئله داشته باشیم چیست؟

(ج) فرض کنید حالت مقیّد سوّم قید سُستی داشته باشد. دربارهٔ انرژی بستگی حالت مقیّد اوّل و دوّم چه‌می‌توان گفت؟

(الف) این شرط هم‌ارز است با این که حداکثر یک حالت زوج و یک حالت فرد داشته باشیم. با توجه به دو شکل ۴—۷ و ۴—۸ باید به‌ازای $y = \pi$ از معادلهٔ (۴—۵۶) متن کتاب داشته باشیم

$$\lambda < \pi^2$$

(ب) این شرط هم‌ارز است با این که حداکثر دو حالت زوج و یک حالت فرد داشته باشیم. با توجه به دو شکل ۴—۷ و ۴—۸ باید به‌ازای $y = 3\pi/2$ از معادلهٔ (۴—۵۴) متن کتاب داشته باشیم

$$\lambda < 9\pi^2/4$$

۱۳— مثال مسئلهٔ ۱۱ را درنظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که شرایط ویژه‌مقدار وقتی که b به‌سمت صفر میل کندبه‌شرایط چاه‌یکتایی تبدیل می‌شوند.

(ب) موردی را درنظر بگیرید که در آن فاصلهٔ بین مراکز چاهها زیاد می‌شود و پهنای آنها ثابت بماند. نشان دهید که ویژه‌مقادیر زوج و فرد ازنظر مقدار بهم نزدیک می‌شوند. اختلاف انرژی بین پائینترین ویژه‌مقادیر زوج و فرد را برآورد کنید.

(راهنمایی: به‌ازای z های بزرگ داریم $\tanh z = 1 - 2e^{-2z}$. تا پائینترین مرتبهٔ e^{-2z} کار کنید.)

(الف) به‌ازای $b \to 0$، عبارت $\tan q(a-b)$ به $\tan qa$ تبدیل می‌شود و سمت راست به α/q تقلیل می‌یابد. بنابراین برای جوابهای زوج داریم

$$\tan qa = \alpha/q$$

و برای جوابهای فرد داریم

$$\tan qa = -q/a$$

این دو معادله همان دو شرط تک چاه هستند.

(ب) این قسمت مسئله پیچیده‌تر است. نماد $c = a - b$ را معرفی و آن را ثابت فرض می‌کنیم. از نماد $z = ab$ نیز استفاده می‌کنیم. اندیس "۱" را برای جوابهای زوج و اندیس "۲" را برای جوابهای فرد به‌کار خواهیم برد. به‌ازای b های بزرگ داریم

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}} \approx 1 - 2e^{-2z}$$

$$\coth z \approx 1 - 2e^{-2z}$$

حال شرط ویژه‌مقدار جوابهای زوج چنین می‌شود

$$\begin{aligned}\tanh q_1 c &= \frac{q_1\alpha_1(1+1-2e^{-2z_1})}{q_1^2-\alpha_1^2(1-2e^{-2z_1})}\\ &\approx \frac{2q_1\alpha_1}{q_1^2-\alpha_1^2}\left(1-\frac{q_1^2+\alpha_1^2}{q_1^2-\alpha_1^2}e^{-2z_1}\right)\end{aligned}$$

شرط جوابهای فرد از تغییر علامت عبارت e^{-2z} به‌دست می آید

$$\begin{aligned}\tanh q_2 c &= \frac{q_2\alpha_2(1+1+2e^{-2z_1})}{q_2^2-\alpha_2^2(1+2e^{-2z_1})}\\ &\approx \frac{2q_2\alpha_2}{q_2^2-\alpha_2^2}\left(1+\frac{q_2^2+\alpha_2^2}{q_2^2-\alpha_2^2}e^{-2z_1}\right)\end{aligned}$$

در هر دو مورد $q^2+\alpha^2=2mV_0/\hbar^2 g$ ثابت است. این دو شرط ویژه‌مقدار فقط در عبارتهای e^{-2z} با هم فرق دارند و از این رو اختلاف در ویژه‌مقادیر با e^{-2z} متناسب است که در آن z مقدار میانگین $\alpha_1 b$ و $\alpha_2 b$ است. جزئیات این کار را می‌توان انجام داد که تمرینی است با بسط تیلور ولی هیچ بینش فیزیکی جدیدی از آن عاید نمی‌شود.

۱۴ــ قضیهٔ ویریال را ثابت کنید که در یک‌بعد به‌شکل زیر است:

$$\left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle x\frac{dV}{dx}\right\rangle$$

بدین منظور (الف) نشان دهید که برای توابع‌موج حقیقی $\psi(x)$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi(x)x\frac{dV(x)}{dx}\psi(x)=-\langle V\rangle+2\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{d\psi}{dx}xV(x)\psi(x)$$

(ب) با استفاده از معادلهٔ ویژه‌مقدار انرژی ثابت کنید که

$$2\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{d\psi}{dx}xV(x)\psi(x)=E+\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2$$

می نویسیم

$$\begin{aligned}\left\langle x\frac{dV(x)}{dx}\right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi(x)\,x\,\frac{dV(x)}{dx}\,\psi(x)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\left[\frac{d}{dx}(\psi^2 xV)-2\psi\frac{d\psi}{dx}xV-\psi^2 V\right]\end{aligned}$$

جملهٔ اوّل حذف می‌شود چون ψ به‌سرعت به‌سمت صفر میل می‌کند. اینک می‌نویسیم

$$\begin{aligned} -۲\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{d\psi}{dx}xV\psi &= -۲\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{d\psi}{dx}x\left(E+\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲}{dx^۲}\right)\psi \\ &= -E\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,x\frac{d\psi^۲}{dx} - \frac{\hbar^۲}{۲m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^۲ \end{aligned}$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,x\,\frac{d\psi^۲}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{d}{dx}(x\psi^۲) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\psi^۲$$

جملهٔ اوّل حذف می‌شود و جملهٔ دوّم برابر است با ۱. همین کارها را با عبارت دوّم نیز انجام می‌دهیم که در آن فقط انتگرال دوّم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^۲$$

باقی می‌ماند. سرانجام نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \left\langle x\frac{dV(x)}{dx}\right\rangle + \langle V\rangle &= \frac{\hbar^۲}{۲m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^۲ + E\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\psi^۲ \\ &= \left\langle\frac{p^۲}{۲m}\right\rangle + E \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\frac{۱}{۲}\left\langle x\frac{dV}{dx}\right\rangle = \left\langle\frac{p^۲}{۲m}\right\rangle$$

فصل پنجم

ساختار کلّی مکانیک موجی

۱ — با استفاده از رابطهٔ (۵—۲۷) ثابت کنید که برای هر عملگر هرمیتی A داریم:

$$\int_{\infty}^{-\infty} dx\phi^*(x)A\psi(x) = \int_{\infty}^{-\infty} dx(A\phi(x))^*\psi(x)$$

(راهنمایی: در رابطهٔ (۵—۲۷) فرض کنید $\Psi = \phi + \lambda\psi$ که در آن λ عدد موهومی دلخواه است.)

رابطهٔ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(A\Psi(x))^*\Psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\Psi^*(x)A\Psi(x)$$

را بما داده‌اند. فرض می‌کنیم

$$\Psi(x) = \phi(x) + \lambda\psi(x)$$

که در آن λ عدد موهومی دلخواهی است. اگر این عبارت را در معادلهٔ بالا قرار دهیم طرف چپ آن چنین می‌شود

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(A\phi(x) + \lambda A\psi(x))^*(\phi(x) + \lambda\psi(x))$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\left[(A\phi)^*\phi + \lambda(A\phi)^*\psi + \lambda^*(A\psi)^*\phi + |\lambda|^2(A\psi)^*\psi\right]$$

و طرف راست آن برابر می‌شود با

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(\phi(x) + \lambda\psi(x))^*(A\phi(x) + \lambda A\psi(x))$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,[\phi^* A\phi + \lambda^*\psi^* A\phi + \lambda\phi^* A\psi + |\lambda|^2\psi^* A\psi]$$

چون عملگر A هرمیتی است عبارتهای اوّل و چهارم هر دو طرف باهم برابرند. دربارهٔ بقیّهٔ عبارتها چون λ عدد موهومی دلخواهی است ضرایب λ و λ^* مستقل هستند و از این رو می‌توانیم آنها را در دو سوی معادله شناسایی کنیم. برای مثال اگر λ را درنظر بگیریم داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(A\phi(x))^*\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\phi(x)^* A\psi(x)$$

که همان نتیجهٔ مورد نظر ماست.

۲ــ ثابت کنید که اگر A و B هرمیتی باشند آنگاه $(A+B)^n$ نیز هرمیتی است.

چون $A^\dagger = A$ و $B^\dagger = B$، بنابراین $(A+B)^\dagger = (A+B)$. فرض می‌کنیم که $X = (A+B)$. نشان داده‌ایم که X هرمیتی است. حال داریم

$$(X^\dagger)^n = X^\dagger X^\dagger X^\dagger \ldots X^\dagger = XXX\ldots X = (X)^n$$

این نتیجه‌ای است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳ــ نشان دهید که اگر A هرمیتی باشد آنگاه $\left\langle A^۲ \right\rangle$ عدد مثبت است.

داریم

$$\langle A^۲\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) A^۲ \psi(x)$$

حال تعریف می‌کنیم $A\psi(x) = \phi(x)$. آنگاه می‌توانیم رابطه بالا را به‌شکل

$$\begin{aligned}
\langle A^۲\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) A\phi(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (A\psi(x))^* \phi(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (A\psi(x))^* A\psi(x) \geq ۰
\end{aligned}$$

بنویسیم.

۴ــ نشان دهید که اگر H عملگر هرمیتی باشد آنگاه $e^{iH} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(iH)^n}{n!}$ مزدوج هرمیتی عملگر e^{-iH} است.

داریم

$$\begin{aligned}
U &= e^{iH} \\
&= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{i^n H^n}{n!}
\end{aligned}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
U^\dagger &= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-i)^n (H^n)^\dagger}{n!} \\
&= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-i)^n (H^n)}{n!} \\
&= e^{-iH}
\end{aligned}$$

در نتیجه مزدوج هرمیتی e^{iH} برابر است با e^{-iH} مشروط بر این که $H = H^\dagger$.

۵ــ عملگر U یکانی است اگر $UU^\dagger = U^\dagger U = ۱$. ثابت کنید که اگر عملگر H هرمیتی باشد آنگاه عملگر e^{iH} یکانی است.

باید نشان دهیم که

$$e^{iH}e^{-iH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} H^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} H^m = 1$$

جملهٔ خاصّی از این سری، مثلاً جملهٔ $k = m + n$ را انتخاب و ضریب آن را محاسبه می‌کنیم. با $m = k - n$ ضریب H^k برابر است با

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \frac{i^n}{n!}\frac{(-i)^{k-n}}{(k-n)!} &= \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} i^n(-i)^{k-n} \\ &= \frac{1}{k!}(i-i)^k = 0\end{aligned}$$

بنابراین در این حاصلضرب فقط جملهٔ $m = n = 0$ می‌ماند که برابر است با واحد.

۶ــ نامساوی شوارتز را ثابت کنید:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x)\phi(x)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\psi(x)\right) \geq \left|\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x)\psi(x)\right|^2$$

(راهنمایی: از رابطهٔ $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x)|^2 \geq 0$ استفاده کنید که در آن $\Psi(x) = \phi(x) + \lambda\,\psi(x)$ و مقدار کمینهٔ آن را بیابید. توجه کنید که نامساوی شوارتز عکس قضیّهٔ $\cos^2\theta \leq 1$ است که در آن θ زاویهٔ بین دو بردار در فضای سه‌بعدی است.)

می‌نویسیم

$$I(\lambda, \lambda^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (\phi(x) + \lambda\psi(x))^*(\phi(x) + \lambda\psi(x)) \geq 0$$

سمت چپ این نامساوی را به‌اختصار این گونه می‌نویسیم

$$I(\lambda, \lambda^*) = \int |\phi|^2 + \lambda^* \int \psi^*\phi + \lambda \int \phi^*\psi + \lambda\lambda^* \int |\psi|^2$$

چون λ و λ^* مستقل هستند مقدار کمینهٔ این عبارت وقتی رخ می‌دهد که

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial \lambda^*} &= \int \psi^*\phi + \lambda \int |\psi|^2 = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \lambda} &= \int \phi^*\psi + \lambda^* \int |\psi|^2 = 0\end{aligned}$$

اگر این مقادیر λ و λ^* را در عبارت $I(\lambda, \lambda^*)$ قرار دهیم داریم

$$I(\lambda_{\min}, \lambda^*_{\min}) = \int |\phi|^۲ - \frac{\int \phi^*\psi \int \psi^*\phi}{\int |\psi|^۲} \geq ۰$$

از اینجا به نامساوی شوارتز می‌رسیم.

۷– نشان دهید که اگر دو عملگر U و V یکانی باشند آنگاه عملگر UV نیز یکانی است.

داریم $U^\dagger U = ۱$ و $V^\dagger V = ۱$. حال $(UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger$ و در نتیجه داریم

$$(UV)(UV)^\dagger = UVV^\dagger U^\dagger = UU^\dagger = ۱$$

۸– نشان دهید که ویژه‌مقدار λ هر عملگر یکانی U باید به‌شکل e^{ia} باشد. (راهنمایی: عبارت $\int_{-\infty}^{\infty} dx (U\psi(x))^* U\psi(x)$ را به‌دو شکل متفاوت بنویسید.)

معادلهٔ ویژه‌مقدار $U\psi(x) = \lambda\psi(x)$ را درنظر بگیرید که در آن λ ویژه‌مقدار عملگر U است. چون عملگر U یکانی است داریم $U^\dagger U = ۱$. داریم

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (U\psi(x))^* U\psi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) U^\dagger U\psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\psi(x) = ۱\end{aligned}$$

از سوی دیگر با استفاده از معادلهٔ ویژه‌مقدار می‌توانیم این انتگرال را به‌شکل زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (U\psi(x))^* U\psi(x) &= \lambda^*\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\psi(x) \\ &= |\lambda|^۲\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که $|\lambda|^۲ = ۱$، یا هم‌ارز آن $\lambda = e^{ia}$ که در آن a عددی است حقیقی.

۹– نشان دهید که اگر $\psi(x)$ تابع‌موج بهنجار و U عملگر یکانی باشد آنگاه تابع

$$\phi(x) = U\psi(x)$$

نیز بهنجار است.

می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \phi^*(x)\phi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (U\psi(x))^* U\psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) U^\dagger U\psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\psi(x) = ۱\end{aligned}$$

۱۰ــ مجموعهٔ کاملی از ویژه‌توابع متعامد و بهنجار عملگر A را با $u_a(x)$ نمایش داده‌ایم. حال با مفروض بودن عملگر یکانی U می‌توانیم مجموعهٔ $v_a(x)$ را بسازیم که با $v_a(x) = Uu_a(x)$ تعریف می‌شود. نشان دهید که مجموعهٔ جدید ویژه‌توابع نیز متعامدند، یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, v_a^*(x) v_b(x) = \delta_{ab}$$

با نمادگذاری اختصاری می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
\int v_a^* v_b &= \int (Uu_a)^* U u_b \\
&= \int u_a^* U^\dagger U u_b \\
&= \int u_a^* u_b = \delta_{ab}
\end{aligned}$$

۱۱ــ ثابت کنید روابط زیر برای عملگرهایی که جابجا نمی‌شوند برقرارند:

(الف) اگر A و B هرمیتی باشند آنگاه $i[A, B]$ نیز هرمیتی است.

(ب) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

(ج) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (اتّحاد ژاکوبی).

(الف) می‌دانیم که $A^\dagger = A$ و $B^\dagger = B$. حال داریم

$$\begin{aligned}
(i\,[A, B])^\dagger &= (i\,AB - i\,BA)^\dagger \\
&= -i(AB)^\dagger - (-i)(BA)^\dagger \\
&= -i(B^\dagger A^\dagger) + i(A^\dagger B^\dagger) \\
&= -i\,BA + i\,AB \\
&= i[A, B]
\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
[AB, C] &= ABC - CAB \\
&= ABC - ACB + ACB - CAB \\
&= A(BC - CB) - (AC - CA)B \\
&= A[B, C] - [A, C]B
\end{aligned}$$

(ج) اتّحاد ژاکوبی را باز می‌کنیم

$$\begin{aligned}
[A,[B,C]]+[B,[C,A]+[C,[A,B]] &= A(BC-CB)-(BC-CB)A \\
&\quad +B(CA-AC)-(CA-AC)B \\
&\quad +C(AB-BA)-(AB-BA)C \\
&= ABC-ACB-BCA+CBA \\
&\quad +BCA-BAC-CAB+ACB \\
&\quad +CAB-CBA-ABC+BAC
\end{aligned}$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که حاصل این عبارت صفر است.

۱۲— با بسط نماها ثابت کنید:

$$e^{A}Be^{-A}=B+[A,B]+\frac{۱}{۲!}[A,[A,B]]+\frac{۱}{۳!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots$$

داریم

$$e^{A}\,B\,e^{-A}=\left(۱+A+\frac{A^{۲}}{۲!}+\frac{A^{۳}}{۳!}+\ldots\right)B\left(۱-A+\frac{A^{۲}}{۲!}-\frac{A^{۳}}{۳!}+\ldots\right)$$

جملهٔ مستقل از A برابر است با B. جملهٔ مرتبهٔ اوّل در A برابر است با $AB-BA=[A,B]$. جملات مرتبهٔ دو در A را می‌توان این گونه نوشت

$$\begin{aligned}
\frac{A^{۲}B}{۲!}-ABA+\frac{BA^{۲}}{۲!} &= \frac{۱}{۲!}(A^{۲}B-۲ABA+BA^{۲}) \\
&= \frac{۱}{۲!}(A(AB-BA)-(AB-BA)A) \\
&= \frac{۱}{۲!}\{A[A,B]-[A,B]A\} \\
&= \frac{۱}{۲!}[A,[A,B]]
\end{aligned}$$

جملات مرتبهٔ سه در A عبارت‌اند از $A^{۳}B/۳!-A^{۲}BA/۲!+ABA^{۲}/۲!-BA^{۳}/۳!$. می‌توان با بازآرایی این جملات آنها را به‌شکل $(۱/۳!)[A,[A,[A,B]]]$ درآورد.

روش بهتری نیز برای اثبات این اتّحاد داریم. درنظر بگیرید

$$F(\lambda)=e^{\lambda A}\,B\,e^{-\lambda A}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= e^{\lambda A}\, AB\, e^{-\lambda A} - e^{\lambda A}\, BA\, e^{-\lambda A}\\ &= e^{\lambda A}\, [A,B]\, e^{-\lambda A}\end{aligned}$$

بار دیگر دیفرانسیل می‌گیریم

$$\frac{d^۲ F(\lambda)}{d\lambda^۲} = e^{\lambda A}\, [A,[A,B]]\, e^{-\lambda A}$$

اینک از بسط تیلور استفاده می‌کنیم تا $F(۱) = e^{A}\, B\, e^{-A}$ را حساب کنیم

$$\begin{aligned}F(۱) &= F(۰) + F'(۰) + \frac{۱}{۲!}F''(۰) + \frac{۱}{۳!}F'''(۰) + \dots\\ &= B + [A,B] + \frac{۱}{۲!}[A,[A,B]] + \frac{۱}{۳!}[A,[A,[A,B]]] + \dots\end{aligned}$$

۱۳ــ عملگر هرمیتی H را درنظر می‌گیریم که دارای خاصیّت زیر است:

$$H^۴ = ۱$$

ویژه‌مقادیر عملگر H چیست؟ اگر عملگر H هرمیتی نباشد آنگاه ویژه‌مقادیر آن چیست؟

معادلهٔ ویژه‌مقدار $Hu = \lambda u$ را درنظر بگیرید. سه بار دیگر عملگر H را بر دو طرف این معادله عمل می‌کنیم $H^۲ u = \lambda^۲ u$، $H^۳ u = \lambda^۳ u$ و $H^۴ u = \lambda^۴ u$. مسئله می‌گوید $H^۴ = ۱$، یعنی اگر $H^۴$ را بر هر تابعی عمل کنیم حاصل آن ۱ می‌شود. به‌ویژه خواهیم داشت $\lambda^۴ = ۱$. جوابهای این معادله عبارت‌اند از $\lambda = ۱, -۱, i, -i$. چون H هرمیتی است بنابراین ویژه‌مقادیر آن حقیقی هستند. از این رو تنها ویژه‌مقادیر مجاز $\lambda = \pm ۱$ خواهند بود. هرگاه H هرمیتی نباشد آنگاه هر چهار ویژه‌مقدار قابل قبول هستند.

۱۴ــ معادلهٔ (۵ــ۴۱) را درنظر بگیرید. ترکیبهایی خطّی از $u_a^{(۱)}$ و $u_a^{(۲)}$ را پیداکنید که به‌شکل (۵ــ۴۲) هستند و ویژه‌مقادیر $b_۱$ و $b_۲$ را پیداکنید.

داریم

$$\begin{aligned}Bu_a^{(۱)} &= b_{۱۱}u_a^{(۱)} + b_{۱۲}u_a^{(۲)}\\ Bu_a^{(۲)} &= b_{۲۱}u_a^{(۱)} + b_{۲۲}u_a^{(۲)}\end{aligned}$$

اینک توابع $(v_a^{(۱)}, v_a^{(۲)})$ را معرفی می‌کنیم که در معادلات

$$\begin{aligned}Bv_a^{(۱)} &= b_۱ v_a^{(۱)}\\ Bv_a^{(۲)} &= b_۲ v_a^{(۲)}\end{aligned}$$

صدق می‌کنند. با نمادگذاری اختصاری می‌نویسیم

$$\begin{aligned} v_۱ &= \alpha u_۱ + \beta u_۲ \\ v_۲ &= \gamma u_۱ + \delta u_۲ \end{aligned}$$

معادلهٔ ویژه‌مقدار $b_۱$ چنین می‌شود

$$\begin{aligned} b_۱ v_۱ &= B(\alpha u_۱ + \beta u_۲) \\ &= \alpha(b_{۱۱}u_۱ + b_{۱۲}u_۲) + \beta(b_{۲۱}u_۱ + b_{۲۲}u_۲) \end{aligned}$$

سمت چپ این معادله را به‌شکل $b_۱(\alpha u_۱ + \beta u_۲)$ می‌نویسیم. ضرایب $u_۱$ و $u_۲$ را جداگانه از دو طرف با هم برابر قرار می‌دهیم و معادلات زیر را به‌دست می آوریم

$$\begin{aligned} \alpha(b_۱ - b_{۱۱}) &= \beta\, b_{۲۱} \\ \beta(b_۱ - b_{۲۲}) &= \alpha\, b_{۱۲} \end{aligned}$$

حاصلضرب این دو معادله معادلهٔ درجه دوّمی برحسب $b_۱$ را نتیجه می‌دهد که جواب آن برابر است با

$$b_۱ = \frac{b_{۱۱} + b_{۲۲}}{۲} \pm \sqrt{\frac{(b_{۱۱} - b_{۲۲})^۲}{۴} + b_{۱۲}b_{۲۱}}$$

جواب + را برای ویژه‌مقدار $b_۱$ انتخاب می‌کنیم. بررسی معادلهٔ $v_۲$ به‌معادلهٔ مشابهی منتهی می‌شود و جواب − آن را برای ویژه‌مقدار $b_۲$ برمی‌گزنیم. همینکه جوابها را بدانیم می‌توانیم نسبتهای α/β و γ/δ را پیدا کنیم.این دو نسبت کفایت می‌کنند چون از شرط بهنجارش داریم

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = ۱ \quad \text{و} \quad \gamma^۲ + \delta^۲ = ۱$$

۱۵— با استفاده از رابطهٔ جابجایی بین عملگرهای x و p معادلات بستگی زمانی $\langle x\rangle$ و $\langle p\rangle$ را برای هامیلتونی

$$H = \frac{p^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}m(\omega_۱^۲ x^۲ + \omega_۲ x + C)$$

به‌دست آورید.

معادلات حرکت مقادیر چشمداشتی عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle x\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle [H,x]\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\frac{p^۲}{۲m}, x\right]\right\rangle = \frac{i}{m\hbar}\langle p[p,x]\rangle = \frac{p}{m} \\ \frac{d}{dt}\langle p\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle [H,p]\rangle = -\frac{i}{\hbar}\left\langle \left[p, \frac{۱}{۲}m\omega_۱^۲ x^۲ + \omega_۲ x\right]\right\rangle = -m\omega_۱^۲\langle x\rangle - \omega_۲ \end{aligned}$$

۱۶ــ معادلات حرکتی را که در مسئلهٔ ۱۵ به‌دست آوردید حلّ کنید. جوابهای خود را برحسب $\langle x\rangle_\circ$ و $\langle p\rangle_\circ$ بنویسید که مقادیر چشمداشتی در لحظهٔ $t = \circ$ هستند.

دو معادلهٔ بالا را با هم ترکیب می‌کنیم

$$\frac{d^۲}{dx^۲}\langle x\rangle = -\omega_۱^۲\langle x\rangle - \frac{\omega^۲}{m}$$

برای یافتن جوابهای این معادله متغییر

$$X = \langle x\rangle + \frac{\omega_۲}{m\omega_۱^۲}$$

را معرفی می‌کنیم. معادلهٔ X عبارت است از $d^۲X/dt^۲ = -\omega_۱^۲X$ که جواب آن چنین می‌شود

$$X = A\cos\omega_۱t + B\sin\omega_۱t$$

اینک داریم

$$\langle x\rangle_t = -\frac{\omega_۲}{m\omega_۱^۲} + A\cos\omega_۱t + B\sin\omega_۱t$$

در لحظهٔ $t = \circ$ داریم

$$\begin{aligned}\langle x\rangle_\circ &= -\frac{\omega_۲}{m\omega_۱^۲} + A\\ \langle p\rangle_\circ &= m\frac{d}{dt}\langle x\rangle_{t=\circ} = mB\omega_۱\end{aligned}$$

بنابراین می‌توانیم A و B را برحسب مقادیر اوّلیهٔ $\langle x\rangle$ و $\langle p\rangle$ بنویسیم

$$\langle x\rangle_t = -\frac{\omega_۲}{m\omega_۱^۲} + \left(\langle x\rangle_\circ + \frac{\omega_۲}{m\omega_۱^۲}\right) + \frac{\langle p\rangle_\circ}{m\omega_۱}\sin\omega_۱t$$

۱۷ــ الکترونی که در میدان الکتریکی نوسانی حرکت می‌کند با عملگر هامیلتونی

$$H = \frac{p^۲}{۲m} - (eE_\circ\cos\omega t)\,x$$

توصیف شده‌است. عبارتهایی برای بستگی زمانی $\langle x\rangle$، $\langle p\rangle$ و $\langle H\rangle$ حساب کنید.

مثل بالا عمل می‌کنیم یا می‌توانیم از معادلات (۵ــ۵۳) و (۵ــ۵۷) استفاده کنیم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\langle x\rangle &= \frac{۱}{m}\langle p\rangle\\ \frac{d}{dx}\langle p\rangle &= -\left\langle\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right\rangle = eE_\circ\cos\omega t\end{aligned}$$

سرانجام

$$\frac{d}{dx}\langle H\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t}\right\rangle = e\,E_\circ \omega \sin\omega t\,\langle x\rangle$$

۱۸– معادلات حرکتی را که در مسئلهٔ ۱۷ به‌دست آوردید حلّ کنید. جوابهای خود را برحسب $\langle x\rangle_\circ$ و $\langle p\rangle_\circ$ بنویسید که مقادیر چشمداشتی در لحظهٔ $t=\circ$ هستند.

می‌توانیم معادلهٔ دوّم در بالا را حلّ کنیم. جواب آن چنین می‌شود

$$\langle p\rangle_t = \frac{eE_\circ}{\omega}\sin\omega t + \langle p\rangle_{t=\circ}$$

اگر این رابطه را در معادلهٔ اوّل قرار دهیم نتیجه می‌گیریم که

$$\langle x\rangle_t = -\frac{eE_\circ}{m\omega^{۲}}(\cos\omega t - ۱) + \frac{\langle p\rangle_{t=\circ}\,t}{m} + \langle x\rangle_{t=\circ}$$

فصل ششم

روشهای عملگری در مکانیک کوانتومی

۱ــ (الف) نشان دهید که ویژه‌مقادیر هر عملگر هرمیتی A (که برای آن $A = A^\dagger$) حقیقی هستند.
(ب) ثابت کنید که $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. (راهنمایی: از روابط (۶ــ۵) الی (۶ــ۱۰) استفاده کنید و نشان دهید که $\langle\psi|(AB)^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|B^\dagger A^\dagger|\psi\rangle$.)

(الف) داریم

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\langle a|A|a\rangle = a\langle a|a\rangle = a$$

مشروط بر این که ویژه‌حالت A متناظر با ویژه‌مقدار a بهنجار است. مزدوج موهومی این معادله عبارت است از

$$\langle a|A|a\rangle^* = \langle a|A^\dagger|a\rangle = a^*$$

(ب) داریم

$$\langle\psi|(AB)^\dagger|\psi\rangle = \langle(AB)\psi|\psi\rangle = \langle B\psi|A^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|B^\dagger A^\dagger|\psi\rangle$$

۲ــ می‌توانیم ردّپای هر عملگر را به‌شکل زیر تعریف کنیم:

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_n \langle n|A|n\rangle$$

که در آن جمع روی مجموعهٔ کامل حالتها بسته می‌شود. ثابت کنید که $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$. (راهنمایی: از نمایش ۱ برحسب P_n استفاده کنید.)

داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, AB &= \sum_n \langle n|AB|n\rangle = \sum_n \langle n|A\,\mathbf{1}\,B|n\rangle \\ &= \sum_n\sum_m \langle n|A|m\rangle\langle m|B|n\rangle = \sum_n\sum_m \langle m|B|n\rangle\langle n|A|m\rangle \\ &= \sum_m \langle m|B\,\mathbf{1}\,A|m\rangle = \sum_m \langle m|BA|m\rangle = \mathrm{Tr}\, BA \end{aligned}$$

۳— نوسانگر هماهنگ را درنظر بگیرید. ثابت کنید که

$$A|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-۱\rangle$$

از تعریف $|n\rangle$ آغاز می‌کنیم

$$|n\rangle = \frac{۱}{\sqrt{n!}}(A^\dagger)^n|\circ\rangle$$

حال با استفاده از معادلهٔ (۶—۴۷) متن کتاب داریم

$$\begin{aligned} A\,|n\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{n!}}A(A^\dagger)^n|\circ\rangle \\ &= \frac{n}{\sqrt{n!}}(A^\dagger)^{n-۱}|\circ\rangle \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-۱)!}}(A^\dagger)^{n-۱}|\circ\rangle \\ &= \sqrt{n}\,|n-۱\rangle \end{aligned}$$

۴— ثابت کنید که اگر $f(A^\dagger)$ چندجمله‌ای برحسب $A^\dagger$ باشد آنگاه

$$Af(A^\dagger)|\circ\rangle = \frac{df(A^\dagger)}{dA^\dagger}|\circ\rangle$$

[راهنمایی: معادلهٔ (۶—۴۷) را ببینید.]

فرض می‌کنیم

$$f(A^\dagger) = \sum_{n=۱}^{N} C_n (A^\dagger)^n$$

آنگاه با استفاده از معادلهٔ (۶—۴۷) داریم

$$\begin{aligned}
Af(A^\dagger)|۰\rangle &= A\sum_{n=۱}^{N} C_n (A^\dagger)^n|۰\rangle \\
&= \sum_{n=۱}^{N} nC_n (A^\dagger)^{n-۱}|۰\rangle \\
&= \frac{d}{dA^\dagger}\sum_{n=۱}^{N} C_n (A^\dagger)^n|۰\rangle \\
&= \frac{df(A^\dagger)}{dA^\dagger}|۰\rangle
\end{aligned}$$

۵— کمیّت $\langle k|x|n\rangle$ را حساب کنید و نشان دهید که صفر می‌شود مگر این که $k = n \pm ۱$.

از معادلهٔ (۶—۳۶) داریم

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}(A + A^\dagger) \\
p &= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{۲}}(A^\dagger - A)
\end{aligned}$$

اینک

$$\begin{aligned}
\langle k|x|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\langle k|A + A^\dagger|n\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\left(\sqrt{n}\,\langle k|n-۱\rangle + \sqrt{k}\,\langle k-۱|n\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\left(\sqrt{n}\,\delta_{k,n-۱} + \sqrt{n+۱}\,\delta_{k,n+۱}\right)
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $k = n \pm ۱$.

۶— کمیّت $\langle k|p|n\rangle$ را حساب کنید.

به‌شیوهٔ یکسانی نشان می‌دهیم که

$$\begin{aligned}
\langle k|p|n\rangle &= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{۲}}\langle k|A^\dagger - A|n\rangle \\
&= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{۲}}\left(\sqrt{n+۱}\,\delta_{k,n+۱} - \sqrt{n}\,\delta_{k,n-۱}\right)
\end{aligned}$$

۷– با استفاده از نتایج مسایل ٦ و ۷ کمیتهای $\langle k|px|n\rangle$ و $\langle k|xp|n\rangle$ را حساب کنید. راهنمایی: عملگر یکّهٔ ۱ را بین دو عملگر قرار دهید و از شکل زیر استفاده کنید:

$$1 = \sum_k |k\rangle\langle k|$$

در مسایل ۵، ٦، و ۷ بهتر است x و p را برحسب A و $A^\dagger$ بیان کنید.

عبارت زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\langle k|p\,x|n\rangle &= \langle k|p\,\mathbf{1}\,x|n\rangle \\ &= \sum_q \langle k|p|q\rangle\langle q|x|n\rangle\end{aligned}$$

حال از نتایج مسائل ۵ و ٦ استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}&\frac{i\hbar}{2}\Big(\sqrt{k}\,\delta_{k-1,q}-\sqrt{k+1}\,\delta_{k+1,q}\Big)\Big(\sqrt{n}\,\delta_{q,n-1}+\sqrt{n+1}\,\delta_{q,n+1}\Big)\\ &=\frac{i\hbar}{2}\Big(\sqrt{kn}\,\delta_{kn}-\sqrt{(k+1)n}\,\delta_{k+1,n-1}\\ &\qquad+\sqrt{k(n+1)}\,\delta_{k-1,n+1}-\sqrt{(k+1)(n+1)}\,\delta_{k+1,n+1}\Big)\\ &=\frac{i\hbar}{2}\Big(-\delta_{kn}-\sqrt{(k+1)(k+2)}\,\delta_{k+2,n}+\sqrt{n(n+2)}\,\delta_{k,n+2}\Big)\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ عبارت $\langle k|xp|n\rangle$ به‌همین شیوه عمل می‌کنیم. با توجه به این که دو عملگر x و p هرمیتی هستند می‌توانیم محاسبات را کوتاه کنیم

$$\langle k|xp|n\rangle = \langle n|p\,x|k\rangle^*$$

در نتیجه کمیّت مورد نظر از تعویض k و n و مزدوج موهومی کردن عبارت حاصل به‌دست می آید. مزدوج موهومی کردن فقط علامت عبارت را عوض می‌کند و داریم

$$\langle k|xp|n\rangle = -\frac{i\hbar}{2}\Big(-\delta_{kn}-\sqrt{(k+1)(k+2)}\,\delta_{k+2,n}+\sqrt{n(n+2)}\,\delta_{k,n+2}\Big)$$

۸– با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۷ کمیّت $\langle k|[p,x]|l\rangle$ را حساب کنید.

نتیجهٔ مسئلهٔ ۷ به رابطهٔ زیر می‌انجامد

$$\langle k|xp-p\,x|n\rangle = i\hbar\delta_{kn}$$

۹ــ ثابت کنید که کمیّتهای $\langle n|x|n\rangle$ و $\langle n|p|n\rangle$ هر دو صفر می‌شوند.

جواب این مسئله از نتایج مسائل ۵ و ٦ به‌دست می آید.

۱۰ــ کمیّتهای $\left\langle n\left|x^{۲}\right|n\right\rangle$ و $\left\langle n\left|p^{۲}\right|n\right\rangle$ را حساب کنید.

باز هم از روابط

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}(A+A^{\dagger}) \\ p &= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{۲}}(A^{\dagger}-A) \end{aligned}$$

استفاده می‌کنیم تا عبارت عملگری

$$\begin{aligned} x^{۲} &= \frac{\hbar}{۲m\omega}(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger}) = \frac{\hbar}{۲m\omega}\left(A^{۲}+۲A^{\dagger}A+(A^{\dagger})^{۲}+۱\right) \\ p^{۲} &= -\frac{m\omega\hbar}{۲}(A^{\dagger}-A)(A^{\dagger}-A) = -\frac{m\omega\hbar}{۲}\left(A^{۲}-۲A^{\dagger}A+(A^{\dagger})^{۲}-۱\right) \end{aligned}$$

را به‌دست آوریم که در آنها رابطهٔ $[A,A^{\dagger}]=۱$ را به‌کار برده‌ایم. جملات توان دو مقادیر ویژه‌مقدار را به‌اندازهٔ ۲ تغییر می‌دهند بنابراین این جملات در رابطهٔ مورد نظر پدیدار نمی‌شوند. داریم

$$\begin{aligned} \langle n|x^{۲}|n\rangle &= \frac{\hbar}{۲m\omega}(۲n+۱) \\ \langle n|p^{۲}|n\rangle &= \frac{m\omega\hbar}{۲}(۲n+۱) \end{aligned}$$

۱۱ــ با استفاده از تعریف $(\Delta x)^{۲}=\left\langle n\left|x^{۲}\right|n\right\rangle-\langle n|x|n\rangle^{۲}$ و تعریف شبیه آن برای $(\Delta p)^{۲}$ کمیّت $\Delta x\Delta p$ را برای حالت $|n\rangle$ نوسانگر هماهنگ حساب کنید.

با استفاده از نتایج مسائل ۹ و ۱۰ داریم

$$\begin{aligned} (\Delta x)^{۲} &= \frac{\hbar}{۲m\omega}(۲n+۱) \\ (\Delta p)^{۲} &= \frac{m\omega\hbar}{۲}(۲n+۱) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\Delta x\Delta p=\hbar\left(n+\frac{۱}{۲}\right)$$

۱۲ــ هر حالتی مانند $|\alpha\rangle$ که در معادلهٔ $A|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$ صدق کند حالت همدوس نام دارد که در آن A عملگر نابودکنندهٔ نوسانگر هماهنگ است.

(الف) نشان دهید که حالت $|\alpha\rangle$ را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$|\alpha\rangle = C\, e^{\alpha A^\dagger}|\,\circ\rangle$$

(ب) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۴ ثابت C را حساب کنید.
(ج) حالت $|\alpha\rangle$ را برحسب ویژه‌حالتهای عملگر $A^\dagger A$ یعنی $|n\rangle$ بسط دهید و با استفاده از آن احتمال یافتن تعداد n کوانتم در این حالت همدوس را تعیین کنید. این توزیع، توزیع پواسن نام دارد.
(د) کمیّت $\langle\alpha|N|\alpha\rangle$، یعنی تعداد میانگین کوانتمها در این حالت همدوس را حساب کنید که در آن $N = A^\dagger A$.

(الف) ویژه‌حالت در معادلهٔ ویژه‌مقدار $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ را می‌توان به‌شکل

$$|\alpha\rangle = f(A^\dagger)|\,\circ\rangle$$

نوشت. از نتیجهٔ مسئلهٔ ۴ معادلهٔ ویژه‌مقدار فوق را چنین می‌نویسیم

$$\begin{aligned} A f(A^\dagger)|\,\circ\rangle &= \frac{df(A^\dagger)}{dA^\dagger}|\,\circ\rangle \\ &= \alpha\, f(A^\dagger)|\,\circ\rangle \end{aligned}$$

جواب معادله دیفرانسیل $df(x) = \alpha f(x)$ برابر است با $f(x) = C\, e^{\alpha x}$. بنابراین

$$|\alpha\rangle = C\, e^{\alpha A^\dagger}|\,\circ\rangle$$

(ب) ثابت C از شرط بهنجارش $\langle\alpha|\alpha\rangle = ۱$ به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{۱}{C^{۲}} &= \langle\,\circ|e^{\alpha^* A} e^{\alpha A^\dagger}|\,\circ\rangle \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{n!}\left\langle\,\circ\left|\left(\frac{d}{dA^\dagger}\right)^n e^{\alpha A^\dagger}\right|\,\circ\right\rangle \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{|\alpha|^{۲n}}{n!}\left\langle\,\circ\left|e^{\alpha A^\dagger}\right|\,\circ\right\rangle \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{|\alpha|^{۲n}}{n!} = e^{|\alpha|^{۲}} \end{aligned}$$

درنتیجه داریم

$$C = e^{-|\alpha|^{۲}/۲}$$

(ج) حال این حالت را بسط می‌دهیم

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \left\langle \circ \left| \frac{A^n}{\sqrt{n!}} C\, e^{\alpha A^\dagger} \right| \circ \right\rangle \\
&= C\sum_n |n\rangle \frac{۱}{\sqrt{n!}} \left\langle \circ \left| \left(\frac{d}{dA^\dagger}\right)^n e^{\alpha A^\dagger} \right| \circ \right\rangle = C\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle
\end{aligned}
$$

احتمال این که حالت $|\alpha\rangle$ تعداد n کوانتوم داشته باشد برابر است با

$$
\begin{aligned}
P_n &= |\langle n|\alpha\rangle|^۲ \\
&= C^۲ \frac{|\alpha|^{۲n}}{n!} \\
&= \frac{(|\alpha|^۲)}{n!} e^{-|\alpha|^۲}
\end{aligned}
$$

این رابطه به توزیع پواسن معروف است.

(د) سرانجام داریم

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha|N|\alpha\rangle &= \langle\alpha|A^\dagger A|\alpha\rangle \\
&= \alpha^*\alpha = |\alpha|^۲
\end{aligned}
$$

۱۳ــ با استفاده از معادلهٔ حرکت کلی عملگری (٦ــ٦٧) بستگی زمانی عملگر $x(t)$ را برای هامیلتونی

$$
H = \frac{p^۲(t)}{۲m} + mgx(t)
$$

پیدا کنید.

معادلات حرکت چنین هستند

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H, x(t)] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^۲(t)}{۲m}, x(t)\right] = \frac{p(t)}{m} \\
\frac{dp(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[mgx(t), p(t)] = -mg
\end{aligned}
$$

از این دو معادله داریم

$$
\frac{d^۲x(t)}{dt^۲} = -g
$$

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برابر است با

$$
x(t) = \frac{۱}{۲}gt^۲ + \frac{p(\circ)}{m}t + x(\circ)
$$

۱۴– هامیلتونی زیر را درنظر بگیرید که نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی را در میدان الکتریکی خارجی توصیف می‌کند:

$$H = \frac{p^{۲}(t)}{۲m} + \tfrac{۱}{۲} m\omega^{۲} x^{۲}(t) - e\mathcal{E}x(t)$$

با استفاده از رابطهٔ (٦–٦٧) و رابطهٔ جابجایی

$$[p(t), x(t)] = \frac{\hbar}{i}$$

معادلهٔ حرکت عملگرهای $p(t)$ و $x(t)$ را بنویسید. نشان دهید که همان معادلهٔ حرکت کلاسیکی به‌دست می‌آید. عملگرهای $p(t)$ و $x(t)$ را برحسب $p(\circ)$ و $x(\circ)$ تعیین کنید. نشان دهید که

$$[x(t_{۱}), x(t_{۲})] \neq \circ, \qquad t_{۱} \neq t_{۲}$$

این رابطه نشان می‌دهد که عملگرهایی که در یک لحظه جابجا می‌شوند در لحظات مختلف ممکن است جابجا نشوند.

داریم

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

و نیز

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{i}{\hbar}\Big[\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}x^{۲} + e\mathcal{E}x, p\Big] \\ &= \frac{i}{\hbar}\Big(\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}x[x,p] + \frac{۱}{۲}m\omega^{۲}[x,p]x + e\mathcal{E}[x,p]\Big) \\ &= -m\omega^{۲}x - e\mathcal{E} \end{aligned}$$

پس از دیفرانسیل‌گیری از معادلهٔ اوّل نسبت به t و بازآرایی جملات داریم

$$\begin{aligned} \frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} &= -\omega^{۲}x - \frac{e\mathcal{E}}{m} \\ &= -\omega^{۲}\left(x + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega^{۲}}\right) \end{aligned}$$

جواب این معادله برابر است با

$$\begin{aligned} x + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega^{۲}} &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ &= \left(x(\circ) + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega^{۲}}\right)\cos\omega t + \frac{p(\circ)}{m\omega}\sin\omega t \end{aligned}$$

اینک می‌توانیم رابطهٔ جابجایی $[x(t_۱), x(x_۲)]$ را حساب کنیم که به‌ازای $t_۱ = t_۲$ باید صفر شود. در این محاسبه فقط جابجایی $[p(۰), x(۰)]$ دخیل است. داریم

$$\begin{aligned}
[x(t_۱), x(x_۲)] &= \left[x(۰)\cos\omega t_۱ + \frac{p(۰)}{m\omega}\sin\omega t_۱, x(۰)\cos\omega t_۲ + \frac{p(۰)}{m\omega}\sin\omega t_۲\right] \\
&= \frac{i\hbar}{m\omega}(\cos\omega t_۱ \sin\omega t_۲ - \sin\omega t_۱ \cos\omega t_۲) \\
&= \frac{i\hbar}{m\omega}\sin\omega(t_۲ - t_۱)
\end{aligned}$$

۱۵– با استفاده از رابطهٔ (۶–۵۸) ویژه‌توابع $n = ۱, ۲, ۳$ را پیدا کنید. (توجه: در بسط دو جمله‌ای ترتیب عملگرهای x و d/dx را رعایت کنید.)

چنانچه بنویسیم

$$\sqrt{\frac{m\omega}{۲\hbar}} = a, \qquad \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}} = \frac{۱}{۲a}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
v_n(x) &= \sqrt{n!}\left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{۱/۴} u_n(x) \\
&= \left(ax - \frac{۱}{۲a}\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\alpha^۲ x^۲}
\end{aligned}$$

حال با نمادگذاری $y = ax$ داریم

$$\begin{aligned}
v_۱(y) &= \left(y - \frac{۱}{۲}\frac{d}{dy}\right) e^{-y^۲} = (y + y)e^{-y^۲} = ۲ye^{-y^۲} \\
v_۲(y) &= \left(y - \frac{۱}{۲}\frac{d}{dy}\right)\left(۲ye^{-y^۲}\right) = \left(۲y^۲ - ۱ + ۲y^۲\right)e^{-y^۲} \\
&= \left(۴y^۲ - ۱\right)e^{-y^۲}
\end{aligned}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
v_۳(y) &= \left(y - \frac{۱}{۲}\frac{d}{dy}\right)\left[(۴y^۲ - ۱)e^{-y^۲}\right] \\
&= \left(۴y^۳ - y - ۴y + y(۴y^۲ - ۱)\right)e^{-y^۲} \\
&= (۸y^۳ - ۶y)e^{-y^۲}
\end{aligned}$$

حال باید $x\sqrt{\frac{m\omega}{۲\hbar}} = y$ را جایگزین کرد.

۱۶ــ با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۴ نشان دهید که

$$e^{\lambda A} f(A^\dagger)|\circ\rangle = f(A^\dagger + \lambda)|\circ\rangle$$

(راهنمایی: برای حل این مسئله نما را به‌شکل سری بسط دهید و از روابط

$$f(x+a) = \sum \frac{a^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

$$f^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

استفاده کنید.)

در مسئلهٔ ۴ ثابت کردیم که

$$A\, f(A^\dagger)|\circ\rangle = \frac{df(A^\dagger)}{dA^\dagger}|\circ\rangle$$

اعمال مکرّر عملگر A بر این معادله نتیجه می‌دهد

$$A^n\, f(A^\dagger)|\circ\rangle = \frac{d^n f(A^\dagger)}{dA^{\dagger n}}|\circ\rangle$$

با استفاده از این رابطه داریم

$$\begin{aligned} e^{\lambda A} f(A^\dagger)|\circ\rangle &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} A^n f(A^\dagger)|\circ\rangle \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{d}{dA^\dagger}\right)^n f(A^\dagger)|\circ\rangle \\ &= f(A^\dagger + \lambda)|\circ\rangle \end{aligned}$$

۱۷ــ رابطهٔ عملگری زیر را با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۶ ثابت کنید:

$$e^{\lambda A} f(A^\dagger) e^{-\lambda A} = f(A^\dagger + \lambda)$$

توجه کنید که هر رابطه عملگری که بر حالت دلخواهی عمل کند باید برقرار باشد. این حالت دلخواه را به‌شکل $g(A^\dagger)|\circ\rangle$ می‌گیریم. بنابراین باید ثابت کنیم که

$$e^{\lambda A} f(A^\dagger) e^{-\lambda A} g(A^\dagger)|\circ\rangle = f(A^\dagger + \lambda) g(A^\dagger)|\circ\rangle$$

این رابطه را می‌توان با استفاده از رابطهٔ کلی زیر نیز ثابت کرد:

$$e^{\lambda A} A^\dagger e^{-\lambda A} = A^\dagger + \lambda[A, A^\dagger] + \frac{\lambda^{۲}}{۲!}[A,[A,A^\dagger]] + \cdots$$

از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۶ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\begin{aligned} e^{\lambda A} f(A^{\dagger}) e^{-\lambda A} g(A^{\dagger})|\circ\rangle &= e^{\lambda A} f(A^{\dagger}) g(A^{\dagger}-\lambda)|\circ\rangle \\ &= f(A^{\dagger}+\lambda) g(A^{\dagger})|\circ\rangle \end{aligned}$$

چون این عبارت برای هر حالتی به‌شکل $g(A^{\dagger})|\circ\rangle$ برقرار است داریم

$$e^{\lambda A} f(A^{\dagger}) e^{-\lambda A} = f(A^{\dagger}+\lambda)$$

در این رابطه از اوّلین فرمول جواب مسئله ۱۶ استفاده کردیم که به $[A, A^{\dagger}]$ بستگی داشت. در حالت کلّی فرمول بیکر—هاوسدورف را داریم که هم اینک آن را اثبات می‌کنیم

تعریف می‌کنیم

$$F(\lambda) = e^{\lambda A} A^{\dagger} e^{-\lambda A}$$

نسبت به λ دیفرانسیل می‌گیریم

$$\begin{aligned} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= e^{\lambda A} A A^{\dagger} e^{-\lambda A} - e^{\lambda A} A^{\dagger} A e^{-\lambda A} \\ &= e^{\lambda A}[A, A^{\dagger}] e^{-\lambda A} \\ &\equiv e^{\lambda A} C_{۱} e^{-\lambda A} \end{aligned}$$

تکرار دیفرانسیل‌گیری نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \frac{d^{۲}F(\lambda)}{d\lambda^{۲}} &= e^{\lambda A}[A,[A,A^{\dagger}]]e^{-\lambda A} \equiv e^{\lambda A} C_{۲} e^{-\lambda A} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{n}F(\lambda)}{d\lambda^{n}} &= e^{\lambda A}[A,[A,[A,\ldots[A,A^{\dagger}]]]\ldots]e^{-\lambda A} \equiv e^{\lambda A} C_{n} e^{-\lambda A} \end{aligned}$$

که در آن A به تعداد n بار در C_n پدیدار می‌شود. حال بسط تیلور $F(\lambda+\sigma)$ را می‌نویسیم

$$\begin{aligned} F(\lambda+\sigma) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!} \frac{d^n F(\lambda)}{d\lambda^n} \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!} e^{\lambda A} C_n e^{-\lambda A} \end{aligned}$$

حال اگر قرار دهیم $\lambda = \circ$ داریم

$$F(\sigma) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!} C_n$$

یعنی

$$e^{\sigma A}A^{\dagger}e^{-\sigma A} = A^{\dagger} + \sigma\left[A, A^{\dagger}\right] + \frac{\sigma^{۲}}{۲}[A, [A, A^{\dagger}]] + \frac{\sigma^{۳}}{۳!}[A, [A, [A, A^{\dagger}]]] + \dots$$

توجه کنید که چون $[A, A^{\dagger}] = ۱$ آنگاه فقط دو جملهٔ اوّل باقی می‌مانند و داریم

$$\begin{aligned} e^{\sigma A}f(A^{\dagger})e^{-\sigma A} &= f(A^{\dagger} + \sigma[A, A^{\dagger}]) \\ &= f(A^{\dagger} + \sigma) \end{aligned}$$

۱۸– با استفاده از رابطهٔ قبل ثابت کنید که

$$e^{aA+bA^{\dagger}} \equiv e^{aA}e^{bA^{\dagger}}e^{-(۱/۲)ab}$$

روش اثبات چنین است: فرض کنید

$$e^{\lambda(aA+bA^{\dagger})} \equiv e^{\lambda aA}F(\lambda)$$

از طرفین نسبت به λ مشتق می‌گیریم

$$(aA + bA^{\dagger})e^{\lambda(aA+bA^{\dagger})} = aAe^{\lambda aA}F(\lambda) + e^{\lambda aA}\frac{dF}{d\lambda}$$

یعنی

$$(aA + bA^{\dagger})e^{\lambda aA}F(\lambda) = aAe^{\lambda aA}F(\lambda) + e^{\lambda aA}\frac{dF}{d\lambda}$$

با استفاده از مسئلهٔ ۱۷ نشان دهید که

$$\frac{dF}{d\lambda} = (bA^{\dagger} - \lambda ab)F(\lambda)$$

بنابراین

$$F(\lambda) = e^{\lambda bA^{\dagger}}e^{-(۱/۲)\lambda^{۲}ab}$$

روشی را دنبال می‌کنیم که در راهنمایی مسئله به‌آن اشاره شده‌است. تابع $F(\lambda)$ را با

$$e^{\lambda\left(aA+bA^{\dagger}\right)} = e^{\lambda aA}F(\lambda)$$

تعریف می‌کنیم و نسبت به λ دیفرانسیل می‌گیریم

$$(aA + bA^{\dagger})e^{\lambda aA}F(\lambda) = aAe^{\lambda A}F(\lambda) + e^{\lambda aA}\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$$

اوّلین جمله از دو طرف حذف می‌شود و اگر طرفین را از چپ در $e^{-\lambda a A}$ ضرب کنیم داریم

$$\begin{aligned}\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= e^{-\lambda a A} b A^\dagger e^{\lambda a A} F(\lambda) \\ &= bA^\dagger - \lambda ab[A, A^\dagger] F(\lambda)\end{aligned}$$

که در آن $[A, A^\dagger]$ با A جابجا می‌شود. حال می‌توانیم نسبت به λ انتگرال بگیریم و پس از انتگرال‌گیری قرار دهیم $\lambda = ۱$. داریم

$$\begin{aligned}F(۱) &= e^{bA^\dagger - ab[A, A^\dagger]/۲} \\ &= e^{bA^\dagger} e^{-ab/۲}\end{aligned}$$

بنابراین

$$e^{aA + bA^\dagger} = e^{aA} e^{bA^\dagger} e^{-ab/۲}$$

۱۹— روش مسئلهٔ ۱۷ را به‌کاربرید و نشان دهید که

$$e^{\lambda A^\dagger} f(A) e^{-\lambda A^\dagger} = f(A - \lambda)$$

از اینجا و با استفاده از روشی که برای حل مسئلهٔ ۱۸ عنوان کردیم نشان دهید که

$$e^{aA + bA^\dagger} = e^{bA^\dagger} e^{aA} e^{(۱/۲)ab}$$

می‌توانیم روش مسئلهٔ ۱۷ را پیش بگیریم ولی راه ساده‌تر این است که مزدوج هرمیتی نتیجهٔ این مسئله را حساب کنیم. اگر تابع f و λ حقیقی باشند آنگاه

$$e^{-\lambda A^\dagger} f(A) e^{\lambda A^\dagger} = f(A + \lambda)$$

با تبدیل λ به $-\lambda$ داریم

$$e^{\lambda A^\dagger} f(A) e^{-\lambda A^\dagger} = f(A - \lambda)$$

مراحل بعدی آنهایی هستند که در مسئلهٔ ۱۸ به‌کار بردیم.

۲۰— با استفاده از روش مسئلهٔ قبل نشان دهید که

$$e^{ikx} = e^{ik\sqrt{\hbar/۲m\omega}A^\dagger} e^{ik\sqrt{\hbar/۲m\omega}A} e^{-(\hbar k^۲/۴m\omega)}$$

توجه کنید که

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}(A + A^\dagger)$$

با استفاده از این رابطه کمیّت

$$\langle \circ \left| e^{ikx} \right| \circ \rangle$$

را حساب کنید.

برای مسئلهٔ نوسانگر هماهنگ داریم

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\,(A + A^\dagger)$$

یعنی e^{ikx} شکلی را دارد که در مسئلهٔ ۱۹ داده شده‌است که در آن $a = b = ik\sqrt{\hbar/۲m\omega}$. داریم

$$e^{ikx} = e^{ik\sqrt{\hbar/۲m\omega}A^\dagger} e^{ik\sqrt{\hbar/۲m\omega}A} e^{-\hbar k^۲/۴m\omega}$$

چون $\circ = \langle \circ | A^\dagger$ و $A|\circ\rangle = \circ$ داریم

$$\langle \circ \left| e^{ikx} \right| \circ \rangle = e^{-\hbar k^۲/۴m\omega}$$

۲۱– نشان دهید که نتیجه‌ای که هم‌اینک به‌دست‌آوردید با نتیجه‌ای که از

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u_\circ^*(x) e^{ikx} u_\circ(x)$$

به‌دست می‌آید یکی است.

با دانستن $u_\circ(x) = (m\omega/\pi\hbar)e^{-m\omega x^۲/۲\hbar}$ روش محاسبهٔ دیگر چنین است

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{۱/۲} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx} e^{-m\omega x^۲/\hbar} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{۱/۲} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x - \frac{ik\hbar}{۲m\omega}\right)^۲} e^{-\frac{\hbar k^۲}{۴m\omega}}$$

این انتگرال انتگرال گوسی ساده‌ای است و $\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-m\omega y^۲/\hbar} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ که با ضریب جلویی انتگرال یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین دو نتیجه با هم وفق می‌دهند.

فصل هفتم

اندازه‌حرکت زاویه‌ای

۱ــ مولکول CN را درنظر بگیرید که می‌توان آن را با دمبلی توصیف کرد که از دو جرم $M_۱$ و $M_۲$ تشکیل شده است که با میلهٔ صلبی به‌طول a بهم متّصل هستند. این دمبل در صفحه‌ای حول محوری دوران می‌کند که از مرکز جرمش گذشته و بر صفحه عمود است.

(الف) هامیلتونی این حرکت را بنویسید.

(ب) طیف انرژی این مولکول چیست؟

(ج) رابطه‌ای برای اختلاف انرژی بین حالت پایه و اولّین حالت برانگیخته برحسب جرمها و a بنویسید.

(الف) دستگاهی که مطالعه می‌کنیم درجهٔ آزادی دورانی دارد و در نتیجه می‌تواند حول دو محور متعامد عمود بر میلهٔ صلبی که دو جرم را بهم وصل می‌کند دوارن کند. اگر میله را محور z فرض کنیم آنگاه هامیلتونی به‌شکل

$$\begin{aligned} H &= \frac{L_x^۲ + L_y^۲}{۲I} \\ &= \frac{\mathbf{L}^۲ - L_z^۲}{۲I} \end{aligned}$$

درمی‌آید که در آن I گشتاور لختی دمبل است.

(ب) چون حول محور z دورانی نداریم ویژه‌مقدار L_z صفر است و از این رو ویژه‌مقادیر این هامیلتونی برابرند با

$$E = \frac{\hbar^۲ l(l+۱)}{۲I}, \qquad l = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$$

(ج) برای این که طیف انرژی دستگاه را به‌دست آوریم باید گشتاور لختی آن را بدانیم. داریم

$$I = M_{\text{میله}} a^۲$$

که در آن جرم کاهش‌یافته برابر است با

$$\begin{aligned} M_{\text{میله}} &= \frac{M_{\text{C}}M_{\text{N}}}{M_{\text{C}}+M_{\text{N}}} \\ &= \frac{۱۲\times ۱۴}{۱۲+۱۴} M_{\text{نوکلئون}} \\ &= ۶٫۴۶\, M_{\text{نوکلئون}} \end{aligned}$$

اگر فاصلهٔ بین دو جرم دمبل a را برحسب انگستروم بیان کنیم داریم

$$\begin{aligned} I &= ۶٫۴۶ \times (۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,\text{kg})(۱۰^{-۱۰}\,\text{m/Å})^{۲} a_{\text{Å}}^{۲} \\ &= ۱٫۰۸ \times ۱۰^{-۴۶} a_{\text{Å}}^{۲} \end{aligned}$$

اختلاف انرژی بین حالت پایه و اوّلین حالت برانگیخته برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{۲\hbar^{۲}}{۲I} \\ &= \frac{(۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۳۴}\,\text{J.s})^{۲}}{۱٫۰۸ \times ۱۰^{-۴۶} a_{\text{Å}}^{۲}\,\text{kg.m}^{۲}} \times \frac{۱}{۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\,\text{J/eV}} \\ &= \frac{۶٫۴ \times ۱۰^{-۴}}{a_{\text{Å}}^{۲}}\,\text{eV} \end{aligned}$$

۲– هماهنگهای کروی را برای $l = ۰, ۱, ۲$ برحسب x، y، و z بنویسید.

از روابط

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \sin\theta\cos\phi \\ \frac{y}{r} &= \sin\theta\sin\phi \\ \frac{z}{r} &= \cos\theta \end{aligned}$$

استفاده می‌کنیم تا بنویسیم

$$\begin{aligned} Y_{۱,۱} &= -\sqrt{\frac{۳}{۸\pi}}e^{i\phi}\sin\theta = -\sqrt{\frac{۳}{۸\pi}}\left(\frac{x+iy}{r}\right) \\ Y_{۱,۰} &= \sqrt{\frac{۳}{۴\pi}}\cos\theta = \sqrt{\frac{۳}{۴\pi}}\left(\frac{z}{r}\right) \\ Y_{۱,-۱} &= (-۱)Y_{۱,۱}^{*} = \sqrt{\frac{۳}{۸\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta = \sqrt{\frac{۳}{۸\pi}}\left(\frac{x-iy}{r}\right) \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$
\begin{aligned}
Y_{۲,۲} &= \sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}}\, e^{۲i\phi}\sin^۲\theta = \sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}}(\cos ۲\phi + i\sin ۲\phi)\sin^۲\theta \\
&= \sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}}(\cos^۲\phi - \sin^۲\phi + ۲i\sin\phi\cos\phi)\sin^۲\theta \\
&= \sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}}\left(\frac{x^۲ - y^۲ + ۲ixy}{r^۲}\right) \\
Y_{۲,۱} &= -\sqrt{\frac{۱۵}{۸\pi}}\, e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta = -\sqrt{\frac{۱۵}{۸\pi}}\,\frac{(x+iy)z}{r^۲}
\end{aligned}
$$

و

$$
Y_{۲,۰} = \sqrt{\frac{۵}{۱۶\pi}}(۳\cos^۲\theta - ۱) = \sqrt{\frac{۵}{۱۶\pi}}\left(\frac{۲z^۲ - x^۲ - y^۲}{r^۲}\right)
$$

برای به‌دست آوردن $Y_{۲,-۱}$ و $Y_{۲,-۲}$ می‌توانیم از معادلهٔ (۷—۴۶) متن کتاب استفاده کنیم.

۳— کمیتهای $\langle l, m_۱|L_x|l, m_۲\rangle$ و $\langle l, m_۱|L_y|l, m_۲\rangle$ را حساب کنید.

با استفاده از $L_\pm = L_x \pm iL_y$ عملگرهای $L_x = \frac{۱}{۲}(L_+ + L_-)$ و $L_y = \frac{i}{۲}(L_- - L_+)$ را حساب می‌کنیم. داریم

$$
\begin{aligned}
\langle l, m_۱|L_x|l, m_۲\rangle &= \frac{۱}{۲}\langle l, m_۱|L_+|l, m_۲\rangle + \frac{۱}{۲}\langle l, m_۱|L_-|l, m_۲\rangle \\
\langle l, m_۱|L_y|l, m_۲\rangle &= \frac{i}{۲}\langle l, m_۱|L_-|l, m_۲\rangle - \frac{i}{۲}\langle l, m_۱|L_+|l, m_۲\rangle
\end{aligned}
$$

و در سمت راست این معادلات قرار می‌دهیم

$$
\begin{aligned}
\langle l, m_۱|L_+|l, m_۲\rangle &= \hbar\sqrt{(l - m_۲)(l + m_۲ + ۱)}\,\delta_{m_۱, m_۲+۱} \\
\langle l, m_۱|L_-|l, m_۲\rangle &= \hbar\sqrt{(l + m_۲)(l - m_۲ + ۱)}\,\delta_{m_۱, m_۲-۱}
\end{aligned}
$$

۴— کمیتهای $\langle l, m_۱|L_x^۲|l, m_۲\rangle$ و $\langle l, m_۱|L_y^۲|l, m_۲\rangle$ را حساب کنید. (راهنمایی: اگر از $L_\pm$ و $L_\pm^۲$ و الاآخر استفاده کنید محاسبات ساده می‌شود.)

باز هم برای انجام محاسبات زیر از روابط $L_x = \frac{۱}{۲}(L_+ + L_-)$ و $L_y = \frac{i}{۲}(L_- - L_+)$ استفاده می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
L_x^۲ &= \frac{۱}{۴}(L_+ + L_-)(L_+ + L_-) \\
&= \frac{۱}{۴}(L_+^۲ + L_-^۲ + \mathbf{L}^۲ - L_z^۲ + \hbar L_z + \mathbf{L}^۲ - L_z^۲ - \hbar L_z)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{۱}{۴}L_+^۲ + \frac{۱}{۴}L_-^۲ + \frac{۱}{۲}\mathbf{L}^۲ - \frac{۱}{۲}L_z^۲$$

داریم

$$\begin{aligned}\langle l, m_۱|L_+^۲|l, m_۲\rangle &= \hbar\sqrt{(l-m_۲)(l+m_۲+۱)}\,\langle l, m_۱|L_+|l, m_۲+۱\rangle \\ &= \hbar^۲\left((l-m_۲)(l+m_۲+۱)(l-m_۲-۱)(l+m_۲+۲)\right)^{۱/۲}\delta_{m_۱, m_۲+۲}\end{aligned}$$

و

$$\langle l, m_۱|L_-^۲|l, m_۲\rangle = \langle l, m_۲|L_+^۲|l, m_۱\rangle^*$$

که به‌آسانی از نتیجه پیشین به‌دست می‌آید مشروط بر این که جای $m_۱$ و $m_۲$ را با هم عوض کنیم.

دو جمله‌ای که می‌مانند نتیجه می‌دهند

$$\frac{۱}{۲}\langle l, m_۱|(\mathbf{L}^۲ - L_z^۲)^۲|l, m_۲\rangle = \frac{\hbar^۲}{۲}(l(l+۱) - m_۲^۲)\,\delta_{m_۱, m_۲}$$

باقیماندهٔ محاسبات ساده هستند چون

$$\langle l, m_۱|L_y^۲|l, m_۲\rangle = \langle l, m_۱|(\mathbf{L}^۲ - L_z^۲ - L_x^۲)^۲|l, m_۲\rangle$$

۵– هامیلتونی چرخنده‌ای که تقارن محوری دارد چنین است:

$$H = \frac{L_x^۲ + L_y^۲}{۲I_۱} + \frac{L_z^۲}{۲I_۳}$$

(الف) ویژه‌مقادیر H کدام‌اند؟

(ب) با فرض $I_۱ > I_۳$، طیف انرژی چرخنده را رسم کنید.

(ج) طیف انرژی در حدّی که $I_۱$ به‌مراتب بزرگتر از $I_۳$ باشد چیست؟

(الف) هامیلتونی را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$H = \frac{\mathbf{L}^۲ - L_z^۲}{۲I_۱} + \frac{L_z^۲}{۲I_۳}$$

که ویژه‌مقادیرش برابرند با

$$\hbar^۲\left[\frac{l(l+۱)}{۲I_۱} + m^۲\left(\frac{۱}{۲I_۳} - \frac{۱}{۲I_۱}\right)\right]$$

که در آن $-l \le m \le l$.

(ج) در حدّ $I_۱ >> I_۳$ طیف انرژی برابر است با $E = \frac{\hbar^۲}{۲I_۳}m^۲$ که در آن $m = ۰, ۱, ۲, \ldots l$. ویژه‌مقدار $m = ۰$ تبهگن نیست ولی ویژه‌مقادیر دیگر تبهگنی دوگانه دارند (متناظر با مقادیر منفی m).

۶— با استفاده از عملگر پائین‌آورنده بستگی زاویه‌ای $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ را به‌ازای $m = ۳, ۲, ۱, ۰$ حساب کنید (بهنجارش مهم نیست). فرض کنید $Y_{۴m}(\theta,\varphi) = Ae^{۴i\varphi}\sin^۴\theta$.

عملگر پائین‌آورندهٔ $L_- = \hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$ را بر $Y_{۴۴}$ عمل می‌کنیم. چون بهنجارش در اینجا مورد نظر ما نیست ضریب $\hbar$ را نخواهیم گذاشت

$$
\begin{aligned}
Y_{۴۳} &\propto e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[e^{۴i\phi}\sin^۴\theta\right] \\
&= e^{۳i\phi}\left\{-۴\sin^۳\theta\cos\theta - ۴\cot\theta\sin^۴\theta\right\} \\
&= -۸\, e^{۳i\phi}\sin^۳\theta\cos\theta \\
Y_{۴۲} &\propto e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[e^{۳i\phi}\sin^۳\theta\cos\theta\right] \\
&= e^{۲i\phi}\left\{-۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta + \sin^۴\theta - ۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta\right\} \\
&= e^{۲i\phi}\left\{-۶\sin^۲\theta + ۷\sin^۴\theta\right\} \\
Y_{۴۱} &\propto e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[e^{۲i\phi}(-۶\sin^۲\theta + ۷\sin^۴\theta\right] \\
&= e^{i\phi}\left\{۱۲\sin\theta\cos\theta - ۲۸\sin^۳\theta\cos\theta - ۲(-۶\sin\theta\cos\theta + ۷\sin^۳\theta\cos\theta)\right\} \\
&= e^{i\phi}\left\{۲۴\sin\theta\cos\theta - ۴۲\sin^۳\theta\cos\theta\right\} \\
Y_{۴۰} &\propto e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[e^{i\phi}(۴\sin\theta - ۷\sin^۳\theta)\cos\theta\right] \\
&= \left\{(-۴\cos\theta + ۲۱\sin^۲\theta\cos\theta)\cos\theta + (۴\sin^۲\theta - ۷\sin^۴\theta)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. -(۴\cos^۲\theta - ۷\sin^۲\theta\cos^۲\theta)\right\} \\
&= \left\{-۸ + ۴۰\sin^۲\theta - ۳۵\sin^۴\theta\right\}
\end{aligned}
$$

۷— دستگاهی با هامیلتونی

$$H = \frac{\mathbf{L}^۲}{۲I} + \alpha L_z$$

توصیف شده‌است. طیف انرژی این دستگاه چیست؟

هامیلتونی مسئله را درنظر بگیرید. ویژه‌حالتهای اندازه‌حرکت زاویه‌ای $|l,m\rangle$ ویژه‌حالتهای این هامیلتونی هستند و ویژه‌مقادیر آنها برابرند با

$$E = \frac{\hbar^۲ l(l+۱)}{۲I} + \alpha\hbar m$$

که در آن $-l \le m \le -l$. بنابراین به‌ازای هر مقدار l تعداد $(۲l+۱)$ حالت داریم که تبهگن نیستند.

۸– روابط جابجایی $[x, L_x]$، $[y, L_x]$، $[z, L_x]$، $[x, L_y]$، $[y, L_y]$، $[z, L_y]$ را حساب کنید. آیا به الگوی خاصی پی‌می‌برید که روابط جابجایی x، y، z با L_z را بیان می‌کند؟

داریم

$$\begin{aligned}
[x, L_x] &= [x, yp_z - zp_y] = 0 \\
[y, L_x] &= [y, yp_z - zp_y] = z[p_y, y] = -i\hbar z \\
[z, L_x] &= [z, yp_z - zp_y] = -y[p_z, z] = i\hbar y \\
[x, L_y] &= [x, zp_x - xp_z] = -z[p_x, x] = i\hbar z \\
[y, L_y] &= [y, zp_x - xp_z] = 0 \\
[z, L_y] &= [z, zp_x - xp_z] = x[p_z, z] = -i\hbar x
\end{aligned}$$

الگویی که این روابط دنبال می‌کنند دوره‌ای $(x, y) \to i\hbar z$ است و الی آخر. بنابراین انتظار داریم که

$$\begin{aligned}
[x, L_z] &= -i\hbar y \\
[y, L_z] &= i\hbar x \\
[z, L_z] &= 0
\end{aligned}$$

۹– در مسئلهٔ ۸ x، ... را با p_x، ... جایگزین کرده و محاسبات را تکرار کنید.

باز هم الگوی دوره‌ای را انتظار داریم. از رابطهٔ زیر شروع می‌کنیم

$$[p_z, L_y] = [p_x, zp_x - xp_z] = -[p_x, x]p_z = i\hbar p_z$$

و بقیهٔ روابط نیز به‌همین شیوه به‌دست می‌آیند.

۱۰– حالتی با اندازه‌حرکت زاویه‌ای $l = ۲$ را درنظر بگیرید. ویژه‌مقادیر عملگرهای (الف) L_z، (ب) $\frac{۳}{۵}L_x - \frac{۴}{۵}L_y$، و (ج) $۲L_x - ٦L_y + ۳L_z$ را پیدا کنید.

(الف) ویژه‌مقادیر L_z برحسب واحد $\hbar$ برابرند با $۲, ۱, ۰, -۱, -۲$.

(ب) می‌نویسیم

$$\frac{۳}{۵}L - x - \frac{۴}{۵}L_y = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$$

که در آن $\mathbf{n}$ بردار یکّه است زیرا $n_x^۲ + n_y^۲ = (۳/۵)^۲ + (-۴/۵)^۲ = ۱$. می‌توانیم بردار $\mathbf{n}$ را محور z بگیریم و ویژه مقادیر در این مورد نیز برابرند با $۲, ۱, ۰, -۱, -۲$.

(ج) می‌نویسیم

$$
\begin{aligned}
۲L_x - ٦L_y + ۳L_z &= \sqrt{۲^۲ + ٦^۲ + ۳^۲}\left(\frac{۲}{۷}L_x - \frac{٦}{۷}L_y + ۳L_z\right) \\
&= ۷\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}
\end{aligned}
$$

که در آن $\mathbf{n}$ بردار یکّهٔ دیگری است. با استدلالی یکسان می‌توانیم بگوئیم که ویژه‌مقادیر برابرند با $۷m$، یعنی $۱۴, ۷, ۰, -۷, -۱۴$.

۱۱ــ ذرّه‌ای در پتانسیل متقارن کروی در حالتی است که با بستهٔ موج

$$\psi(x,y,z) = C\,(xy + yz + zx)\,e^{-\alpha r^۲}$$

توصیف شده‌است. احتمال اینکه اندازه‌گیری مجذور اندازه‌حرکت زاویه‌ای نتیجهٔ صفر را حاصل دهد چقدر است؟ احتمال اینکه نتیجهٔ $٦\hbar^۲$ به‌دست آید چقدر است؟ اگر مقدار l برابربا ۲ باشد آنگاه احتمالهای نسبی به‌ازای $m = -۲, -۱, ۰, ۱, ۲$ چقدر می‌شود؟

آن قسمت از تابع‌موج که لازم داریم چنین است

$$
\begin{aligned}
\frac{xy + yz + zx}{r^۲} &= \sin^۲\theta \sin\phi\cos\phi + (\sin\phi + \cos\phi)\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{۱}{۲}\sin^۲\theta \frac{e^{۲i\phi} - e^{-۲i\phi}}{۲i} + \sin\theta\cos\theta\left(\frac{e^{۲i\phi} - e^{-۲i\phi}}{۲i} + \frac{e^{۲i\phi} + e^{-۲i\phi}}{۲}\right)
\end{aligned}
$$

به جدول هماهنگهای کروی که نگاه کنیم می‌بینیم که همهٔ جملات این رابطه ترکیبی از توابع $l = ۲$ هستند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که احتمال یافتن $l = ۰$ برابر با صفر است و احتمال یافتن $٦\hbar^۲$ برابر با ۱ است چون این مقدار متناظر است با $l = ۲$. نگاهی به این جدول نشان می‌دهد که

$$
\begin{aligned}
e^{۲i\phi}\sin^۲\theta &= \sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,۲}; \quad e^{-۲i\phi}\sin^۲\theta = \sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,-۲} \\
e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta &= -\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,۱}; \quad e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta = -\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,-۱}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\frac{xy + yz + zx}{r^۲} &= \frac{۱}{۲}\sin^۲\theta \frac{e^{۲i\phi} - e^{-۲i\phi}}{۲i} \sin\theta\cos\theta\left(\frac{e^{۲i\phi} - e^{-۲i\phi}}{۲i} + \frac{e^{۲i\phi} + e^{-۲i\phi}}{۲}\right) \\
&= \frac{۱}{۴i}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,۲} - \frac{۱}{۴i}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,-۲} - \frac{-i+۱}{۲}\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,۱} \\
&\quad + \frac{-i+۱}{۲}\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,-۱}
\end{aligned}
$$

این تابع بهنجار نیست. مجموع مربع ضرایب برابر است با $\frac{۴\pi}{۵} = \frac{۱۲\pi}{۱۵} = \frac{۴\pi}{۱۵} + \frac{۴\pi}{۱۵} + \frac{۲\pi}{۱۵} + \frac{۲\pi}{۱۵}$.
بنابراین برای بهنجار کردن تابع‌موج باید آن را در $\sqrt{\frac{۵}{۴\pi}}$ ضرب کنیم. احتمال این که $m = ۲$ به‌دست آید با احتمال این که $m = -۲$ به‌دست آید یکی است و برابر است با

$$P_{\pm ۲} = \frac{۵}{۴\pi}\frac{۲\pi}{۱۵} = \frac{۱}{۶}$$

و همین طور $P_{۱} = P_{-۱}$ و چون مجموع احتمالات باید ۱ شود داریم

$$P_{\pm ۱} = \frac{۱}{۳}$$

۱۲ــ مدل زیر را برای استوانهٔ سالم درنظر بگیرید. این مدل از حلقه‌ای از ذرّات یکسان و هم فاصله هر یک به‌جرم M/N تشکیل شده‌است و در نتیجه جرم حلقه M و گشتاور لختی آن $MR^۲$ است که در آن R شعاع حلقه است. مقادیر مجاز اندازه‌حرکت زاویه‌ای را حساب کنید. ویژه‌مقادیر انرژی را حساب کنید. اختلاف انرژی بین حالت پایه بااندازه‌حرکت زاویه‌ای صفر و اولین حالت دورانی چقدر است؟ نشان دهید که اگر $N \to \infty$ آنگاه این اختلاف انرژی بی‌نهایت می‌شود. این مدل را با انرژی قابل قیاس استوانهٔ "ترک‌خورده‌ای" مقایسه کنید که تحت دورانهای $۲\pi/N$ رادیانی تقارن ندارد. از این مثال چنین برمی‌آید که ممکن نیست که استوانهٔ سالم را به دوران واداشت که با این واقعیّت سازگار است که برای استوانهٔ سالم چنین دورانی را نمی‌توان مشاهده کرد.

چون ذرّات یکسانند تابع‌موج $e^{im\phi}$ باید تحت دوران $\phi \to \phi + ۲\pi/N$ ناوردا بماند، یعنی $m(۲\pi/N) = ۲n\pi$ و بنابراین $m = nN$ که در آن $n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \ldots$. انرژی برابر است با

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^۲ m^۲}{۲MR^۲} \\ &= \frac{\hbar^۲ N^۲}{۲MR^۲} n^۲ \end{aligned}$$

وقتی که $N \to \infty$ آنگاه گاف بین حالت پایه $(n = ۰)$ و حالت برانگیختهٔ اوّل $(n = ۱)$ برابر است با

$$\Delta E = \frac{\hbar^۲ N^۲}{۲MR^۲} \to \infty$$

اگر استوانه ترک داشته باشد چنین تقارنی نخواهد داشت و $m = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \ldots$ و

$$\Delta E = \frac{\hbar^۲}{۲MR^۲}$$

فصل هشتم

معادلهٔ شردودینگر در سه بعد و اتم هیدرژن

۱– حالت خاصی از معادلهٔ (۸–۵) را درنظر بگیرید که در آن پتانسیلهای $V_۱$، $V_۲$ و $V_۳$ در هر مورد یکسان و به‌شکل

$$V(r) = \circ \qquad r \le a$$
$$\quad = \infty \qquad r > a$$

است و همینطور برای y و z. با استفاده از آنچه در فصل ۳ دربارهٔ پتانسیل یک بعدی آموخته‌اید ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع ذرّه در چنین جعبه‌ای را پیدا کنید.

جوابها به‌شکل

$$\psi_{n_۱ n_۲ n_۳}(x,y,z) = u_{n_۱}(x)u_{n_۲}(y)u_{n_۳}(z)$$

هستند که در آن

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

و الی آخر. ویژه‌مقادیر برابرند با

$$\begin{aligned} E &= E_{n_۱} + E_{n_۲} + E_{n_۳} \\ &= \frac{\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲}(n_۱^۲ + n_۲^۲ + n_۳^۲) \end{aligned}$$

۲– (الف) انرژی حالت پایه در پتانسیل مسئلهٔ ۱ چیست؟ فهرست مقادیر ده تراز انرژی پائین را بنویسید، و (ب) آنها را با اعداد کوانتومی مناسب خود برچسب بزنید. تبهگنی ترازهای این فهرست چیست؟

(الف) حالت پائینترین انرژی متناظر است با کمترین مقادیر اعداد درست $\{n_۱, n_۲, n_۳\}$ یعنی $\{۱, ۱, ۱\}$. بنابراین

$$E_{\text{پایه}} = \frac{\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲} \times ۳$$

برحسب واحد $\hbar^۲\pi^۲/۲ma^۲$ انرژیها برابرند با

ناتبهگن	$\{۱,۱,۱\} \to ۳$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۱,۱,۲\},\{۱,۲,۱\},\{۲,۱,۱\} \to ٦$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۱,۲,۲\},\{۲,۱,۲\},\{۲,۲,۱\} \to ۹$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۳,۱,۱\},\{۱,۳,۱\},\{۱,۱,۳\} \to ۱۱$
ناتبهگن	$\{۲,۲,۲\} \to ۱۲$
تبهگنی شش گانه	$\{۱,۲,۳\},\{۱,۳,۲\},\{۲,۱,۳\},\{۲,۳,۱\},\{۳,۱,۲\},\{۳,۲,۱\} \to ۱۴$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۲,۲,۳\},\{۲,۳,۲\},\{۳,۲,۲\} \to ۱۷$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۱,۱,۴\},\{۱,۴,۱\},\{۴,۱,۱\} \to ۱۸$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۱,۳,۳\},\{۳,۱,۳\},\{۳,۳,۱\} \to ۱۹$
تبهگنی شش گانه	$\{۱,۲,۴\},\{۱,۴,۲\},\{۲,۱,۴\},\{۲,۴,۱\},\{۴,۱,۲\},\{۴,۲,۱\} \to ۲۱$

۳– پتانسیل زیر را درنظربگیرید:

$$V(x,y,z) = \frac{۱}{۲}\mu\omega^۲(x^۲+y^۲+z^۲)$$

با استفاده از آنچه دربارهٔ نوسانگر هماهنگ ساده می‌دانید رابطه‌ای برای انرژی بنویسید. انرژی حالت پایهٔ این پتانسیل چیست؟

در اینجا مسئله به سه دستگاه یکسان جدا از هم تجزیه می‌شود. می‌دانیم که انرژی هر دستگاه نوسانگر هماهنگ ساده مقادیر $\hbar\omega(n+۱/۲)$ را می‌پذیرد و از این رو ویژه‌مقادیر انرژی در اینجا برابرند با

$$E = \hbar\omega\left(n_۱+n_۲+n_۳+\frac{۳}{۲}\right)$$

انرژی حالت پایه متناظر است با مقادیری از n ها که همگی صفر هستند، یعنی برابر است با $\frac{۳}{۲}\hbar\omega$.

۴– فهرست ده تراز انرژی پائین در مسئلهٔ ۳ را برحسب $\hbar\omega$ بنویسید و تبهگنی متناظر با هر ویژه‌مقدار انرژی در این فهرست را معلوم کنید.

ویژه‌مقادیر انرژی برحسب $\hbar\omega$ همراه با اعداد درست متناظرشان چنین هستند

تبهگنی	ویژه‌مقدار انرژی	$\{n_1, n_2, n_3\}$
۱	۳/۲	(۰, ۰, ۰)
۳	۵/۲	(۰, ۰, ۱), ...
٦	۷/۲	(۰, ۱, ۱), (۰, ۰, ۲), ...
۱۰	۹/۲	(۱, ۱, ۱), (۰, ۰, ۳), (۰, ۱, ۲), ...
۱۵	۱۱/۲	(۱, ۱, ۲), (۰, ۰, ۴), (۰, ۲, ۲), (۰, ۱, ۳)
۲۱	۱۳/۲	(۰, ۰, ۵), (۰, ۱, ۴), (۰, ۲, ۳), (۱, ۲, ۲) (۱, ۱, ۳)
۲۸	۱۵/۲	(۰, ۰, ٦), (۰, ۱, ۵), (۰, ۲, ۴), (۰, ۳, ۳) (۱, ۱, ۴), (۱, ۲, ۳), (۲, ۲, ۲)
۳٦	۱۷/۲	(۰, ۰, ۷), (۰, ۱, ٦), (۰, ۲, ۵), (۰, ۳, ۴) (۱, ۱, ۵), (۱, ۲, ۴), (۱, ۳, ۳), (۲, ۲, ۳)
۴۵	۱۹/۲	(۰, ۰, ۸), (۰, ۱, ۷), (۰, ۲, ٦), (۰, ۳, ۵) (۰, ۴, ۴), (۱, ۱, ٦), (۱, ۲, ۵), (۱, ۳, ۴) (۲, ۲, ۴), (۲, ۳, ۳)
۵۵	۲۱/۲	(۰, ۰, ۹), (۰, ۱, ۸), (۰, ۲, ۷), (۰, ۳, ٦) (۰, ۴, ۵), (۱, ۱, ۷), (۱, ۲, ٦), (۱, ۳, ۵) (۱, ۴, ۴), (۲, ۲, ۵), (۲, ۳, ۴), (۳, ۳, ۳)

۵– معادلهٔ شرودینگر را در مختصات قطبی (ρ, ϕ) که در آن $x = \rho\cos\phi$ و $y = \rho\sin\phi$ است برای پتانسیلی که فقط به ρ بستگی دارد بنویسید. اگر جواب این معادله $\Psi(\rho, \phi)$ را به‌شکل $R(\rho)\Phi(\phi)$ بنویسیم معادله‌ای که $\Phi(\phi)$ از آن پیروی می‌کند چیست؟ معادلهٔ $R(\rho)$ چیست؟

از روابط $x = \rho\cos\phi$ و $y = \rho\sin\phi$ نتیجه می‌گیریم که

$$dx = d\rho\cos\phi - \rho\sin\phi\, d\phi$$

$$dy = d\rho\sin\phi + \rho\cos\phi\, d\phi$$

از حلّ این دو معادله داریم

$$d\rho = \cos\phi\, dx + \sin\phi\, dy$$
$$\rho d\phi = -\sin\phi\, dx + \cos\phi\, dy$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

حال داریم

$$\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}=\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

اندک عملیّات جبری نشان می‌دهد که سمت راست این رابطه برابر است با

$$\frac{\partial^۲}{\partial\rho^۲}+\frac{۱}{\rho^۲}\frac{\partial^۲}{\partial\phi^۲}$$

اکنون معادلهٔ مستقل از زمان شرودینگر چنین می‌شود

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m}\left(\frac{\partial^۲\Psi(\rho,\phi)}{\partial\rho^۲}+\frac{۱}{\rho^۲}\frac{\partial^۲\Psi(\rho,\phi)}{\partial\phi^۲}\right)+V(\rho)\Psi(\rho,\phi)=E\Psi(\rho,\phi)$$

اگر قرار دهیم $\Psi(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi)$ این معادله به معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. اگر در جواب $\Phi(\phi)$ شرط ناوردا بودن تحت تبدیل $\phi\to\phi+۲\pi$ را منظور کنیم آنگاه

$$\Phi(\phi)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{im\phi},\qquad m=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots$$

و معادلهٔ شعاعی برابر می‌شود با

$$\frac{d^۲R(\rho)}{d\rho^۲}-\frac{m^۲}{\rho^۲}R(\rho)+\frac{۲mE}{\hbar^۲}R(\rho)=\frac{۲mV(\rho)}{\hbar^۲}R(\rho)$$

۶ــ طول‌موجهای گذار $۲P\to۱S$ را در (۱) هیدرژن، (۲) دوتریوم (جرم هسته‌ای آن دو برابر جرم پروتون است)، و (۳) پوزیترونیوم (حالت مقیّدی از الکترون و پوزیترون است و جرم پوزیترون با جرم الکترون برابر است) باهم مقایسه کنید.

رابطهٔ بین اختلاف انرژی و طول‌موج چنین است

$$۲\pi\hbar\frac{c}{\lambda}=\frac{۱}{۲}m_{\text{کاهش‌یافته}}c^۲\alpha^۲\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)$$

بنابراین

$$\lambda=\frac{۱۶\pi}{۳}\frac{\hbar}{m_ec\alpha^۲}\left(۱+\frac{m_e}{M}\right)$$

که در آن M جرم ذرّهٔ دوّم مقیّد به الکترون است. باید این جرم را برای سه مورد حساب کنیم: $M=m_p$، $M=۲m_p$ و $M=m_e$. داریم

$$\lambda(\text{m برحسب}) = ۱۲۱۵{,}۰۲۲۶ \times \left(۱ + \frac{m_e}{M}\right)$$
$$= ۱۲۱۵{,}۶۸ \quad \text{برای هیدرژن}$$
$$= ۱۲۱۵{,}۳۵ \quad \text{برای دوتریوم}$$
$$= ۲۴۳۰{,}۴۵ \quad \text{برای پوزیترنیوم}$$

۷– الکترونی در حالت پایهٔ تریتیوم است که هستهٔ آن از یک پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌است. واکنش هسته‌ای خودبخودی این هسته را به $He^۳$، یعنی دو پروتون و یک نوترون تبدیل می‌کند. احتمال این که الکترون در حالت پایهٔ $He^۳$ بماند چقدر است؟

تابع‌موج حالت پایه الکترون در اتم تریتیوم ($Z = ۱$) چنین است

$$\psi_{۱۰۰}(\mathbf{r}) = \frac{۲}{\sqrt{۴\pi}}\left(\frac{۱}{a_۰}\right)^{۳/۲} e^{-r/a_۰}$$

این تابع را باید برحسب مجموعهٔ کامل ویژه‌حالتهای اتمهای هیدرژن‌گونهٔ $Z = ۲$ بسط دهیم و احتمال این که اندازه‌گیری انرژی حالت پایهٔ اتم $Z = ۲$ را نتیجه دهد مربع حاصلضرب داخلی

$$\int d^۳\mathbf{r}\, \frac{۲}{\sqrt{۴\pi}}\left(\frac{۱}{a_۰}\right)^{۳/۲} e^{-r/a_۰}\, \frac{۲}{\sqrt{۴\pi}} ۲\left(\frac{۲}{a_۰}\right)^{۳/۲} e^{-۲r/a_۰}$$
$$= \frac{۸\sqrt{۲}}{a_۰^۳}\int_۰^\infty r^۲ dr\, e^{-۳r/a_۰}$$
$$= \frac{۸\sqrt{۲}}{a_۰^۳}\left(\frac{a_۰}{۳}\right)^۳ ۲!$$
$$= \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۲۷}$$

بنابراین احتمال برابر است با $P = \frac{۵۱۲}{۷۲۹}$.

۸– مشابه نسبیتی معادله شرودینگر الکترون اسپین ۰ (بنابراین نمی‌توان آن را برای الکترون واقعی به‌کار برد) شقّ عملگری رابطهٔ

$$(E - V)^۲ = p^۲c^۲ + m^۲c^۴$$

است، یعنی

$$\left(\frac{E}{\hbar c} + \frac{Ze^۲}{۴\pi\varepsilon_۰\hbar c}\frac{۱}{r}\right)^۲ \psi = -\nabla^۲\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^۲\psi$$

(الف) معادلهٔ شعاعی را پیدا کنید.

(ب) طیف مقدارویژه را با توجه به رابطهٔ نزدیک بین معادلهٔ شعاعی قسمت (الف) و معادله شعاعی مسئلهٔ اتم هیدرژن پیدا کنید.

معادله شرودینگر نسبیّتی چنین است

$$-\nabla^{۲}\psi(\mathbf{r})+\left(-\frac{E^{۲}-m^{۲}c^{۴}}{\hbar^{۲}c^{۲}}-\frac{۲Z\alpha E}{\hbar c}\frac{۱}{r}-\frac{(Z\alpha)^{۲}}{r^{۲}}\right)\psi(\mathbf{r})=۰$$

این معادله را با مورد اتمهای هیدرژن‌گونه مقایسه کنید که به‌شکل زیر است

$$-\nabla^{۲}\psi(\mathbf{r})+\left(\frac{۲mE_B}{\hbar^{۲}}-\frac{۲mZe^{۲}}{۴\pi\epsilon_{۰}\hbar^{۲}}\frac{۱}{r}\right)\psi(\mathbf{r})=۰$$

و به‌خاطر آورید که

$$-\nabla^{۲}=-\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}-\frac{۲}{r}\frac{d}{dr}+\frac{l(l+۱)}{r^{۲}}$$

از این رو داریم

$$\begin{aligned} E^{۲}-m^{۲}c^{۴} &\rightarrow -۲mc^{۲}E_B \\ -\frac{۲Z\alpha E}{\hbar c} &\rightarrow -\frac{۲mZe^{۲}}{۴\pi\epsilon_{۰}\hbar^{۲}} \\ l(l+۱)-Z^{۲}\alpha^{۲} &\rightarrow l(l+۱) \end{aligned}$$

بنابراین در عبارت ویژه‌مقدار انرژی اتمهای هیدرژن‌گونه

$$۲mE_B=-\frac{m^{۲}Z^{۲}e^{۲}}{۴\pi\epsilon_{۰}\hbar^{۲}}\frac{۱}{(n_r+l+۱)^{۲}}$$

l را به‌جای l^* که در آن $l^*(l^*+۱)=l(l+۱)-(Z\alpha)^{۲}$ یعنی

$$l^*=-\frac{۱}{۲}+\left[\left(l+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-(Z\alpha)^{۲}\right]^{۱/۲}$$

قرار می‌دهیم. همچنین $\frac{mZe^{۲}}{۴\pi\epsilon_{۰}\hbar}$ را با $\frac{Z\alpha E}{c}$ و $۲mE_B$ را با $-\frac{E^{۲}-m^{۲}c^{۴}}{c^{۲}}$ جایگزین می‌کنیم و داریم

$$E^{۲}=m^{۲}c^{۴}\left[۱+\frac{Z^{۲}\alpha^{۲}}{(n_r+l^*+۱)^{۲}}\right]^{-۱}$$

ای رابطه به‌ازای $(Z\alpha)\ll ۱$ به رابطهٔ زیر می‌انجامد

$$E-mc^{۲}=-\frac{۱}{۲}mc^{۲}(Z\alpha)^{۲}\frac{۱}{(n_r+l^*+۱)^{۲}}$$

تنها فرق این رابطهٔ با رابطهٔ غیر نسبیّتی در این است که l^* به‌جای l نشسته است.

۹ــ با استفاده از رابطهٔ $\langle ۱/r\rangle_{n,l}$ عبارت

$$\langle T\rangle_{n,l} = \left\langle \frac{p^۲}{۲m}\right\rangle_{n,l}$$

برای ویژه‌حالت دلخواه اتم هیدرژن (با Z دلخواه) حساب کنید. نشان دهید که به‌طور کلی برای این پتانسیل داریم:

$$\langle T\rangle = -\tfrac{۱}{۲}\langle V\rangle$$

این رابطه مورد خاصی از قضیهٔ ویریال است.

داریم

$$\langle T\rangle_{nl} - \frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_۰}\left\langle\frac{۱}{r}\right\rangle_{nl} = E_{nl} = -\frac{mc^۲(Z\alpha)^۲}{۲n^۲}$$

چون

$$\begin{aligned}\frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_۰}\left\langle\frac{۱}{r}\right\rangle_{nl} &= \frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{Z}{a_۰n^۲}\\ &= \frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{۲mc\alpha}{\hbar n^۲}\\ &= \frac{mc^۲Z^۲\alpha^۲}{n^۲}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\langle T\rangle_{nl} &= \frac{mc^۲Z^۲\alpha^۲}{۲n^۲}\\ &= \frac{۱}{۲}\langle V(r)\rangle_{nl}\end{aligned}$$

۱۰ــ الکترونی در میدان کولنی پروتونی در حالتی است که با تابع‌موج زیر توصیف می‌شود:

$$\tfrac{۱}{۶}\left[۴\psi_{۱۰۰}(\mathbf{r}) + ۳\psi_{۲۱۱}(\mathbf{r}) - \psi_{۲۱۰}(\mathbf{r}) + \sqrt{۱۰}\,\psi_{۲۱-۱}(\mathbf{r})\right]$$

(الف) مقدار چشمداشتی انرژی چقدر است؟
(ب) مقدار چشمداشتی $\mathbf{L}^۲$ چقدر است؟
(ج) مقدار چشمداشتی L_z چقدر است؟

مقدار چشمداشتی انرژی برابر است با

$$\langle E\rangle = \left(\frac{۴}{۶}\right)^۲ E_۱ + \left(\frac{۳}{۶}\right)^۲ E_۲ + \left(-\frac{۱}{۶}\right)^۲ E_۲ + \left(\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}\right)^۲ E_۲$$
$$= -\frac{mc^۲\alpha^۲}{۲}\left[\frac{۱۶}{۳۶} + \frac{۲۰}{۳۶}\frac{۱}{۲^۲}\right]$$
$$= -\frac{mc^۲\alpha^۲}{۲}\frac{۲۱}{۳۶}$$

همچنین

$$\langle \mathbf{L}^۲\rangle = \hbar^۲\left[\frac{۱۶}{۳۶}\times ۰ + \frac{۲۰}{۳۶}\times ۲\right]$$
$$= \frac{۴۰}{۳۶}\hbar^۲$$

سرانجام

$$\langle L_z\rangle = \hbar\left[\frac{۱۶}{۳۶}\times ۰ + \frac{۹}{۳۶}\times ۱ + \frac{۱}{۳۶}\times ۰ + \frac{۱۰}{۳۶}\times(-۱)\right]$$
$$= -\frac{۱}{۳۶}\hbar$$

۱۱ــ الکترونی در میدان کولنی پروتونی در حالتی است که با تابع‌موج زیر توصیف می‌شود:

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{۳/۲} e^{-\alpha^۲ r^۲/۲}$$

رابطه‌ای برای احتمال یافتن الکترون در حالت پایهٔ اتم هیدرژن بنویسید.

نماد α را به β تغییر می‌دهیم مبادا که با نماد ثابت ساختار ریز که در تابع‌موج اتم هیدرژن ظاهر می‌شود اشتباه شود. احتمال برابر است با انتگرال زیر به توان دو

$$\int d^۳\mathbf{r}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^{۳/۲} e^{-\beta^۲ r^۲/۲}\frac{۲}{\sqrt{۴\pi}}\left(\frac{Z}{a_۰}\right)^{۳/۲} e^{-Zr/a_۰}$$
$$= \frac{۴}{\pi^{۱/۴}}\left(\frac{Z\beta}{a_۰}\right)^{۳/۲}\int_۰^\infty r^۲ dr\, e^{-\beta^۲ r^۲/۲} e^{-Zr/a_۰}$$
$$= \frac{۴}{\pi^{۱/۴}}\left(\frac{Z\beta}{a_۰}\right)^{۳/۲}\left(-۲\frac{d}{d\beta^۲}\right)\int_۰^\infty r^۲ dr\, e^{-\beta^۲ r^۲/۲} e^{-Zr/a_۰}$$

این انتگرال را نمی‌توان به‌شکل بسته حلّ کرد امّا به‌ازای مقادیر بزرگ و کوچک $a_\circ\beta$ می‌توان بحث کرد.

۱۲ــ مقدار چشمداشتی تابع $f(\mathbf{r},\mathbf{p})$ در هر حالت ایستا ثابت است. رابطهٔ

$$\circ = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}]\rangle$$

را برای هامیلتونی

$$H = \frac{\mathbf{p}^{۲}}{۲m} + V(r)$$

حساب کنید و نشان دهید که

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^{۲}}{m}\right\rangle = \langle \mathbf{r}\cdot\nabla V(r)\rangle$$

با استفاده از این رابطه نتیجهٔ مسئلهٔ ۹ را به‌دست آورید. همچنین با استفاده از این رابطه، $\langle ۱/r\rangle$ را حساب کنید.

از رابطهٔ

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right\rangle = \circ$$

نتیجه می‌شود که

$$\langle [H,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})]\rangle = \circ$$

اینک

$$\left[\frac{۱}{۲m}p_ip_i + V(r),\, x_jp_j\right] = \frac{۱}{m}(-i\hbar)p^{۲} + i\hbar x_j\frac{\partial V}{\partial x_j}$$
$$= -i\hbar\left(\frac{p^{۲}}{m} - \mathbf{r}\cdot\nabla V(\mathbf{r})\right)$$

و در نتیجه داریم

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^{۲}}{m}\right\rangle = \langle \mathbf{r}\cdot\nabla V(\mathbf{r})\rangle$$

اگر

$$V(r) = -\frac{Ze^{۲}}{۴\pi\epsilon_\circ r}$$

آنگاه

$$\langle \mathbf{r}\cdot\nabla V(\mathbf{r})\rangle = \left\langle \frac{Ze^{۲}}{۴\pi\epsilon_{\circ} r}\right\rangle$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\langle T\rangle &= \frac{۱}{۲}\left\langle \frac{Ze^{۲}}{۴\pi\epsilon_{\circ} r}\right\rangle \\ &= -\frac{۱}{۲}\langle V(r)\rangle\end{aligned}$$

۱۳– با استفاده از روشهایی که در این فصل گفتیم مسئلهٔ نوسانگر هماهنگ سه بعدی را با

$$H = \frac{\mathbf{p}^{۲}}{۲m} + \tfrac{۱}{۲}m\omega^{۲}r^{۲}$$

حل کنید. توجه کنید که در این مسئله نیز چندجمله‌ایهای وابستهٔ لاژور ظاهر می‌شوند.

معادلهٔ شعاعی برابر است با

$$\left(\frac{d^{۲}}{dr^{۲}} + \frac{۲}{r}\frac{d}{dr}\right)R(r) + \frac{۲m}{\hbar^{۲}}\left(E - \frac{۱}{۲}m\omega^{۲}r^{۲} - \frac{l(l+۱)\hbar^{۲}}{۲mr^{۲}}\right)R(r) = \circ$$

با تغییر متغییر

$$\rho = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,r$$

و تعریف

$$E = \frac{\lambda\hbar\omega}{۲}$$

معادلهٔ شعاعی به‌شکل ساده‌تر زیر درمی‌آید

$$\left(\frac{d^{۲}}{d\rho^{۲}} + \frac{۲}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)R(\rho) + \left(\lambda - \rho^{۲} - \frac{l(l+۱)}{\rho^{۲}}\right)R(\rho) = \circ$$

می‌توانیم به‌آسانی ثابت کنیم که رفتار جواب این معادله به‌ازای ρ های بزرگ برابر است با $e^{-\rho^{۲}/۲}$ و به‌ازای ρ های کوچک برابر است با ρ^{l}. حال تابع $H(\rho)$ را با

$$R(\rho) = \rho^{l}e^{-\rho^{۲}/۲}H(\rho)$$

تعریف می‌کنیم که در معادلهٔ

$$\frac{d^{۲}H(\rho)}{d\rho^{۲}} + ۲\left(\frac{l+۱}{\rho} - \rho\right)\frac{dH(\rho)}{d\rho} + (\lambda - ۳ - ۲l)H(\rho) = \circ$$

صدق می‌کند. تغییر متغییر دیگر $y = \rho^{۲}$ این معادله برابر می‌شود با

$$\frac{d^{۲}H(y)}{dy^{۲}} + \left(\frac{l+۳/۲}{y} - ۱\right)\frac{dH(y)}{dy} + \frac{\lambda - ۳ - ۲l}{۴y}H(y) = ۰$$

اگر دو جایگزینی زیر را انجام دهیم این معادله با معادلهٔ (۸—۲۷) یکی می‌شود

$$\begin{array}{ccc} ۲l & \rightarrow & ۲l + ۳/۲ \\ \lambda - ۱ & \rightarrow & \dfrac{\lambda - ۳ - ۲l}{۴} \end{array}$$

از اینجا به این نتیجه می‌رسیم که

$$\lambda = ۴n_r + ۲l + ۳$$

یا هم‌ارز آن

$$E = \hbar\omega\left(۲n_r + l + \frac{۳}{۲}\right)$$

و جواب تابع $L_a^{(b)}$ است که در آن $a = n_r$ و $b = (۲l + ۳)/۴$.

فصل نهم

نمایش ماتریسی عملگرها

۱ــ با استفاده از نمایش ماتریسی عملگر $A^\dagger$ در (۹ــ۹) شکل ماتریسی $(A^\dagger)^n$ به‌ازای $n = ۲,۳,۴$ چیست؟ (فقط گوشهٔ ۴×۴ سمت چپ این آرایهٔ نامتناهی را نگهدارید.)

با

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۴} & ۰ \end{pmatrix}$$

داریم

$$(A^\dagger)^۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۴} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۴} & ۰ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۲} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۶} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۱۲} & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$(A^\dagger)^۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۴} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۲} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۶} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۱۲} & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۳.۲.۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۴.۳.۲} & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

مرحلهٔ بعدی آشکار است: در قالب 5×5 تنها یک ورودی در گوشهٔ پائین سمت چپ داریم که $\sqrt{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ است.

۲– با استفاده از روابط (۹–۹) و (۹–۱۰) نمایش ماتریسی عملگرهای x و x^2 را به‌دست آورید. [معادلهٔ (۶–۴) را ببینید.]

در متن کتاب در این مسئله به اشتباه به معادلهٔ (۶–۴) ارجاع داده شده‌است که باید معادله (۶–۳۶) باشد. داریم

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(A + A^\dagger)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \end{pmatrix}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$x^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2\cdot 1} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{3\cdot 2} & 0 \\ \sqrt{2\cdot 1} & 0 & 5 & 0 & \sqrt{4\cdot 3} \\ 0 & \sqrt{3\cdot 2} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4\cdot 3} & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

۳– با استفاده از روابط (۹–۹) و (۹–۱۰) نمایش ماتریسی عملگرهای p و p^2 را به‌دست آورید. [معادلهٔ (۶–۴) را ببینید.]

در این مسئله نیز دستورالعمل یکسانی را دنبال می‌کنیم

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(A^\dagger - A)$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{4} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \end{pmatrix}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$p^2 = \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2\cdot 1} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\sqrt{3\cdot 2} & 0 \\ -\sqrt{2\cdot 1} & 0 & 5 & 0 & -\sqrt{4\cdot 3} \\ 0 & -\sqrt{3\cdot 2} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{4\cdot 3} & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

۴− فرض کنید حالت پایهٔ $\langle ۰|$ که ماتریس $(A^\dagger)^n$ بر آن عمل می‌کند با بردار ستونی

$$u_{۰} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ \vdots \end{pmatrix}$$

نمایش داده شود. با استفاده از روابط (۹−۲) و (۹−۹) بردار ستونی $u_{۱}$ اوّلین حالت برانگیخته $\langle ۱|$ را به‌دست آورید.

داریم

$$\begin{aligned} u_{۱} &= A^\dagger u_{۰} \\ &= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۴} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

۵− با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱ بردارهای ستونی $\langle ۲|$، $\langle ۳|$، و $\langle ۴|$ را به‌دست آورید. آیا الگوی خاصی وجود دارد؟

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} u_{۲} &= \frac{۱}{\sqrt{۲!}}(A^\dagger)^{۲} u_{۰} \\ &= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۲} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۶} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۱۲} & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

همین‌طور

$$\begin{aligned} u_{۳} &= \frac{۱}{\sqrt{۳!}}(A^\dagger)^{۳} u_{۰} \\ &= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۳.۲.۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۴.۳.۲} & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و

$$u_۴ = \frac{۱}{\sqrt{۴!}}(A^\dagger)^۴ u_۰$$
$$= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۴.۳.۲.۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

الگویی که به‌دست می‌آید بدیهی است: بردار u_n با بردار ستونی نمایش داده‌می‌شود که همهٔ ورودیهای آن صفرند به‌جز در ورودی $n+۱$ ام که ۱ است.

۶– بردار حالتی با ماتریس ستونی

$$\psi = \frac{۱}{\sqrt{۶}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ \vdots \end{pmatrix}$$

نمایش داده شده‌است. کمیّتهای زیر را برای نوسانگر هماهنگ حساب کنید:

(الف) مقدار چشمداشتی هامیلتونی $\langle H \rangle$ در این حالت.

(ب) مقدار چشمداشتی هامیلتونی $\langle x^۲ \rangle$، $\langle x \rangle$، $\langle p^۲ \rangle$، $\langle p \rangle$ در این حالت.

(ج) با استفاده از نتایج قسمت (ب) کمیّتهای $(\Delta x)^۲$ و $(\Delta p)^۲$ را حساب کنید.

(الف)

$$\langle H \rangle = \frac{۱}{\sqrt{۶}}(۱ \quad ۲ \quad ۱ \quad ۰)\hbar\omega \begin{pmatrix} ۱/۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳/۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵/۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۷/۲ \end{pmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۶}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \frac{۳}{۲}\hbar\omega$$

(ب)

$$\langle x^۲ \rangle = \frac{۱}{\sqrt{۶}}(۱ \quad ۲ \quad ۱ \quad ۰)\frac{\hbar}{۲m\omega} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & \sqrt{۶} \\ \sqrt{۲} & ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۶} & ۰ & ۷ \end{pmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۶}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\hbar}{۲m\omega}\left(۳ + \frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)$$

$$\langle x \rangle = \frac{۱}{\sqrt{۶}}(۱ \quad ۲ \quad ۱ \quad ۰)\sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}} \begin{pmatrix} ۰ & \sqrt{۱} & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۱} & ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{pmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۶}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\frac{۲}{۳}\left(۱+\sqrt{۲}\right)$$

$$\langle p^۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۶}}(\,۱\quad ۲\quad ۱\quad ۰\,)\frac{m\hbar\omega}{۲}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & -\sqrt{۶} \\ -\sqrt{۲} & ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & -\sqrt{۶} & ۰ & ۷ \end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۶}}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{۲}\left(۳-\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)$$

$$\langle p\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۶}}(\,۱\quad ۲\quad ۱\quad ۰\,)\,i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{۲}}\begin{pmatrix} ۰ & -\sqrt{۱} & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۱} & ۰ & -\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ & -\sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۶}}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = ۰$$

(ج) حال داریم

$$(\Delta x)^۲ = \frac{\hbar}{۲m\omega}\frac{۵}{۳}\left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right), \qquad (\Delta p)^۲ = \frac{m\hbar\omega}{۲}\left(۳-\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)$$

بنابراین

$$(\Delta x)(\Delta p) = ۲٫۲۳\hbar$$

۷– ماتریس هرمیتی زیر مفروض است:

$$A = \begin{pmatrix} -۳ & \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}e^{i\pi/۳} \\ \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}e^{-i\pi/۳} & ۶ \end{pmatrix}$$

(الف) ویژه‌مقادیر را پیدا کنید.

(ب) ویژه‌بردارها را پیدا کنید.

(ج) ماتریس U را پیدا کنید که A را قطری می‌کند.

در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} -۳ & \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}e^{i\pi/۳} \\ \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}e^{-i\pi/۳} & ۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix}$$

فرض می‌کنیم $u_۱ = ۱$ آنگاه

$$(\lambda + ۳) + \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}\, e^{i\pi/۳} u_۲ = ۰$$
$$\sqrt{\frac{۱۹}{۴}}\, e^{-i\pi/۳} + (٦ - \lambda) u_۲ = ۰$$

(الف) از تقسیم این دو معادله بر هم نتیجه می‌شود

$$(\lambda + ۳)(٦ - \lambda) = -\frac{۱۹}{۴}$$

ریشه‌های این معادله برابرند با $\lambda = -۷/۲$ و $\lambda = ۱۳/۲$. مقدار $u - ۲$ به‌ازای هریک از این ویژه‌مقادیر برابر است با

$$u_۲(-۷/۲) = \frac{۱}{\sqrt{۱۹}} e^{-i\pi/۳}, \quad u_۲(۱۳/۲) = -\sqrt{۱۹} e^{-i\pi/۳}$$

(ب) ویژه‌بردارهای بهنجار عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{\sqrt{۲۰}} \begin{pmatrix} \sqrt{۱۹} \\ -e^{-i\pi/۳} \end{pmatrix}, \quad \frac{۱}{\sqrt{۲۰}} \begin{pmatrix} e^{i\pi/۳} \\ \sqrt{۱۹} \end{pmatrix}$$

به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که این دو ویژه‌بردار متعامدند.

(ج) بنابر معادلهٔ (۹—۵۵) متن کتاب، ماتریسی که ماتریس این مسئله را قطری می‌کند برابر است با

$$U = \frac{۱}{\sqrt{۲۰}} \begin{pmatrix} ۱ & -\sqrt{۱۹}\, e^{i\pi/۳} \\ \sqrt{۱۹}\, e^{-i\pi/۳} & ۱ \end{pmatrix}$$

به آسانی ثابت می‌شود که

$$U^\dagger A U = \begin{pmatrix} \frac{۱۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{۷}{۲} \end{pmatrix}$$

۸— با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۷، e^{-A} را حساب کنید.

از نتیجهٔ مسئلهٔ ۷ داریم

$$A = U A_{\text{قطری}} U^\dagger$$

از این رابطه داریم

$$e^A = U e^{A_{\text{قطری}}} U^\dagger = U \begin{pmatrix} e^{۱۳/۲} & ۰ \\ ۰ & e^{-۷/۲} \end{pmatrix} U^\dagger$$

آنچه می‌ماند عمل سادهٔ ضرب ماتریسی است.

۹ــ ماتریس زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای این ماتریس را حساب کنید.

حلّ معادلهٔ

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

هم‌ارز است با حلّ معادلهٔ

$$a + b + c + d = \lambda a = \lambda b = \lambda c = \lambda d$$

بدیهی است که یکی از جوابهای این معادله برابر است با $a = b = c = d$ با $\lambda = ۴$. ویژه‌بردار برابر می‌شود با

$$\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

اینک می‌بینیم که اگر تعداد دو (یا بیش از دو) از پارامترهای a، b، c و d صفر نباشند آنگاه $\lambda = ۰$. این دو تنها موارد ممکن هستند و در نتیجه سه ویژه‌مقدار برابر با صفر خواهیم داشت. ویژه‌بردار ها باید در شرط $a + b + c + d = ۰$ صدق کنند و دوبدو متعامد باشند. گزینه‌های زیر این گونه عمل می‌کنند

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}, \quad \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

۱۰ــ ماتریس هرمیتی دلخواه A را درنظر بگیرید. نشان دهید که

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=۱}^{N} A_{ii}$$

همان مجموع ویژه‌مقادیر ماتریس A است. [از معادلهٔ (۹ــ۲۹) استفاده کنید.]

هر ماتریس هرمیتی مانند A را همیشه می‌توان با ماتریس یکانی خاصّی مانند U قطری کرد، یعنی

$$UAU^{\dagger} = A_{\text{قطری}}$$

اکنون ردّهای دو سمت این معادله را حساب می‌کنیم

$$\mathrm{Tr}UAU^\dagger = \mathrm{Tr}U^\dagger UA = \mathrm{Tr}A$$

حال آن که

$$\mathrm{Tr}A_{\text{قطری}} = \sum_n a_n$$

که در آن a_n ها ویژه‌مقادیر عملگر هرمیتی A هستند.

۱۱– ماتریس $N \times N$ را درنظر بگیرید که تمام ورودیهای آن ۱ است (تعمیم ماتریس مسئلهٔ ۹). با محاسبهٔ مجذور این ماتریس و با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۰ ویژه‌مقادیر آن را پیدا کنید.

حاصلضرب دو ماتریس $N \times N$

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

به‌شکل زیر است

$$\begin{pmatrix} N & N & N & N & \cdots \\ N & N & N & N & \cdots \\ N & N & N & N & \cdots \\ N & N & N & N & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

بنابراین $M^۲ = NM$، یعنی این که ویژه‌مقادیر ماتریس M فقط N یا صفر هستند. حال مجموع ویژه‌مقادیر برابر است با ردّ ماتریس M که برابر است با N (مسئلهٔ ۱۰ را ببینید). بنابراین یکی از ویژه‌مقادیر برابر با N و بقیّهٔ $(N-۱)$ ویژه‌مقدار برابر با صفر هستند.

۱۲– در مثال ۹–۱ ماتریس U را پیدا کردیم که دارای خاصیت $U^\dagger M_۳ U = L_z/\hbar$ بود و در نتیجه $UL_zU^\dagger = \hbar M_۳$.

(الف) با اعمال U و $U^\dagger$ به‌ترتیب بر L_x و L_y ماتریسهای $M_۱$ و $M_۲$ را حساب کنید.

(ب) با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که ماتریسهای M از روابط جابجایی اندازه‌حرکت زاویه‌ای پیروی می‌کنند.

پیدا کردیم که ماتریس

$$U = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ i & ۰ & -i \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \end{pmatrix}$$

دارای این خاصیّت است که

$$M_۳ = U\left(\frac{L_z}{\hbar}\right)U^\dagger$$

حال داریم

$$\begin{aligned} M_۱ &\equiv U\left(\frac{L_x}{\hbar}\right)U^\dagger \\ &= \frac{۱}{۲}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ i & ۰ & -i \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & -i & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \\ ۱ & i & ۰ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} M_۲ &\equiv U\left(\frac{L_y}{\hbar}\right)U^\dagger \\ &= \frac{۱}{۲}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ i & ۰ & -i \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & -i & ۰ \\ i & ۰ & -i \\ ۰ & i & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & -i & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \\ ۱ & i & ۰ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

به‌آسانی می‌بینیم که

$$\begin{aligned} [M_۱, M_۲] &= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = iM_۳ \end{aligned}$$

انتظار چنین نتیجه‌ای را داشتیم. مجموعهٔ ماتریسهای $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ نمایش دیگری از ماتریسهای اندازه‌حرکت زاویه‌ای است.

۱۳— دو ماتریس هرمیتی A و B را درنظر بگیرید که جابجا می‌شوند، یعنی $[A, B] = ۰$. فرض کنید ماتریس U ماتریس A را قطری می‌کند. نشان دهید که اگر ویژه‌مقادیر A همه باهم فرق کنند آنگاه همین ماتریس U ماتریسِ B را نیز قطری خواهد کرد. (راهنمایی: راه سادهٔ حل این مسئله این است که با ماتریس متناهی مثلاً ماتریس ۴×۴ کار کنیم و همه چیز را مستقیماً حساب کنیم).

داریم $AB = BA$. فرض می‌کنیم که U ماتریس یکانی باشد که ماتریس A را قطری می‌کند. در

این مسئله شرط دیگری نیز داریم که می‌گوید المانهای قطری ماتریس

$$UAU^\dagger = A_{\text{قطری}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

با هم فرق دارند. (این مسئله را برای ماتریس 4×4 نوشتیم). در نظر بگیرید

$$U[A,B]U^\dagger = UAU^\dagger UBU^\dagger - UBU^\dagger UAU^\dagger = 0$$

که به‌شکل زیر درمی‌آید (برای ماتریس 4×4)

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

اگر ۱۲ المان ماتریس حاصلضرب را بررسی کنیم، برای مثال، به‌دست می‌آوریم

$$a_1 b_{12} = a_2 b_{12}$$

و از آنجا که می‌خواهیم ویژه‌مقادیر با هم فرق داشته باشند درمی‌یابیم که $b_{12} = 0$. این استدلال را می‌توان به دیگر المانهای غیر قطری در ماتریس حاصلضرب نیز بسط داد و از این رو فقط المانهای قطری b_{ii} در ماتریس $UBU^\dagger$ هستند که صفر نیستند.

۱۴ــ ماتریس دلخواه M را درنظر بگیرید. نشان دهید که اگر $[M, M^\dagger] = 0$ باشد آنگاه M را می‌توان با ماتریس یکانی قطری کرد. (راهنمایی: ماتریسهای $M + M^\dagger$ و $i\,(M - M^\dagger)$ را درنظر بگیرید و از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۳ استفاده کنید.)

اگر دو ماتریس M و $M^\dagger$ با هم جابجا شوند آنگاه ماتریسهای هرمیتی $(M + M^\dagger)$ و $i\,(M - M^\dagger)$ نیز با هم جابجا می‌شوند. فرض کنید ماتریسی مانند U را پیدا کرده‌ایم که $(M + M^\dagger)$ را قطری می‌کند. آنگاه همین ماتریس، ماتریس $i\,(M - M^\dagger)$ را نیز قطری خواهد کرد مشروط بر این که ویژه‌مقادیر $(M + M^\dagger)$ با هم فرق داشته باشند. از این رو ماتریس U هر دو ماتریس M و $M^\dagger$ را جداگانه قطری می‌کند. (تا ندانیم که چگونه باید مواردی را بررسی کنیم که در آنها تعدادی از ویژه‌مقادیر ماتریس A در مسئلهٔ ۱۳ با هم فرق نداشته باشند، هنوز مسئله را حلّ نکرده‌ایم).

فصل دهم

اسپین

۱ — ویژه اسپینورهای بهنجار عملگر S_y را پیدا کنید.

باید معادلهٔ

$$\frac{\hbar}{۲}\begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{۲}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

را حلّ کنیم. ویژه‌حالت + برابر است با $u = -iv$ و در نتیجه ویژه‌حالت بهنجار چنین است

$$\chi_+ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ i \end{pmatrix}$$

ویژه‌حالت — را می‌توان از تعامد آن با ویژه‌حالت + به‌دست آورد. این ویژه‌حالت برابر می‌شود با

$$\chi_- = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ -i \end{pmatrix}$$

۲— ویژه اسپینورهای بهنجار ماتریس ۲ × ۲ زیر را پیدا کنید

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\, e^{-i\beta} \\ \sin\alpha\, e^{i\beta} & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

این ماتریس به‌شکل زیر است

$$\sigma_z\cos\alpha + \sigma_x\sin\alpha\cos\beta + \sigma_y\sin\alpha\sin\beta \equiv \sigma\cdot\mathbf{n}$$

که در آن

$$\mathbf{n} = (\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha)$$

نتیجه این که ویژه‌مقادیر باید ۱ ± باشند. اینک معادلهٔ

$$\frac{\hbar}{۲}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\, e^{-i\beta} \\ \sin\alpha\, e^{i\beta} & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

را حلّ می‌کنیم. برای ویژه‌مقدار + داریم

$$u\cos\alpha + v\sin\alpha\, e^{-i\beta} = u$$

می‌توانیم این معادله را به‌شکل

$$۲v\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\, e^{-i\beta} = ۲u\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

بنویسیم. از این رابطه داریم

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{۲} \\ e^{i\beta}\sin\frac{\alpha}{۲} \end{pmatrix}$$

ویژه‌حالت – به‌روش یکسانی به‌دست می‌آید و یا می‌توانیم برای به‌دست آوردن آن از شرط تعامد استفاده کنیم

$$\chi_- = \begin{pmatrix} e^{-i\beta}\sin\frac{\alpha}{۲} \\ -\cos\frac{\alpha}{۲} \end{pmatrix}$$

۳— با استفاده از روشی که در فصل ۹ گفتیم ماتریس یکانی پیدا کنید که ماتریس مسئلهٔ ۲ را قطری کند.

ماتریس

$$U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{۲} & e^{-i\beta}\sin\frac{\alpha}{۲} \\ e^{i\beta}\sin\frac{\alpha}{۲} & -\cos\frac{\alpha}{۲} \end{pmatrix}$$

دارای این خاصیّت است که

$$U^\dagger \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha e^{-i\beta} \\ \sin\alpha e^{-i\beta} & -\cos\alpha \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

که می‌توان آن را به‌آسانی تحقیق کرد.

۴— با استفاده از مطالب فصل ۹ نمایشهای ماتریسی اسپین ۳/۲ را بسازید. ویژه‌حالتها را در نمایشی پیدا کنید که S_z در آن قطری است.

ساختن این ماتریس کار بسیار ساده‌ای است.

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} ۳/۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱/۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۳/۲ \end{pmatrix}$$

برای ساختن ماتریس S_+ از رابطهٔ $(S_+)_{mn} = \hbar\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,\delta_{m,n+1}$ استفاده می‌کنیم و داریم

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ساختن $S_- = (S_+)^\dagger$ ساده است. با استفاده از این روابط داریم

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \\ &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{i}{2}(S_+ - S_-) \\ &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

یافتن ویژه‌حالتها در پایهٔ نمایش فوق آسان است

$$\chi_{3/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \chi_{-3/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۵– اسپینور

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

را درنظر بگیرید. احتمال این که اندازه‌گیری $(3S_x + 4S_y)/5$ مقدار $-\hbar/2$ را نتیجه دهد چقدر است؟

نخست نیاز داریم ویژه‌حالتهای عملگر $(3S_x + 4S_y)/5$ را حساب کنیم. ویژه‌مقادیر برابرند با $\pm\hbar/2$ چون این عملگر به‌شکل $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ است که در آن $\mathbf{n}$ بردار یکّهٔ $(3/5, 4/5, 0)$ است. معادله‌ای که باید حلّ کنیم چنین است

$$\frac{\hbar}{2}\left(\frac{3}{5}\sigma_x + \frac{4}{5}\sigma_y\right)\chi_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_\pm$$

به‌ویژه می‌خواهیم ویژه‌حالت متناظر با ویژه‌مقدار $-$ را پیدا کنیم، یعنی می‌خواهیم معادلهٔ زیر را حلّ کنیم

$$\begin{pmatrix} \circ & \frac{۳-۴i}{۵} \\ \frac{۳+۴i}{۵} & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

از این معادله داریم

$$(۳-۴i)v = -۵u$$

حالت بهنجار چنین است

$$\frac{۱}{\sqrt{۵\circ}}\begin{pmatrix} ۳-۴i \\ -۵ \end{pmatrix}$$

احتمال مورد نظر مجذور عبارت زیر است

$$\frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲ \quad ۱)\frac{۱}{\sqrt{۵\circ}}\begin{pmatrix} ۳-۴i \\ -۵ \end{pmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۲۵\circ}}(۶-۸i-۵)$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲۵\circ}}(۱-۸i)$$

که برابر است با $۶۵/۲۵\circ = ۱۳/۵\circ$.

۶ــ دستگاه اسپین ۱/۲ با اسپینور بهنجار

$$\psi = \frac{۱}{\sqrt{۶۵}}\begin{pmatrix} ۴ \\ ۷ \end{pmatrix}$$

توصیف شده است. احتمال این که اندازه‌گیری S_y مقدار $-\hbar/۲$ را نتیجه دهد چقدر است؟

در مسئلهٔ ۱ ویژه‌اسپینور متناظر با ویژه‌مقدار منفی عملگر S_y را پیدا کردیم که برابر بود با

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ -i \end{pmatrix}$$

احتمال مورد نظر مجذور عبارت زیر است

$$\frac{۱}{\sqrt{۶۵}}(۴ \quad ۷)\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ -i \end{pmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳\circ}}(۴-۷i)$$

که برابر است با $۶۵/۱۳\circ = ۱/۲$.

۷ــ ثابت کنید که

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

از رابطهٔ $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z = -\sigma_y\sigma_x$ و الی آخر و نیز از رابطهٔ $\sigma_x^۲ = ۱$ و الی آخر استفاده می‌کنیم تا محاسبات زیر را انجام دهیم

$$
\begin{aligned}
(\sigma_x A_x + \sigma_y A_y + \sigma_z A_z)(\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z) \\
&= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z + i\sigma_z(A_x B_y - A_y B_x) + i\sigma_y(A_z B_x - A_x B_z) \\
&\qquad + i\sigma_x(A_y B_z - A_z B_y) \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + i\sigma\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}
\end{aligned}
$$

۸– ذرّهٔ اسپین ۱/۲ در لحظهٔ $t = ۰$ در ویژه‌حالت S_x با ویژه‌مقدار $+\hbar/۲$ قرار دارد. در این لحظه ذرّه را در میدان مغناطیسی به‌بزرگی B که در راستای z است قرار می‌دهیم و ذرّه در این میدان به‌مدت T حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. در این لحظه میدان مغناطیسی به سرعت می‌چرخد و در راستای y قرار می‌گیرد. پس‌از مدت زمان دیگر T عملگر S_x را اندازه‌می‌گیریم. احتمال این‌که مقدار $+\hbar/۲$ نتیجه شود چقدر است؟

از معادلات (۱۰–۲۶) و (۱۰–۲۷) استفاده می‌کنیم. در لحظهٔ T با حالت

$$\psi(T) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} e^{-i\omega T} \\ e^{i\omega T}\end{pmatrix}$$

شروع می‌کنیم که در آن $\omega = egB/۴m_e$. حال این تابع حالت اوّلیهٔ ذرّهٔ اسپین ۱/۲ را نمایش می‌دهد که در میدان مغناطیسی قرار دارد که در جهت محور y است. بنابر معادلهٔ (۱۰–۲۳) تابع ψ در معادلهٔ

$$i\frac{d\psi(t)}{dt} = \omega\begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰\end{pmatrix}\psi(t)$$

صدق می‌کند. بنابراین با $\psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t)\end{pmatrix}$ داریم

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\omega b \\
\frac{db}{dt} &= \omega a
\end{aligned}
$$

جواب چنین است

$$
\begin{aligned}
a(t) &= a(T)\cos\omega(t-T) - b(T)\sin\omega(t-T) \\
b(t) &= b(T)\cos\omega(t-T) + a(T)\sin\omega(t-T)
\end{aligned}
$$

می‌دانیم که

$$a(T) = \frac{e^{-i\omega T}}{\sqrt{۲}}, \quad b(T) = \frac{e^{i\omega T}}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین

$$\psi(2T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega T}\cos\omega T - e^{i\omega T}\sin\omega T \\ e^{i\omega T}\cos\omega T + e^{-i\omega T}\sin\omega T \end{pmatrix}$$

دامنهٔ این که اندازه‌گیری S_x نتیجهٔ $\hbar/2$ را دهد برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega T}\cos\omega T - e^{i\omega T}\sin\omega T \\ e^{i\omega T}\cos\omega T + e^{-i\omega T}\sin\omega T \end{pmatrix} = \left(\cos^2\omega T - i\,\sin^2\omega T\right)$$

از این رو احتمال برابر است با

$$\begin{aligned} P &= \cos\omega^4 T + \sin^4\omega T \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2\omega T) \end{aligned}$$

۹ــ (الف) نشان دهید که ماتریس 2×2 را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$A + \mathbf{B}\cdot\sigma$$

(ب) چه شرایطی را باید A و $\mathbf{B}$ برآورد کنند تا این ماتریس یکانی باشد؟ هرمیتی باشد؟

(الف)اگر ماتریس دلخواهی مانند

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

را با ماتریس

$$A + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A + B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & A - B_z \end{pmatrix}$$

برابر قرار دهیم می‌بینیم که اگر A، B_x، B_y و B_z را موهومی بگیریم می‌توانیم α، β، γ و δ را برحسب آنها پیدا کنیم.

(ب) اگر خواسته باشیم که ماتریس $M = A + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$ یکانی باشد آنگاه باید

$$\begin{aligned} &(A + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B})(A^* + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}^*) = \\ &\quad |A|^2 + A\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}^* + A^*\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^* + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{B}^* = 1 \end{aligned}$$

این رابطه وقتی برقرار است که داشته باشیم

$$\begin{aligned} |A|^2 + |B_x|^2 + |B_y|^2 + |B_z|^2 &= 1 \\ AB_x^* + A^*B_x + i(B_yB_z^* - B_y^*B_z) &= 0 \\ &\cdots \end{aligned}$$

اگر بخواهیم که ماتریس M هرمیتی باشد باید A و همهٔ مؤلفه‌های بردار $\mathbf{B}$ حقیقی باشند.

۱۰ – نشان دهید که هر برداری مانند $\mathbf{a}$ به بزرگی a در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$e^{\sigma\cdot\mathbf{a}} = \cos a + i\sigma\cdot\mathbf{a}\frac{\sin a}{a}$$

از اتّحاد $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^{۲}$ در بسط زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}
e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}} &= ۱ + i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}) + \frac{i^{۲}}{۲!}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})^{۲} + \frac{i^{۳}}{۳!}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})^{۳} + \frac{i^{۴}}{۴!}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})^{۴} + \ldots \\
&= ۱ - \frac{۱}{۲!}a^{۲} + \frac{۱}{۴!}(a^{۲})^{۲} + \ldots + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{a}}\left(a - \frac{a^{۳}}{۳!} + \ldots\right) \\
&= \cos a + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{a}}\sin a \\
&= \cos a + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\frac{\sin a}{a}
\end{aligned}$$

۱۱ – دو ذرّهٔ اسپین ۱/۲ را درنظر بگیرید که اسپینهای آنها با عملگرهای پائولی $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ توصیف شده‌اند. فرض کنید $\hat{\mathbf{e}}$ بردار یکّه‌ای باشد که دو ذرّه را بهم وصل می‌کند و با عملگر

$$S_{۱۲} = ۳(\sigma_۱\cdot\hat{\mathbf{e}})(\sigma_۲\cdot\hat{\mathbf{e}}) - \sigma_۱\cdot\sigma_۲$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که اگر این دو ذرّه در حالت (یکتایی) $S = ۰$ باشند آنگاه

$$S_{۱۲}X_{\text{یکتایی}} = ۰$$

نشان دهید که برای حالت سه‌تایی داریم:

$$(S_{۱۲} - ۲)(S_{۱۲} + ۴)X_{\text{سه‌تایی}} = ۰$$

(راهنمایی: بردار $\hat{\mathbf{e}}$ را در امتداد محور z درنظر بگیرید.)

از رابطهٔ

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{۲} &= \left(\frac{\hbar}{۲}\boldsymbol{\sigma}_۱ + \frac{\hbar}{۲}\boldsymbol{\sigma}_۲\right)^{۲} \\
&= \frac{\hbar^{۲}}{۴}\left(\sigma_۱^{۲} + \sigma_۲^{۲} + ۲\boldsymbol{\sigma}_۱\cdot\boldsymbol{\sigma}_۲\right)
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\sigma_۱ \cdot \sigma_۲ = ۲S(S+۱) - ۳$$

این عبارت برای حالت یکتایی برابر با ۳− و برای حالت سه‌تایی برابر با ۱+ است.

بردار یکّهٔ $\hat{e}$ را در جهت محور z می‌گیریم تا جملهٔ اوّل در عبارت $S_{۱۲}$ برابر شود با $۳\sigma_{۱z}\sigma_{۲z}$.

(الف) برای هر حالت یکتایی دو اسپین همیشه در جهت مخالف هم هستند و در نتیجه جملهٔ اوّل برابر با ٦− و جملهٔ دوّم برابر با ۳+ است. بنابراین

$$S_{۱۲} X_{\text{یکتایی}} = ۰$$

(ب) برای هر حالت سه‌تایی جملهٔ اوّل به‌ازای $S_z = ۱$ و $S_z = -۱$ برابر می‌شود با ۱+ و به‌ازای $S_z = ۰$ برابر می‌شود با ۱−، یعنی وقتی که عملگر $S_{۱۲}$ بر حالت سه‌تایی عمل کند در مورد اوّل حاصل آن $۳ - ۱ = ۲$ و در مورد دوّم حاصل آن $-۳ - ۱ = -۴$ می‌شود. بنابراین داریم

$$(S_{۱۲} - ۲)(S_{۱۲} + ۴)\, X_{\text{سه‌تایی}} = ۰$$

۱۲— در دستگاه نوترون—پروتون انرژی پائین (که اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری آن صفر است) انرژی پتانسیل چنین است:

$$V(r) = V_۱(r) + V_۲(r)\left(۳\frac{(\sigma_۱ \cdot \mathbf{r})(\sigma_۲ \cdot \mathbf{r})}{r^۲} - \sigma_۱ \cdot \sigma_۲\right) + V_۳(r)\sigma_۱ \cdot \sigma_۲$$

که در آن $\mathbf{r}$ برداری است که دو ذرّه را بهم وصل می‌کند. انرژی پتانسیل این دستگاه نوترون—پروتون را در دو مورد (الف) در حالت اسپینی یکتایی، و (ب) در حالت اسپینی سه‌تایی حساب کنید.

انرژی پتانسیل را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$V(r) = V_۱(r) + V_۲(r)S_{۱۲} + V_۳(r)[۲S(S+۱) - ۳]$$

مقدار چشمداشتی عملگر $S_{۱۲}$ در هر حالت یکتایی برابر با صفر است و از این رو

$$V(r) = V_۱(r) - ۳V_۳(r)$$

برای حالت سه‌تایی مقدار چشمداشتی $S_{۱۲}$ به مؤلفهٔ z اسپین کلّ بستگی دارد. آنچه برای انرژی پتانسیل مهمّ است مقدار میانگین آن است مشروط بر این که دو ذرّه با احتمال یکسانی در یکی از سه حالت S_z باشند. در چنین موردی مقدار میانگین S_z برابر است با $۰ = ۳/(۴ - ۲ + ۲)$.

۱۳— دو الکترون در حالت اسپینی یکتایی را درنظر بگیرید.

(الف) اگر اندازه‌گیری اسپین یکی از الکترونها نشان دهد که این الکترون در حالتی است با $s_z = ۱/۲$، احتمال این که اندازه‌گیری مؤلفهٔ z اسپین الکترون دیگر نتیجهٔ $s_z = ۱/۲$ را بدهد چقدر است؟

(ب) اگر اندازه‌گیری اسپین یکی از الکترونها نشان دهد که این الکترون در حالتی است با $s_y = ۱/۲$، احتمال این که اندازه‌گیری مؤلفهٔ x اسپین الکترون دیگر نتیجهٔ $s_x = ۱/۲$ را بدهد چقدر است؟

(ج) اگر الکترون (۱) در حالت $\cos\alpha_۱\chi_+ + \sin\alpha_۱ e^{i\beta_۱}\chi_-$ و الکترون (۲) در حالت $\cos\alpha_۲\chi_+ + \sin\alpha_۲ e^{i\beta_۲}\chi_-$ باشد احتمال این که این دستگاه دو الکترونی در حالت سه‌تایی باشد چقدر است؟

(الف) اگر یکی از الکترونها در حالت "بالا و دیگری در حالت "پائین باشد آشکار است که برای حالت یکتایی داریم

$$\psi_{\text{یکتایی}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\chi_+^{(۱)}\chi_-^{(۲)} - \chi_-^{(۱)}\chi_+^{(۲)}\right)$$

(ب) ویژه‌حالتهای عملگر S_y را با $\xi_\pm$ نمایش می‌دهیم. این ویژه‌حالتها را در مسئلهٔ ۱ به‌دست آوردیم

$$\xi_+^{(۱)} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ i\end{pmatrix}, \quad \xi_-^{(۱)} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ -i\end{pmatrix}$$

اسپینورهای ذرّهٔ ۱ را می‌توانیم برحسب $\xi_\pm$ بسط دهیم

$$\chi_+ = \begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ i\end{pmatrix} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ -i\end{pmatrix}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\xi_+ + \xi_-)$$
$$\chi_- = \begin{pmatrix}۰\\ ۱\end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ i\end{pmatrix} - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ -i\end{pmatrix}\right) = \frac{i}{\sqrt{۲}}(\xi_+ - \xi_-)$$

برای ذرّهٔ ۲ نیز می‌توانیم اسپنورهای آن را برحسب ویژه‌حالتهای عملگر S_x، یعنی

$$\eta_+^{(۲)} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ ۱\end{pmatrix}, \quad \eta_-^{(۲)} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ -۱\end{pmatrix}$$

بسط دهیم

$$\chi_+ = \begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ ۱\end{pmatrix} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ -۱\end{pmatrix}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\eta_+ + \eta_-)$$
$$\chi_- = \begin{pmatrix}۰\\ ۱\end{pmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ ۱\end{pmatrix} - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ -۱\end{pmatrix}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\eta_+ - \eta_-)$$

حال در بسط تابع‌موج حالت یکتایی ضریب $\xi_+^{(۱)}\eta_+^{(۲)}$ را استخراج و مجذور مطلق آن را حساب می‌کنیم. داریم

$$\left|\frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{۱-i}{\sqrt{۲}}\right|^۲ = \frac{۱}{۴}$$

(ج) حالت مورد نظر چنین است

$$\left(\cos\alpha_1\chi_+^{(1)}+\sin\alpha_1 e^{i\beta_1}\chi_-^{(1)}\right)\left(\cos\alpha_2\chi_+^{(2)}+\sin\alpha_2 e^{i\beta_2}\chi_-^{(2)}\right)$$

باید حاصلضرب داخلی این حالت با سه تابع‌موج حالت سه‌تایی دستگاه دو الکترونی را حساب کنیم. ساده‌تر آن است که احتمال این که حالت، حالت یکتایی باشد را حساب و سپس آن را از واحد کسر کنیم. محاسبه ساده است

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}-\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)}\right)\middle|\left(\cos\alpha_1\chi_+^{(1)}+\sin\alpha_1 e^{i\beta_1}\chi_-^{(1)}\right)\left(\cos\alpha_2\chi_+^{(2)}+\sin\alpha_2 e^{i\beta_2}\chi_-^{(2)}\right)\right\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 e^{i\beta_2}-\sin\alpha_1 e^{i\beta_1}\cos\alpha_2\right)$$

مجذور مطلق این عبارت احتمال آن است که حالت یکتایی باشد و برابر است با

$$P_s=\frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2+\cos^2\alpha_2\sin^2\alpha_1+2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_2\cos\left(\beta_1-\beta_2\right)\right)$$

اینک داریم

$$P_t=1-P_s$$

۱۴ــ ذرّه‌ای با اسپین ۱ در پتانسیل مرکزی

$$V(r)=V_1(r)+\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}}{\hbar^2}V_2(r)+\frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{L})^2}{\hbar^4}V_3(r)$$

حرکت می‌کند. مقادیر $V(r)$ در حالتهای $J=L+1, L,$ و $L-1$ چقدر است؟

داریم

$$\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$$

و

$$\mathbf{J}^2=\mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

چون $S=1$ داریم

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}[J(J+1)-L(L+1)-2]$$

توجه کنید که طرفین این رابطه را بر $\hbar^{۲}$ تقسیم کرده‌ایم. به‌ازای $J = L + ۱$ مقدار این عبارت برابر با L، به‌ازای $J = L$ مقدار آن برابر با ۱— و به‌ازای $J = L - ۱$ مقدارش برابر با $-L - ۱$ می‌شود. بنابراین

$$
\begin{array}{ll}
J = L + ۱ & V = V_۱ + LV_۲ + L^۲ V_۳ \\
J = L & V_۱ - V_۲ + V_۳ \\
J = L - ۱ & V_۱ - (L + ۱)V_۲ + (L + ۱)^۲ V_۳
\end{array}
$$

فصل یازدهم

نظریّهٔ مستقل از زمان اختلال

۱ — نوسانگر هماهنگ ساده‌ای را با فرکانس مشخصّهٔ ω در یک بعد درنظر بگیرید. فرض کنید اختلال $\lambda x^{۲}$ بر آن اعمال شده‌است. جابجایی انرژی تراز n ام را تا مرتبهٔ اوّل در λ حساب کنید. آیا می‌توانید بدون انجام هیچ محاسبه‌ای جملهٔ مرتبهٔ دوّم را حساب کنید که با $\lambda^{۲}$ متناسب است؟ (راهنمایی: هامیلتونی کل شامل اختلال را بنویسید.)

جابجایی مرتبهٔ اوّل در انرژی برابر است با

$$E_n^{(۱)} = \lambda \langle n|x^{۲}|n\rangle = \lambda \left(\sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\right)^{۲} \lambda \langle n|(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)|n\rangle$$

برای محاسبهٔ المان ماتریسی

$$\left\langle n\left|\left(A^{۲} + AA^\dagger + A^\dagger A + \left(A^\dagger\right)^{۲}\right|n\right\rangle$$

توجه می‌کنیم که

$$A^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+۱}\,|n+۱\rangle, \quad \langle n|A = \sqrt{n+۱}\langle n+۱|$$

بنابراین دو جملهٔ اوّل و آخر صفرند و حاصل دو جملهٔ دوّم و سوّم برابر می‌شود با $(n+۱)+(n-۱)=۲n$. اینک جابجایی مرتبهٔ اوّل برابر است با

$$E_n^{(۱)} = \lambda\left(\frac{\hbar}{m\omega}n\right)$$

محاسبهٔ جابجایی مرتبهٔ دوّم در انرژی بسیار پیچیده است. عبارتی که باید محاسبه کرد چنین است

$$E_n^{(۲)} = \lambda^{۲}\left(\frac{\hbar}{۲m\omega}\right)^{۲} \sum_{n\neq m} \frac{\left\langle n\left|(A+A^\dagger)^{۲}\right|m\right\rangle \left\langle m\left|(A+A^\dagger)^{۲}\right|n\right\rangle}{\hbar\omega(n-m)}$$

محاسبهٔ این عبارت هرچند انجام‌پذیر ولی پر دردسر است. به‌جای آن پیشنهاد می‌شود که بنویسیم

$$H = \frac{p^{۲}}{۲m} + \frac{۱}{۲}m\omega^{۲}x^{۲} + \lambda x^{۲}$$

این رابطه هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای است با فرکانس

$$\begin{aligned}\omega^* &= \sqrt{\omega^۲ + ۲\lambda/m}\\ &= \omega + \frac{\lambda}{\omega m} - \frac{۱}{۲}\frac{\lambda^۲}{\omega^۳ m^۲} + \dots\end{aligned}$$

که طیف انرژی آن چنین است

$$\begin{aligned}E_n &= \hbar\omega^*\left(n + \frac{۱}{۲}\right)\\ &= \hbar\omega\left(n+\frac{۱}{۲}\right) + \frac{\lambda\hbar}{\omega m}\left(n+\frac{۱}{۲}\right) - \frac{\lambda^۲\hbar}{۲\omega^۳ m^۲}\left(n+\frac{۱}{۲}\right) + \dots\end{aligned}$$

ثابت ۱/۲ که با هر n همراه است انرژی نقطهٔ صفر است. ما فقط به تغییر در انرژی هر حالت مفروض $|n\rangle$ علاقه‌مند هستیم و از این رو انرژی نقطهٔ صفر را از عبارت هر مرتبه λ کسر می‌کنیم. توجه کنید که محاسبهٔ مرتبهٔ اوّل در λ درست است.

۲– چرخندهٔ متقارنی را با $H_۰ = \mathbf{L}^۲/۲I$ درنظر بگیرید. فرض کنید که اختلال

$$H_۱ = E_۱ \cos\theta$$

بر این دستگاه اعمال شده است. جابجاییهای انرژی حالتهای $l = ۱$ چقدر است؟

ویژه‌توابع چرخنده هماهنگهای کروی هستند. جابجایی مرتبهٔ اوّل انرژی برای حالتهای $l = ۱$ چنین است

$$\begin{aligned}\Delta E &= \langle ۱, m|E\cos\theta|۱, m\rangle\\ &= E\int_۰^{۲\pi} d\phi \int_۰^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta |Y_{۱m}|^۲\end{aligned}$$

به‌ازای $m = \pm ۱$ داریم

$$۲\pi E\int_۰^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\left(\frac{۳}{۸\pi}\right)\sin^۲\theta = \frac{۳E}{۴}\int_{-۱}^{۱} du\, u(۱-u^۲) = ۰$$

انتگرال مربوط به $m = ۰$ نیز صفر می‌شود. چنین نتیجه‌ای را انتظارداریم. ویژه‌حالتهای عملگر $\mathbf{L}^۲$ ویژه‌حالتهای عملگر پاریته نیز هستند. تحت بازتاب $\mathbf{r} \to \mathbf{r}$ اختلال $\cos\theta$ فرد است و از این رو مقدار چشمداشتی هر عملگر فرد همیشه صفر است. چون اختلال برهمکنش با میدان الکتریکی را نمایش می‌دهد نتیجه‌ای که گرفتیم بیان می‌کند که هر چرخندهٔ متقارن گشتاور دوقطبی الکتریکی دائمی ندارد.

محاسبهٔ جابجایی مرتبهٔ دوّم پیچیده است. ما باید عبارت

$$\Delta E^{(۲)} = E^۲ \sum_{L,M(L\neq ۱)} \frac{|\langle ۱, m|\cos\theta|L, M\rangle|^۲}{E_۱ - E_L}$$

را حساب کنیم که در آن $E_L = \frac{\hbar^{۲}}{۲I}L(L+۱)$. اگر توجه کنیم که فقط جملات $L=۰$ و $L=۲$ در جمع بالا سهم دارند این محاسبه ساده می‌شود. چنین امری از جدول هماهنگهای کروی مشهود است. به‌ازای $L=۱$ دیدیم که المان ماتریسی صفر می‌شود. به‌ازای مقادیر بزرگتر می‌بینیم که $\cos\theta\, Y_{۱,\pm۱} \propto Y_{۲,\pm۱}$ و $\cos\theta\, Y_{۱,۰} \propto Y_{۲,۰} + bY_{۰,۰}$. تعامد هماهنگهای کروی متناظر با مقادیر مختلف L در اینجا وارد می‌شوند. توجه کنید که انتگرال‌گیری روی ϕ سبب می‌شود که به‌ازای $m=\pm۱$ فقط جملهٔ $M=\pm۱, L=۲$ سهم دارد حال آن که برای جملهٔ $m=۰$ از $L=۰$ و $M=۰, L=۲$ سهم خواهیم داشت. چند انتگرال‌گیری ساده به نتیجهٔ زیر می‌انجامد

$$\Delta E^{(۲)}_{m=\pm۱} = -\frac{۲IE^{۲}}{\hbar^{۲}}\frac{۱}{۱۵}; \quad \Delta E^{(۲)}_{m=۰} = -\frac{۲IE^{۲}}{\hbar^{۲}}\frac{۱}{٦۰}$$

۳— ذرّه‌ای را در چاه پتانسیل بی‌نهایت به پهنای L درنظر بگیرید که یکی از دیواره‌های آن در $x=۰$ قرار دارد. اگر پتانسیل دیگری مانند

$$V(x) = V_{۰}\left(\frac{x}{L}\right)$$

را بر این پتانسیل اعمال کنیم تا کف آن را شیب دهد آنگاه جابجایی انرژی حالت n ام چقدر می‌شود؟

جابجایی در انرژی تا پائینترین مرتبه در $V_{۰}$ برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left(\sqrt{\frac{۲}{L}}\right)^{۲}\frac{V_{۰}}{L}\int_{۰}^{L} dx\, x\, \sin^{۲}\frac{n\pi x}{L}\\ &= \frac{۲V_{۰}}{L^{۲}}\left(\frac{L}{\pi}\right)^{۲}\int_{۰}^{\pi} du\, u\, \sin^{۲} nu\\ &= \frac{V_{۰}}{\pi^{۲}}\int_{۰}^{\pi} du\, u\,(۱-\cos ۲nu)\\ &= \frac{۱}{۲}V_{۰}\end{aligned}$$

جای شگفتی نیست نتیجه‌ای که گرفتیم بیان می‌کند که جابجایی برابر است با مقدار اختلال در نقطهٔ وسط مشروط بر این که مجذور ویژه‌توابع به‌طور متوسط در دو سوی پتانسیل یکنواخت توزیع شده باشند.

۴— ماتریس

$$\begin{pmatrix} E & \lambda & ۰ & ۰ \\ \lambda & E & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲E & \sigma \\ ۰ & ۰ & \sigma & ۰ \end{pmatrix}$$

را قطری کنید.

ماتریس

$$\begin{pmatrix} E & \lambda & ۰ & ۰ \\ \lambda & E & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲E & \sigma \\ ۰ & ۰ & \sigma & ۰ \end{pmatrix}$$

از دو جعبه تشکیل شده‌است که می‌توان آنها را جداگانه قطری کرد. برای جعبهٔ گوشهٔ چپ بالا باید معادلهٔ زیر را حلّ کنیم

$$\begin{pmatrix} E & \lambda \\ \lambda & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ویژه‌مقادیر برابرند با $\eta = E \pm \lambda$. ویژه‌حالتهای متناظر با این ویژه‌مقادیر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ \pm ۱ \end{pmatrix}$ هستند.

برای جعبهٔ گوشهٔ راست پائین باید معادلهٔ زیر را حلّ کنیم

$$\begin{pmatrix} ۲E & \sigma \\ \sigma & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

در اینجا ویژه‌مقادیر برابرند با $\xi = E \pm \sqrt{E^۲ + \sigma^۲}$. ویژه‌حالتهای متناظر با این ویژه‌مقادیر به‌ترتیب برابر با $N\begin{pmatrix} \sigma \\ -E \pm \sqrt{E^۲+\sigma^۲} \end{pmatrix}$ که در آن $\frac{۱}{N^۲} = \sigma^۲ + \left(-E \pm \sqrt{E^۲+\sigma^۲}\right)^۲$.

۵ــ اتم هیدرژن را درنظر بگیرید و فرض کنید که پروتون به‌جای این که چشمهٔ نقطه‌ای میدان کولنی باشد کره‌ای با بار یکنواخت به‌شعاع R است، یعنی پتانسیل کولنی چنان تغییرکرده‌است که

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{۳e^۲}{۸\pi\varepsilon_۰ R^۳}\left(R^۲ - \frac{۱}{۳}r^۲\right) \quad r < R \quad (\ll a_۰) \\ &= -\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r} \quad\quad r > R \end{aligned}$$

با استفاده از توابع‌موج فصل ۸ جابجایی انرژی ناشی از این تغییر را برای حالت $n = ۱$، $l = ۰$ و حالتهای $n = ۲$ حساب کنید.

تغییر در انرژی پتانسیل با رابطهٔ

$$\begin{aligned} V_۱ &= -\frac{۳e^۲}{۸\pi\epsilon_۰ R^۳}\left(R^۲ - \frac{۱}{۳}r^۲\right) + \frac{e^۲}{۴\pi\epsilon_۰ r}, \quad r \le R \\ &= ۰ \quad \text{جاهای دیگر} \end{aligned}$$

توصیف شده است. داریم

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int d^۳\mathbf{r}\, \psi^*_{nl}(\mathbf{r})\, V_۱\, \psi_{nl}(\mathbf{r}) \\ &= \int_۰^R r^۲ dr\, V_۱ R^۲_{nl}(r) \end{aligned}$$

این عبارت را برای حالتهای مختلف حساب می‌کنیم. برای حالت $n = ۱$ داریم

$$\Delta E_{۱۰} = ۴\left(\frac{Z}{a_\circ}\right)^۳ \int_\circ^R r^۲ dr\, r^۲ e^{-۲Zr/a_\circ}\left(-\frac{۳e^۲}{۸\pi\epsilon_\circ R^۳}\left(R^۲ - \frac{۱}{۳}r^۲\right) + \frac{e^۲}{۴\pi\epsilon_\circ r}\right)$$

این رابطه با تغییر متغیر $x = \frac{r}{Za_\circ}$ و با تعریف $\rho = \frac{ZR}{a_\circ}$ به‌شکل زیر درمی‌آید

$$\Delta E_{۱۰} = ۴\left(\frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_\circ a_\circ}\right)\int_\circ^\rho x^۲ dx\left(-\frac{۳}{۲\rho} + \frac{x^۲}{۲\rho^۳} + \frac{۱}{x}\right)e^{-۲x}$$

چون $x \ll ۱$ می‌توانیم تقریب بگیریم $e^{-۲x} \approx ۱ - ۲x$ که با این تقریب انتگرالها ساده می‌شوند. نتیجه این است

$$\Delta E_{۱۰} = \left(\frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_\circ a_\circ}\right)\left(\frac{۴}{۱۰}\rho^۲ + \ldots\right)$$

محاسباتی شبیه به محاسبه‌ای که گذشت نشان می‌دهند که

$$\begin{aligned}\Delta E_{۲۰} &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_\circ a_\circ}\right)\int_\circ^\rho x^۲ dx(۱ - x)^۲\left(-\frac{۳}{۲\rho} + \frac{x^۲}{۲\rho^۳} + \frac{۱}{x}\right)e^{-x}\\ &\approx \left(\frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_\circ a_\circ}\right)\left(\frac{۱}{۲۰}\rho^۲ + \ldots\right)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\Delta E_{۲۱} &= \frac{۱}{۲۴}\left(\frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_\circ a_\circ}\right)\int_\circ^\rho x^۲ dx\, x^۲\left(-\frac{۳}{۲\rho} + \frac{x^۲}{۲\rho^۳} + \frac{۱}{x}\right)e^{-x}\\ &\approx \left(\frac{Ze^۲}{۴\pi\epsilon_\circ a_\circ}\right)\left(\frac{۱}{۱۱۲۰}\rho^۴ + \ldots\right)\end{aligned}$$

٦– اختلال

$$V = \lambda x^۴$$

را به هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی

$$H_\circ = \frac{p^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}m\omega^۲ x^۲$$

اضافه کرده‌ایم. جابجایی انرژی حالت پایه این نوسانگر هماهنگ یک بعدی را حساب کنید.

باید عبارت $\lambda\langle ۰|x^۴|۰\rangle$ را حساب کنیم. یک راه این است که از رابطهٔ

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\,(A + A^\dagger)$$

استفاده کنیم. آنگاه داریم

$$\lambda\langle \circ|x^{۴}|\circ\rangle = \lambda\left(\frac{\hbar}{۲m\omega}\right)^{۲}\langle\circ|(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)|\circ\rangle$$

المان ماتریسی برابر است با

$$\begin{aligned}\langle\circ|(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)|\circ\rangle &= \langle\circ|A^\dagger(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)A^\dagger|\circ\rangle\\ &= \langle ۱|(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)|۱\rangle\\ &= [\langle\circ| + \sqrt{۲}\langle ۲|][|\circ\rangle + \sqrt{۲}|۲\rangle]\\ &= ۳\end{aligned}$$

بنابراین جابجایی انرژی برابر است با

$$\Delta E = ۳\lambda\left(\frac{\hbar}{۲m\omega}\right)^{۲}$$

به‌آسانی می‌توان دید که محاسبهٔ انتگرال زیر نیز به نتیجهٔ یکسانی می‌انجامد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx(\lambda x^{۴})\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{۱/۴} e^{-m\omega x^{۲}/۲\hbar}\right]$$

۷– کف چاه پتانسیل بی‌نهایتی به شکل

$$V(x) = \varepsilon\sin\frac{\pi x}{b} \qquad \circ \le x \le b$$

درآمده است. جابجاییهای انرژی همهٔ حالتهای برانگیخته را تا مرتبهٔ اوّل در ε حساب کنید. توجه کنید که این چاه در ابتدا چنین بود

$$\begin{aligned}V(x) &= \circ \qquad \circ \le x \le b\\ &= \infty \qquad \text{جاهای دیگر}\end{aligned}$$

جابجایی اختلال مرتبهٔ اوّل برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta E_n &= \frac{۲\epsilon}{b}\int_\circ^b dx\sin\frac{\pi x}{b}\left(\sin\frac{n\pi x}{b}\right)^{۲}\\ &= \frac{۲\epsilon}{\pi}\int_\circ^\pi du\sin u\,(\sin nu)^{۲}\\ &= \frac{۲\epsilon}{\pi}\left(۱+\frac{۱}{۴n^{۲}-۱}\right)\end{aligned}$$

۸– قاعدهٔ جمع (قاعدهٔ جمع توماس–ریش–کوهن)

$$\sum_n (E_n - E_a)\left|\langle n|x|a\rangle\right|^۲ = \frac{\hbar^۲}{۲m}$$

را ثابت کنید. [راهنمایی: (الف) رابطهٔ جابجایی $[p,x] = \hbar/i$ را به‌شکل

$$\sum_n \{\langle a|p|n\rangle\langle n|x|a\rangle - \langle a|x|n\rangle\langle n|p|a\rangle\} = \frac{\hbar}{i}\langle a|a\rangle = \frac{\hbar}{i}$$

(ب) در حل این مسئله از رابطهٔ

$$\langle a|p|n\rangle = \left\langle a\left|m\frac{dx}{dt}\right|n\right\rangle = m\frac{i}{\hbar}\langle a\left|[H,x]\right|n\rangle$$

استفاده کنید.]

از $[p,x] = -i\hbar$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}-i\hbar &= \langle a|px - xp|a\rangle \\ &= \sum_n\{\langle a|p|n\rangle\langle n|x|a\rangle - \langle a|x|n\rangle\langle n|p|a\rangle\}\end{aligned}$$

حال داریم

$$\begin{aligned}\langle a|p|n\rangle &= m\left\langle a\left|\frac{dx}{dt}\right|n\right\rangle \\ &= \frac{im}{\hbar}\langle a|Hx - xH|n\rangle \\ &= \frac{im}{\hbar}(E_a - E_n)\langle a|x|n\rangle\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\langle n|p|a\rangle &= \langle a|p|n\rangle^* \\ &= -\frac{im}{\hbar}(E_a - E_n)\langle n|x|a\rangle\end{aligned}$$

بنابراین

$$-i\hbar = \sum_n \frac{۲im}{\hbar}(E_a - E_n)\langle a|x|n\rangle\langle n|x|a\rangle$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_n (E_n - E_a)\left|\langle a|x|n\rangle\right|^۲ = \frac{\hbar^۲}{۲m}$$

۹ــ درستی قاعدهٔ جمع مسئلهٔ ۸ را برای نوسانگر هماهنگ یکِ بعدی امتحان کنید. حالت "a" را حالت پایه بگیرید.

برای نوسانگر هماهنگ با $|a\rangle = |\circ\rangle$ داریم

$$\begin{aligned}\langle n|x|\circ\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\langle n|A^\dagger|\circ\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\,\delta_{n,۱}\end{aligned}$$

یعنی سمت چپ در قاعدهٔ جمع برابر است با

$$\hbar\omega\left(\frac{\hbar}{۲m\omega}\right) = \frac{\hbar^۲}{۲m}$$

نتیجه‌ای که انتظار آن می‌رفت.

۱۰ــ اثر استارک مرتبهٔ اوّل را برای حالت $n = ۳$ اتم هیدرژن حساب کنید. همهٔ انتگرالها را حساب نکنید ولی باید ترکیبهای خطی درستی از حالتها بسازید. آیا می‌توانید به‌طور کیفی الگوی جابجاییهای انرژی را توضیح دهید؟

در اثر استارک $n = ۳$ حالتهای زیر را باید در نظر بگیریم

$$\begin{aligned}&l = ۲; \quad m_l = ۲, ۱, \circ, -۱, -۲\\ &l = ۱; \quad m_l = ۱, \circ, -۱\\ &l = \circ; \quad m_l = \circ\end{aligned}$$

در محاسبهٔ المان ماتریسی z قاعدهٔ انتخاب $\Delta l = ۱$ را داریم (پاریته قاعدهٔ انتخاب $\Delta l = \circ$ را منع می‌کند) و از آنجا که با z سروکار داریم قاعدهٔ انتخاب $\Delta m_l = \circ$ نیز برقرار خواهد بود. بنابراین عناصر ماتریسی غیر صفر برابرند با

$$\begin{aligned}\langle ۲, ۱|z|۱, ۱\rangle &= \langle ۲, -۱|z|۱, -۱\rangle \equiv A\\ \langle ۲, \circ|z|۱, \circ\rangle &\equiv B\\ \langle ۱, \circ|z|\circ, \circ\rangle &\equiv C\end{aligned}$$

ماتریسی که باید قطری شود چنین است

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} \circ & A & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ\\ A & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ\\ \hline \circ & \circ & \circ & B & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & B & \circ & C & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & C & \circ & \circ & \circ\\ \hline \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & A\\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & A & \circ \end{array}\right)$$

ستونها و سطرها را با (۲, ۱)، (۱, ۱)، (۲, ۰)، (۱, ۰)، (۰, ۰)، (۲, ۱−)، (۱, ۱−) برچسب زده‌ایم. بنابراین مسئله به سه ماتریس مختلف تجزیه می‌شود. ویژه‌مقادیر زیرماتریسهایی که حالتهای (۲, ۱) و (۱, ۱) و نیز آنهایی که حالتهای (۲, ۱−) و (۱, ۱−) را بهم جفت می‌کنند برابرند با

$$\lambda = \pm A$$

که در آن

$$A = \int d\Omega\, Y^*_{21} \cos\theta\, Y_{11} \int_0^\infty r^2 dr\, R_{32}(r)\, r R_{31}(r)$$

ماتریس

$$\begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ B & 0 & C \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix}$$

حالتهای $m_l = 0$ را بهم پیوند می‌دهد که ویژه‌مقادیر آن برابرند با $\lambda = 0, \pm\sqrt{B^2 + C^2}$. در اینجا

$$B = \int d\Omega\, Y^*_{20} \cos\theta\, Y_{10} \int_0^\infty r^2 dr\, R_{32}(r)\, r R_{31}(r)$$

و

$$C = \int d\Omega\, Y^*_{10} \cos\theta\, Y_{00} \int_0^\infty r^2 dr\, R_{31}(r)\, r R_{30}(r)$$

ویژه‌حالتهای زیرماتریسهای A ویژه‌حالتهای σ_x یعنی $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ هستند. ویژه‌حالتهای ماتریس 3×3 مرکزی برابرند با

$$\frac{1}{\sqrt{B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ -B \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2(B^2 + C^2)}} \begin{pmatrix} B \\ \pm\sqrt{B^2 + C^2} \\ C \end{pmatrix}$$

که در آن ویژه‌حالت اوّل متناظر با ویژه‌مقدار $\lambda = 0$ است.

۱۱ — نوسانگر هماهنگ دو بعدی را درنظر بگیرید که با هامیلتونی

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 + y^2\right)$$

روش فصل ٦ را تعمیم دهید تا جوابهای این مسئله را برحسب عملگرهای بالابرنده‌ای به‌دست آورید که روی حالت پایه عمل می‌کنند. با استفاده از نظریهٔ اختلال مرتبهٔ اوّل جابجاییهای انرژی حالت پایه و اوّلین حالتهای برانگیخته را حساب کنید که از اختلال

$$V = 2\lambda xy$$

ناشی شده‌اند. آیا می‌توانید نتایج خود را به‌زبان ساده تعبیر کنید؟ مسئله را دقیق حل کنید و جواب آن را با نتیجهٔ محاسبهٔ اختلال مرتبهٔ دوّم جابجایی انرژی حالت پایه مقایسه کنید.

برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی که آن را با x برچسب می‌زنیم عملگرهای بالابرنده و پائین آورنده را با $A^\dagger$ و A نمایش می‌دهیم. می‌توانیم هامیلتونی را به‌شکل

$$H_x = \hbar\omega\left(A^\dagger A + \frac{۱}{۲}\right)$$

بنویسیم. همین کار را برای نوسانگر هماهنگی نیز انجام می‌دهیم که آن را با y برچسب زده‌ایم. برای این نوسانگر هماهنگ عملگرهای بالابرنده و پائین آورنده را با $B^\dagger$ و B نمایش خواهیم داد و هامیلتونی آن را چنین می‌نویسیم

$$H_y = \hbar\omega\left(B^\dagger B + \frac{۱}{۲}\right)$$

ویژه‌حالتهای $H_x + H_y$ برابرند با

$$|m,n\rangle = \frac{\left(A^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\frac{\left(B^\dagger\right)^m}{\sqrt{m!}}|۰,۰\rangle$$

که در آن حالت پایه این خاصیّت را دارد که $A|۰,۰\rangle = B|۰,۰\rangle = ۰$.
اختلال را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} H_۱ &= ۲\lambda xy \\ &= \frac{\hbar\lambda}{m\omega}(A+A^\dagger)(B+B^\dagger) \end{aligned}$$

(الف) جابجایی مرتبهٔ اوّل در انرژی حالت پایه برابر است با

$$\langle ۰,۰|H_۱|۰,۰\rangle = ۰$$

زیرا مقدار چشمداشتی هر یک از عملگرهای A، $A^\dagger$، B و $B^\dagger$ در حالت پایه صفر می‌شود.
(ب) اینک دو حالت تبهگن $|۱,۰\rangle$ و $|۰,۱\rangle$ را در نظر بگیرید. المانهای ماتریسی مورد نظر ما عبارتند از

$$\begin{aligned} \langle ۱,۰|(A+A^\dagger)(B+B^\dagger)|۱,۰\rangle &= \langle ۰,۱|(A+A^\dagger)(B+B^\dagger)|۰,۱\rangle = ۰ \\ \langle ۱,۰|(A+A^\dagger)(B+B^\dagger)|۰,۱\rangle &= \langle ۰,۱|(A+A^\dagger)(B+B^\dagger)|۱,۰\rangle = ۱ \end{aligned}$$

بنابراین در نظریهٔ اختلال تبهگن باید ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۰ & h \\ h & ۰ \end{pmatrix}$$

را قطری کنیم که در آن $h = \dfrac{\lambda\hbar}{m\omega}$. ویژه‌مقادیر این ماتریس $\pm h$ هستند و انرژی دو تراز شکافته شده برابرند با

$$E = \hbar\omega\left(۱ \pm \frac{\lambda}{m\omega^۲}\right)$$

(ج) عبارت جابجایی مرتبهٔ دوّم چنین است

$$\begin{aligned}\left(\frac{\lambda\hbar}{m\omega}\right)^{۲} &= \sum_{k,n}\frac{\left|\langle ۰,۰|\left(A+A^\dagger\right)\left(B+B^\dagger\right)|k,n\rangle\right|^{۲}}{-\hbar\omega(k+n)} \\ &= -\frac{\lambda^{۲}\hbar}{m\omega^{۳}}\sum_{k,n}\frac{|\langle ۱,۱|k,n\rangle|^{۲}}{k+n} \\ &= -\frac{\lambda^{۲}\hbar}{۲m\omega^{۳}}\end{aligned}$$

جواب دقیق این مسئله را می‌توانیم با پتانسیلی در سطح کلاسیکی پیدا کنیم. انرژی پتانسیل برابر است با

$$\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}\left(x^{۲}+y^{۲}\right)+\lambda xy$$

در صفحهٔ $x-y$ دورانی انجام می‌دهیم. انرژی جنبشی تغییری نمی‌کند چون $\mathbf{p}^{۲}$ تحت دوران ناورداست. اگر در این رابطه قرار دهیم

$$\begin{aligned}x &= x'\cos\theta+y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{aligned}$$

آنگاه پس از اندک عملیّات جبری انرژی پتانسیل به‌شکل

$$\left(\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}-\lambda\sin ۲\theta\right)x'^{۲}+\left(\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}+\lambda\sin ۲\theta\right)y'^{۲}+۲\lambda\cos ۲\theta x'y'$$

درمی‌آید. حال اگر داشته باشیم $\cos ۲\theta = ۰$ و $\sin ۲\theta = ۱$ این رابطه به دو رابطه برای انرژی پتانسیل دو نوسانگر یک بعدی جداگانه تجزیه می‌شود. انرژی مجموع دو انرژی است. چون داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}m\omega_x^{۲} &= \frac{۱}{۲}m\omega^{۲}-\lambda \\ \frac{۱}{۲}m\omega_y^{۲} &= \frac{۱}{۲}m\omega^{۲}+\lambda\end{aligned}$$

انرژی کلّ هر حالت برانگیختهٔ دلخواهی برابر است با

$$E_{k,n}=\hbar\omega_x\left(k+\frac{۱}{۲}\right)+\hbar\omega_y\left(n+\frac{۱}{۲}\right)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\hbar\omega_x &= \hbar\omega\left(۱-\frac{۲\lambda}{m\omega^{۲}}\right)^{۱/۲}=\hbar\omega-\frac{\hbar\lambda}{m\omega}-\frac{\hbar\lambda^{۲}}{۲m^{۲}\omega^{۳}}+\dots \\ \hbar\omega_y &= \hbar\omega\left(۱+\frac{۲\lambda}{m\omega^{۲}}\right)^{۱/۲}=\hbar\omega+\frac{\hbar\lambda}{m\omega}-\frac{\hbar\lambda^{۲}}{۲m^{۲}\omega^{۳}}+\dots\end{aligned}$$

۱۲ــ هامیلتونی الکترونی در اتم هیدرژن که تحت میدان مغناطیسی ثابت B قرار دارد چنین است (از اسپین صرفنظر کرده‌ایم):

$$H = \frac{\mathbf{p}^{۲}}{۲m_e} - \frac{e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r} + \frac{e}{۲m_e}\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}$$

که در آن L عملگر اندازه‌حرکت زاویه‌ای است. در غیاب میدان مغناطیسی خط تنهایی خواهیم داشت که با گذار از حالت ($n = ۴$، $l = ۳$) متناظر است. اثر میدان مغناطیسی بر این خط چیست؟ طیف جدید و گذارهای مجاز را رسم کنید که به قواعد انتخاب $\Delta l_z = \circ, \pm ۱$ مقیّدند. تعداد این خطوط چند تا است؟ میدان الکتریکی ثابت E موازی B چه اثری بر این طیف دارد؟

خط طیفی با گذار $(n = ۴, l = ۳) \to (n = ۳, l = ۲)$ متناظر است. بنابراین باید بررسی کنیم که با وجود اختلال

$$H_{۱} = \frac{e}{۲m}\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}$$

ترازهای انرژی چه تغییری می‌کنند. محور z را جهت میدا مغناطیسی B تعریف می‌کنیم و از این رو اختلال برابر می‌شود با $\frac{eB}{۲m}L_z$. چون L_z با $H_{\circ}$ جابجا می‌شود آنگاه $H_{\circ}$ و L_z ویژه‌توابع همزمان دارند بنابراین در هامیلتونی اختلال می‌توانیم به‌جای L_z ویژه‌مقدارش $\hbar m_l$ را قرار دهیم. از این رو طیف انرژی چنین است

$$E = -\frac{۱}{۲}\frac{mc^{۲}\alpha^{۲}}{n^{۲}} + \frac{eB\hbar}{۲mc}m_l$$

ترازهای تبهگن $n = ۴$، $l = ۳$ به هفت تراز شکافته می‌شوند که با مقادیر $m_l = ۳, ۲, ۱, \circ, -۱, -۲, -۳$ متناظرند. ترازهای تبهگن $n = ۳$، $l = ۲$ به پنج تراز شکافته می‌شوند که با مقادیر $m_l = ۲, ۱, \circ, -۱, -۲$ متناظرند. فاصلهٔ همهٔ این ترازها از هم برابرند و از آنجا که فقط $\Delta m_l = ۱, \circ, -۱$ سه خط طیفی داریم که اختلاف انرژی آنها برابرند با

$$\Delta E = \frac{۱}{۲}mc^{۲}\alpha^{۲}\left(\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۶}\right) + \begin{cases} \frac{eB\hbar}{۲mc} \\ \circ \\ \frac{eB\hbar}{۲mc} \end{cases}$$

توجه کنید که میدان مغناطیسی همهٔ ترازهای دیگر را شکافته می‌کند. بنابراین برای $n = ۴$ نه تنها ترازهای $l = ۳$ شکافته خواهند شد بلکه ترازهای $l = ۲$ و $l = ۱$ نیز شکافته می‌شوند و از این رو یک تبهگنی باقی خواهد ماند. برای مثال برای $n = ۴$، تراز $l = ۳$، $m_l = ۳$ ناتبهگن خواهد بود ولی تراز $m_l = ۲$ با تراز $l = ۲$، $m_l = ۲$ و تراز $l = ۳$، $m_l = ۱$ با تراز $l = ۲$، $m_l = ۱$ و تراز $l = ۱$ و $m_l = ۱$ تبهگن خواهد بود و الی آخر. آنچه گفتیم دربارهٔ میدان الکتریکی مصداق دارد.

هر میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ موازی با میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ به اختلال $H_1 = -eEz$ می‌انجامد. اثر اختلال H_1 این است که ترازهایی با مقدار m_l مفروض را باهم پیوند می‌دهد که با مقادیر مختلف l تبهگن هستند. برای مثال ترازهای $l = 3$، $m_l = 2$ و $l = 2$ و $m_l = 2$ شکافته می‌شوند.

۱۳ــ هامیلتونی زیر را درنظر بگیرید:

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha & u \\ u^* & \beta \end{pmatrix}$$

(الف) جابجایی انرژی مرتبهٔ اوّل و دوّم نسبت به λ را حساب کنید. نتایج خود را با ویژه‌مقادیر دقیق مقایسه کنید.

(ب) فرض کنید u^* را با $v \neq u^*$ جایگزین کنیم. نشان دهید که ویژه‌حالتهای این هامیلتونی غیر هرمیتی جدید که با ویژه‌مقادیر مختلف متناظر باشند دیگر متعامد نیستند. (برای سهولت کار در این قسمت از مسئله فرض کنید $\alpha = \beta = 0$.)

ویژه‌حالتهای هامیلتونی مختل‌نشده ویژه‌حالتهای عملگر σ_z هستند. یکی از این ویژه‌حالتها $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ متناظر با ویژه‌مقدار $E = E_0$ و دیگری $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ متناظر با ویژه‌مقدار $E = -E_0$.

(الف) برای دو تراز انرژی جابجاییهای مرتبهٔ اوّل با معادلات زیر داده می‌شوند

$$(1 \quad 0)\lambda \begin{pmatrix} \alpha & u \\ u^* & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\alpha$$

$$(0 \quad 1)\lambda \begin{pmatrix} \alpha & u \\ u^* & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\beta$$

جابجایی انرژی مرتبهٔ دوّم برای حالت بالاتر شامل جمع روی حالتهای میانی است که با حالت اولیّه فرق دارند. بنابراین برای حالت بالاتر حالت میانی همان حالت پائینتر است و مخرج انرژی برابر است با $E_0 - (-E_0) = 2E_0$ بنابراین جابجایی مرتبهٔ دوّم برابر است با

$$\frac{\lambda^2}{2E_0}(1 \quad 0)\begin{pmatrix} \alpha & u \\ u^* & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0 \quad 1)\begin{pmatrix} \alpha & u \\ u^* & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\lambda^2|u|^2}{2E_0}$$

برای حالت پائینتر داریم

$$\frac{\lambda^2}{-2E_0}(0 \quad 1)\begin{pmatrix} \alpha & u \\ u^* & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \quad 0)\begin{pmatrix} \alpha & u \\ u^* & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\lambda^2|u|^2}{2E_0}$$

ویژه‌مقادیر دقیق از معادلهٔ

$$\det\begin{vmatrix} E_0 + \alpha - \epsilon & u \\ u^* & -E_0 + \beta - \epsilon \end{vmatrix} = 0$$

به‌دست می‌آیند. از حلّ این معادله داریم

$$\begin{aligned}\epsilon &= \lambda\frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\left(E_0 - \lambda\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \lambda^2|u|^2} \\ &= \lambda\frac{\alpha+\beta}{2} \pm \left(E_0 - \lambda\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2|u|^2}{E_0^2} + \dots\right)\end{aligned}$$

(ب) حال در نظر بگیرید

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & u \\ v & -E_0 \end{pmatrix}$$

که در آن جملات α و β را انداخته‌ایم. یافتن ویژه‌مقادیر این هامیلتونی ساده است. این ویژه‌مقادیر برابرند با

$$\epsilon = \pm\sqrt{E_0^2 + \lambda^2 uv}$$

ویژه‌حالتها را به‌شکل $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ می‌نویسیم. این ویژه‌حالتها در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\begin{pmatrix} E_0 & u \\ v & -E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm\sqrt{E_0^2 + \lambda^2 uv}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

برای حالت بالاتر ویژه‌حالت بهنجار نشدهٔ

$$\begin{pmatrix} \lambda u \\ \sqrt{E_0^2 + \lambda^2 uv} - E_0 \end{pmatrix}$$

و برای حالت پائینتر ویژه‌حالت بهنجار نشدهٔ

$$\begin{pmatrix} -\lambda u \\ \sqrt{E_0^2 + \lambda^2 uv} + E_0 \end{pmatrix}$$

را به‌دست می‌آوریم. حاصلضرب داخلی

$$-\lambda^2|u|^2 + \left[\left(E_0^2 + \lambda^2 uv\right) - E_0^2\right] = \lambda^2 u(u^* - v) \neq 0$$

نشان می‌دهد که این دو ویژه‌حالت متعامد نیستند مگر $u^* = v$.

فصل دوازدهم

اتم هیدرژن واقعی

۱ـ اگر شکل کلی جفت شدگی اسپین با مدار ذرّه‌ای به‌جرم m و اسپین $\mathbf{S}$ که در پتانسیل $V(r)$ حرکت می‌کند برابر باشد با

$$H_{SO} = \frac{۱}{۲m^۲c^۲}\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\frac{۱}{r}\frac{dV(r)}{dr}$$

اثر این جفت شدگی بر طیف نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی چیست؟ (توجه: طیف نوسانگر هماهنگ مختل نشده $\hbar\omega\,(۲n_r + l + ۳/۲)$ است که در آن $n_r = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و l اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری است.)

با پتانسیلی به‌شکل

$$V(r) = \frac{۱}{۲}m\omega^۲r^۲$$

اختلال چنین می‌شود

$$\begin{aligned} H_۱ &= \frac{۱}{۲m^۲c^۲}\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\frac{۱}{r}\frac{dV(r)}{dr} \\ &= \frac{\omega^۲}{۴mc^۲}(\mathbf{J}^۲ - \mathbf{L}^۲ - \mathbf{S}^۲) \\ &= \frac{(\hbar\omega)^۲}{۴mc^۲}(j(j+۱) - l(l+۱) - s(s+۱)) \end{aligned}$$

که در آن l اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری، s اسپین ذرّهٔ داخل چاه (برای مثال ۱/۲ برای الکترون یا نوکلئون) و j اندازه‌حرکت زاویه‌ای کلّ است. مقادیر مجاز j برابرند با $l+s, l+s-۱, l+s-۲, \ldots, |l-s|$.

طیف مختل نشدهٔ انرژی برابر است با $E_{n,l} = \hbar\omega(n_r + l + ۳/۲)$. به‌ازای هر l مفروض ترازها تبهگنی $۲l + ۱$ گانه دارند. در اینجا تبهگنی اضافی نیز مانند مورد اتم هیدرژن وجود دارد. برای مثال ترازهای $n_r = ۲, l = ۰$ و $n_r = ۱, l = ۲$ و $n_r = ۰, l = ۴$ همگی انرژی یکسانی دارند.

۲ـ از ساختار فوق‌ریز صرفنظر کنید و طیف انرژی حالتهای $n = ۲$ در اتم هیدرژن واقعی را حساب کنید. اگر اتم را در میدان مغناطیسی T ۲٫۵ قرار دهیم این طیف چه تغییری می‌کند؟

عواملی که بر انرژی ترازهای $n = ۲$ تأثیر می‌گذارند عبارت‌اند از (۱) برهکنش کولنی، (۲) اثرهای نسبیّتی و اسپین—مدار، و (۳) ساختار ریز که در این مسئله از ما خواسته شده‌است آن را نادیده بگیریم. بنابراین اگر میدان مغناطیسی نباشد ترازها براثر پتانسیل کولنی از $۲n^۲ = ۸$ تراز تبهگن تشکیل شده‌اند. دو تا از این ترازها به $l = ۰$ (اسپین بالا و اسپین پائین) و شش تا از آنها با $l = ۱$ متناظر با $m_l = ۱, ۰, -۱$ مربوط می‌شوند. ترازهای $l = ۱$ را می‌توان به‌ترازهایی که با $\mathbf{J}^۲$، $\mathbf{L}^۲$ و J_z مشخص می‌شوند بازآرایی کرد. دو تراز با $j = l - ۱/۲ = ۱/۲$ و چهار تراز با $j = l + ۱/۲ = ۳/۲$ مشخص می‌شوند. همان گونه که معادلهٔ (۱۲—۱۶) متن کتاب نشان می‌دهد این ترازها براثر اثرهای نسبیّتی و اسپین—مدار شکافته می‌شوند. اثرهای جرم کاهش‌یافته را نادیده می‌گیریم (به‌جز آنهایی که در انرژیهای کولنی منظور شده‌اند). بنابراین داریم

$$\Delta E = -\frac{۱}{۲}m_e c^۲\alpha^۴\frac{۱}{n^۳}\left(\frac{۱}{j+\frac{۱}{۲}} - \frac{۳}{۴n}\right) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}m_e c^۲\alpha^۴\left(\frac{۵}{۶۴}\right), & j = \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲}m_e c^۲\alpha^۴\left(\frac{۱}{۶۴}\right), & j = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

(ب) شکافتگیهای زیمان به‌ازای هر j مفروض چنین است

$$\Delta E_B = \begin{cases} -\frac{e\hbar B}{۲m_e}m_j\left(\frac{۲}{۳}\right), & j = \frac{۱}{۲} \\ -\frac{e\hbar B}{۲m_e}m_j\left(\frac{۴}{۳}\right), & j = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

از لحاظ عددی داریم

$$\frac{۱}{۱۲۸}m_e c^۲\alpha^۴ \approx ۱{,}۱۳۲ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{eV}$$

و به‌ازای $B = ۲{,}۵\ \mathrm{T}$ داریم

$$\frac{e\hbar B}{۲m_e} \approx ۱۴{,}۴۷ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{eV}$$

بنابراین اثرهای مغناطیسی ۱۳ برابر بزرگتر از اثرهای نسبیّتی هستند. در چنین شرایطی می‌توان اثرهای نسبیّتی را نادیده انگاشت و از رابطهٔ (۱۲—۲۶) کتاب استفاده کرد.

۳— گاز هیدرژنی در حالت پایه را درنظر بگیرید. اثر میدان مغناطیسی بر ساختار فوق‌ریز چیست؟ طیف را به‌ازای $B = ۱۰^{-۴}\ \mathrm{T}$ و $B = ۱\ \mathrm{T}$ حساب کنید. [راهنمایی: برای حل این مسئله معادلهٔ ویژه‌مقداری برای برهمکنش

$$A\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}}{\hbar^۲} + a\frac{S_z}{\hbar} + b\frac{I_z}{\hbar}$$

بنویسید که در آن

$$A = g_P\left(\frac{۴m_e}{۳M_P}\right)\alpha^۴ m_e c^۲$$
$$a = \frac{e\hbar B}{m_e}$$
$$b = -\frac{eg_P\hbar B}{۲M_P}$$

هامیلتونی مختل‌نشده با رابطهٔ (۱۲–۳۴) کتاب توصیف می‌شود و میدان مغناطیسی هم با اسپین الکترون و هم با اسپین پروتون برهمکنش می‌کند. داریم

$$H = A\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}}{\hbar^۲} + a\frac{S_z}{\hbar} + b\frac{I_z}{\hbar}$$

در اینجا

$$A = \frac{۴}{۳}\alpha^۴ m_e c^۲ g_p\left(\frac{m_e}{M_p}\right)\frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}}{\hbar^۲}$$
$$a = ۲\frac{e\hbar B}{۲m_e}$$
$$b = -g_p\frac{e\hbar B}{۲M_p}$$

اینک اسپین کلّ $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{I}$ را معرفی می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}}{\hbar^۲} = \frac{۱}{۲\hbar^۲}\left(\hbar^۲F(F+۱) - \frac{۳}{۴}\hbar^۲ - \frac{۳}{۴}\hbar^۲\right) = \begin{cases} \frac{۱}{۴}, & F = ۱ \\ -\frac{۳}{۴}, & F = ۰ \end{cases}$$

حال باید المانهای ماتریسی $aS_z + bI_z$ را برای ویژه‌حالتهای عملگرهای $\mathbf{F}^۲$ و F_z حساب کنیم. این ویژه‌حالتها دقیقاً شبیه به ویژه‌حالتهای یکتایی و سه‌تایی اسپین خواهند بود. داریم

$$\langle ۱,۱|aS_z + bI_z|۱,۱\rangle = \langle\chi_+\xi_+|aS_z + bI_z|\chi_+\xi_+\rangle$$
$$= \frac{۱}{۲}(a+b)$$
$$\langle ۱,۰|aS_z + bI_z|۱,۰\rangle = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^۲\langle\chi_+\xi_- + \chi_-\xi_+|aS_z + bI_z|\chi_+\xi_- + \chi_-\xi_+\rangle$$
$$= ۰$$
$$\langle ۱,-۱|aS_z + bI_z|۱,-۱\rangle = \langle\chi_-\xi_-|aS_z + bI_z|\chi_-\xi_-\rangle$$
$$= -\frac{۱}{۲}(a+b)$$

و برای حالت یکتایی $(F = \circ)$ داریم

$$\begin{aligned}
\langle ۱, \circ|aS_z + bI_z|\circ, \circ\rangle &= \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲} \langle \chi_+\xi_- + \chi_-\xi_+|aS_z + bI_z|\chi_+\xi_- - \chi_-\xi_+\rangle \\
&= \frac{۱}{۲}(a-b) \\
\langle \circ, \circ|aS_z + bI_z|\circ, \circ\rangle &= \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲} \langle \chi_+\xi_- - \chi_-\xi_+|aS_z + bI_z|\chi_+\xi_- - \chi_-\xi_+\rangle \\
&= \circ
\end{aligned}$$

از این رو میدان مغناطیسی حالت $\langle ۱, \circ|$ را با حالت $\langle \circ, \circ|$ پیوند می‌دهد و ما باید زیرماتریس

$$\begin{pmatrix} \frac{A}{۴} & \frac{۱}{۲}(a-b) \\ \frac{۱}{۲}(a-b) & -\frac{۳A}{۴} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{A}{۴} & \circ \\ \circ & -\frac{A}{۴} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{A}{۲} & \frac{۱}{۲}(a-b) \\ \frac{۱}{۲}(a-b) & -\frac{A}{۲} \end{pmatrix}$$

را قطری کنیم. زیرماتریس دوّم با زیرماتریس اوّل جابجا می‌شود و ویژه‌مقادیر آن به‌آسانی به‌دست می‌آیند. این ویژه‌مقادیر $\pm\sqrt{A^{۲}/۴ + (a-b)^{۲}/۴}$ هستند و ویژه‌مقادیر کلّ برابرند با

$$-\frac{A}{۴} \pm \sqrt{\frac{A^{۲}}{۴} + \frac{(a-b)^{۲}}{۴}}$$

بنابراین طیف شامل حالتهای زیر است

$$\begin{aligned}
&F = ۱, F_x = ۱ && E = A/۴ + (a+b)/۲ \\
&F = ۱, F_z = -۱ && E = A/۴ - (a+b)/۲ \\
&F = ۱, \circ; F_z = \circ && E = -A/۴ \pm \sqrt{A/۴ + (a-b)^{۲}/۴}
\end{aligned}$$

حال عدد گذاری می‌کنیم. به‌ازای $B = ۱\circ^{-۴}$ T، انرژی این حالتها برحسب یکای $۱\circ^{-٦}$ eV به‌ترتیب برابرند با ۱٫۴۵۱، ۱٫۴۳۹، $(۱\circ^{-۱\circ})$ ۰، و ۲٫۸۹−. به‌ازای $B = ۱$ T، انرژی این حالتها برحسب یکای $۱\circ^{-٦}$ eV به‌ترتیب برابرند با ۵۷٫۲۱، ۵۴٫۳۲−، ۵۴٫۲۹، و $۷ \times ۱\circ^{-٦}$.

۴− گذارهای $۳^{۲}S_{۱/۲} \to ۳^{۲}P_{۱/۲}$ و $۳^{۲}S_{۱/۲} \to ۳^{۲}P_{۳/۲}$ در اتمهای هیدرژن‌گونه را درنظر بگیرید.
(الف) طول‌موجهای نورهایی را به‌شکل تابعی از Z حساب کنید که در این گذارها گسیل می‌شوند.
(ب) در سدیم این طول‌موجها به‌ترتیب ۵۸۹۵٫۹۲ nm و ۵۸۸٫۹۹۵ nm هستند. این طول‌موجها با چه‌مقداری از Z متناظرند.

بنابر معادلهٔ (۱۲−۱۷) کتاب انرژیهای حالتهای اتمهای هیدرژن‌گونه با احتساب اُرهای نسبیّتی و اسپین−مدار برابرند با

$$E_{n,j} = -\frac{۱}{۲}\frac{m_e c^{۲}(Z\alpha)^{۲}}{(۱ + m_e/M_p)}\frac{۱}{n^{۲}} - \frac{۱}{۲}m_e c^{۲}(Z\alpha)^{۴}\frac{۱}{n^{۳}}\left(\frac{۱}{j + ۱/۲} - \frac{۳}{۴n}\right)$$

طول‌موج در گذار بین دو حالت برابر است با

$$\lambda = \frac{۲\pi\hbar c}{\Delta E}$$

که در آن ΔE تغییر انرژی در گذار است. اینگ گذارهای $n = ۳, j = ۳/۲ \to n = ۱, j = ۱/۲$ و $n = ۳, j = ۱/۲ \to n = ۱, j = ۱/۲$ را بررسی می‌کنیم. اختلاف انرژیها (با نادیده گرفتن اثرهای جرم کاهش‌یافته) برابرند با

$$(۳, ۳/۲) \to (۱, ۱/۲) \quad \Delta E = \frac{۱}{۲}m_e c^۲ (Z\alpha)^۲ \left(۱ - \frac{۱}{۹}\right) + \frac{۱}{۲}m_e c^۲ (Z\alpha)^۴ \frac{۱}{۴}\left(۱ - \frac{۱}{۲۷}\right)$$

$$(۳, ۱/۲) \to (۱, ۱/۲) \quad \Delta E = \frac{۱}{۲}m_e c^۲ (Z\alpha)^۲ \left(۱ - \frac{۱}{۹}\right) + \frac{۱}{۲}m_e c^۲ (Z\alpha)^۴ \frac{۱}{۴}\left(۱ - \frac{۳}{۲۷}\right)$$

که می‌توان آنها را به‌شکل

$$(۳, ۳/۲) \to (۱, ۱/۲) \qquad \Delta E_۰ \left(۱ + \frac{۱۳}{۴۸}(Z\alpha)^۲\right)$$

$$(۳, ۱/۲) \to (۱, ۱/۲) \qquad \Delta E_۰ \left(۱ + \frac{۱}{۱۸}(Z\alpha)^۲\right)$$

نوشت که در آن

$$\Delta E_۰ = \frac{۱}{۲}m_e c^۲ (Z\alpha)^۲ \frac{۸}{۹}$$

طول‌موجهای متناظر با این اختلاف انرژیها چنین هستند

$$(۳, ۳/۲) \to (۱, ۱/۲) \qquad \lambda_۰ \left(۱ + \frac{۱۳}{۴۸}(Z\alpha)^۲\right) = ۵۸۸{,}۹۹۵ \times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{m}$$

$$(۳, ۱/۲) \to (۱, ۱/۲) \qquad \lambda_۰ \left(۱ + \frac{۱}{۱۸}(Z\alpha)^۲\right) = ۵۸۹{,}۵۹۲ \times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{m}$$

از این دو معادله می‌توان $\lambda_۰$ و Z را پیدا کرد. اگر آنها را برهم تقسیم کنیم پس از اندک عملیّات جبری پیدا می‌کنیم $Z = ۱۱{,}۵$ که به $Z = ۱۱$ اتم سدیم نزدیک است. (توجه کنید که اگر $\lambda_۰$ را میانگین این دو طول‌موج می‌گرفتیم آنگاه از رابطهٔ $\lambda_۰ = ۲\pi\hbar c/\Delta E_۰ = ۹\pi\hbar/۲mc(Z\alpha)^۲$ مقدار نامعقول کوچک $Z = ۴{,}۰$ را به‌دست می‌آوردیم که جای تعجب نیست چون به دلایلی که در فصل ۱۴ خواهیم گفت انرژی یونش سدیم به‌جای $Z^۲(۱۳{,}۶\,\mathrm{eV})$ برابر است با $۵{,}۱\,\mathrm{eV}$).

۵– نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی را درنظر بگیرید. اگر از رابطهٔ نسبیّتی انرژی جنبشی استفاده کنیم جابجایی انرژی حالت پایه چقدر می‌شود؟

اصلاح نسبیّتی در جملهٔ انرژی جنبشی برابر است با

$$-\frac{۱}{۲mc^۲}\left(\frac{\mathbf{p}^۲}{۲m}\right)^۲$$

بنابراین جابجایی در انرژی حالت پایه چنین می‌شود

$$\Delta E = -\frac{1}{2mc^2}\left\langle 0 \left| \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 \right| 0 \right\rangle$$
$$= -\frac{1}{2mc^2}\left\langle 0 \left| \left(H - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)^2 \right| 0 \right\rangle$$

برای محاسبهٔ $\langle 0|r^2|0\rangle$ و $\langle 0|r^4|0\rangle$ به تابع‌موج حالت پایه نیاز داریم. تابع‌موج نوسانگر هماهنگ سادهٔ یک بعدی را می‌دانیم

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

بنابراین برای نوسانگر سه بعدی داریم

$$u_0(r) = u_0(x)\,u_0(y)\,u_0(z)$$
$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-m\omega r^2/2\hbar}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\langle 0|r^2|0\rangle = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} r^2 e^{-m\omega r^2/\hbar}$$
$$= 4\pi\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{5/2}\int_0^\infty dy\, y^4 e^{-y^2}$$
$$= \frac{3\hbar}{2m\omega}$$

و نیز داریم

$$\langle 0|r^4|0\rangle = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} r^4 e^{-m\omega r^2/\hbar}$$
$$= 4\pi\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{7/2}\int_0^\infty dy\, y^6 e^{-y^2}$$
$$= \frac{15}{4}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2$$

در محاسبات بالا از $\int_0^\infty dz\, z^n e^{-z} = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ و $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ استفاده کرده‌ایم. بنابراین داریم

$$\Delta E = -\frac{1}{2mc^2}\left(\left(\frac{3}{2}\hbar\omega\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\hbar\omega\right)\left(m\omega^2\frac{3\hbar}{2m\omega}\right) + \frac{1}{4}m^2\omega^4\left(\frac{15}{4}\right)\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2\right)$$
$$= -\frac{15}{32}\frac{(\hbar\omega)^2}{mc^2}$$

۶– دوترون از پروتون (بار e^+) و نوترونی (بار ۰) در حالتی با اسپین کل ۱ و اندازه‌حرکت زاویه‌ای کل $J = ۱$ تشکیل شده‌است. عامل g برای پروتون و نوترون برابر است با

$$g_P = ۲(۲{,}۷۸۹۶)$$
$$g_N = ۲(-۱{,}۹۱۰۳)$$

(الف) حالتهای مجاز اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری این دستگاه کدام هستند؟ اگر بدانیم که حالت اولیهٔ دستگاه $^۳S_۱$ است چه مخلوطی مجاز است مشروط بر این که پاریته پایسته باشد؟ (ب) عبارتی برای برهمکنش دوترون با میدان مغناطیسی خارجی بنویسید و شکافتگی زیمان را حساب کنید. نشان دهید که اگر برهمکنش با میدان مغناطیسی را به‌شکل

$$V = -\mu_{\text{eff}} \cdot \mathbf{B}$$

بنویسیم آنگاه گشتاور مغناطیسی مؤثر دوترون برابر است با مجموع گشتاورهای مغناطیسی پروتون و نوترون و هر انحرافی از این نتیجه ناشی از مخلوط شدن حالت غیر S با تابع‌موج است.

به‌ازای $J = ۱$ و $S = ۱$، مقادیر مجاز اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری به‌طوری‌که داشته باشیم $j = L + S, L + S - ۱, \ldots, |L - S|$ فقط می‌توانند $L = ۰, ۱, ۲$ باشد. بنابراین حالتهای مجاز عبارت‌اند از $^۳S_۱$، $^۳P_۱$، و $^۳D_۱$. اگر پاریتهٔ ذاتی پروتون و نوترون را $۱+$ فرض کنیم آنگاه پاریتهٔ دوترون برابر است با $(-۱)^L$. از این رو حالتهای S و D پاریتهٔ مثبت و حالت P پاریتهٔ منفی دارد. با توجه به پایستگی پاریته تنها حالت ترکیبی مجاز $^۳D_۱$ می‌تواند باشد.

(ب) برهمکنش با میدان مغناطیسی سه بخش دارد: برهمکنشهای اسپینهای پروتون و نوترون با میدان مغناطیسی و جملهٔ $\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}$ مشروط بر این که L صفر نباشد. می‌نویسیم

$$H = -\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{B} - \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{B} - \mathbf{M}_L \cdot \mathbf{B}$$

که در آن

$$\mathbf{M}_p = \frac{eg_p}{۲M}\mathbf{S}_p = (۵{,}۵۷۹۲)\frac{e\hbar}{۲M}\left(\frac{\mathbf{S}_p}{\hbar}\right)$$
$$\mathbf{M}_n = \frac{eg_n}{۲M}\mathbf{S}_n = (-۳{,}۸۲۰۶)\frac{e\hbar}{۲M}\left(\frac{\mathbf{S}_n}{\hbar}\right)$$
$$\mathbf{M}_p = \frac{e}{۲M_{\text{کاهش‌یافته}}}\mathbf{L}$$

جرمهای پروتون و نوترون را با هم برابر می‌گیریم $(M =)$ و جرم کاهش‌یافتهٔ دستگاه دو ذرّه‌ای با جرمهای برابر مساوی است با $M/۲$. برای حالت $^۳S_۱$ جملهٔ آخر صفر می‌شود. اگر $\mathbf{B}$ را محور z

بگیریم جابجایی انرژی برابر می‌شود با

$$-\frac{eB\hbar}{۲M}\left\langle {}^{۳}S_{۱}\left|g_p\left(\frac{S_{pz}}{\hbar}\right)+g_n\left(\frac{S_{nz}}{\hbar}\right)\right|{}^{۳}S_{۱}\right\rangle$$

می‌نویسیم

$$g_p\left(\frac{S_{pz}}{\hbar}\right)+g_n\left(\frac{S_{nz}}{\hbar}\right)=\frac{g_p+g_n}{۲}\frac{S_{pz}+S_{nz}}{\hbar}+\frac{g_p-g_n}{۲}\frac{S_{pz}-S_{nz}}{\hbar}$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که المانهای ماتریسی آخرین جمله در حالتهای سه‌تایی صفر می‌شود و آنچه می‌ماند برابر است با $\frac{۱}{۲}(g_p+g_n)\frac{S_z}{\hbar}$ است که در آن S_z مؤلفهٔ z اسپین کلّ است. در نتیجه داریم

$$\langle {}^{۳}S_{۱}|H_{۱}|{}^{۳}S_{۱}\rangle=-\frac{۳B\hbar}{۲M}\frac{g_p+g_n}{۲}m_s$$

که در آن m_s عدد کوانتومی مغناطیسی $m_s=۱,۰,-۱$ اسپین کلّ است. بنابراین می‌توانیم گشتاور مغناطیسی دوترون را به‌شکل

$$\begin{aligned}\mu_{\text{eff}} &= -\frac{e}{۲M}\frac{g_p+g_n}{۲}\mathbf{S}\\ &= -(۰/۸۷۹۳)\frac{e}{۲M}\mathbf{S}\end{aligned}$$

بنویسیم. نتیجهٔ اندازه‌گیریهای آزمایشگاهی $g_d=۰/۸۵۷۴$ بوده‌است که پیشنهاد می‌کند تابع‌موج دوترون اندکی از ترکیب ${}^{۳}D_{۱}$ را دارد.

فصل سیزدهم

دستگاههای چند ذرّه‌ای

۱– جرم کاهش یافتهٔ دستگاه الکترون—پروتون چقدر است؟ با جرم کاهش یافتهٔ دستگاه الکترون—دوترون چقدر فرق دارد؟ جرم کاهش یافتهٔ دستگاه دو ذرّهٔ یکسان چقدر است؟

(الف) دستگاه الکترون—پروتون

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{m_e}{۱ + m_e/M_p} \\ &= (۱ - ۵{,}۴۵ \times ۱۰^{-۴})\, m_e \end{aligned}$$

(ب) دستگاه الکترون—دوترون

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{m_e}{۱ + m_e/M_d} \\ &= (۱ - ۲{,}۷۲۲ \times ۱۰^{-۴})\, m_e \end{aligned}$$

(ج)برای دو ذرّهٔ یکسان هریک به جرم m داریم

$$m_r = \frac{m}{۲}$$

۲– ثابت کنید که عملگر تعویض $P۱۲$ هرمیتی است.

یک روش برای این که ببینیم عملگر $P_{۱۲}$ هرمیتی است این است که توجّه کنیم ویژه‌مقادیر آن ±۱، یعنی حقیقی هستند. در روش دیگر داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int dx_۱ dx_۲ \psi^*_{ij}(x_۱, x_۲) P_{۱۲} \psi_{ij}(x_۱, x_۲) &= \sum_{i,j} \int dx_۱ dx_۲ \psi^*_{ij}(x_۱, x_۲) \psi_{ji}(x_۲, x_۱) \\ &= \sum_{j,i} \int dy_۱ dy_۲ \psi^*_{ji}(y_۲, y_۱) \psi_{ij}(y_۱, y_۲) \\ &= \sum_{j,i} \int dy_۱ dy_۲ \left(P_{۱۲} \psi_{ij}(y_۲, y_۱)\right)^* \psi_{ij}(y_۱, y_۲) \end{aligned}$$

۳ــ دو الکترون غیر برهمکنشی را در چاه پتانسیل بی‌نهایت درنظر بگیرید. اگر این دو الکترون در حالت اسپینی یکسانی باشند تابع‌موج حالت پایه چیست؟

اگر دو الکترون در حالت اسپینی یکسان باشند آنگاه تابع‌موج باید پاد متقارن باشد. یکی از الکترونها می‌تواند در حالت پایه، یعنی حالت $n = ۱$ باشد امّا الکترون دیگر باید در پائینترین حالت انرژی بعدی، یعنی حالت $n = ۲$ باشد. تابع‌موج چنین خواهد بود

$$\psi_{\text{پایه}}(x_۱, x_۲) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\Big[u_۱(x_۱)u_۲(x_۲) - u_۲(x_۱)u_۱(x_۲)\Big]$$

۴ــ تعداد N الکترون بدون برهمکنش را در چاه بی‌نهایت یک بعدی به‌پهنای b را درنظر بگیرید. به‌ازای N بزرگ پائینترین مقدار انرژی کل چقدر است؟ [راهنمایی: بدانید که‌در هر تراز انرژی دو الکترون وجود دارد و به‌ازای N بزرگ مهم نیست که آخرین تراز با یک الکترون پر شود یا دو الکترون، و سرانجام از تساوی

$$\sum_{n=۱}^{k} n^۲ = \frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶} \approx \int_۱^k n^۲ dn = \frac{k^۳}{۳}$$

استفاده کنید.]

انرژی تراز nــام برابر است با

$$E_n = \frac{\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲}n^۲ \equiv \epsilon n^۲$$

هر تراز خاصّی را فقط دو الکترون پر می‌کند و از این رو با N الکترون پائینترین $N/۲$ ترازها پر خواهد شد. بنابراین انرژی کلّ برابر است با

$$\begin{aligned} E_{\text{کل}} &= \sum_{n=۱}^{N/۲} ۲\epsilon n^۲ \\ &\approx ۲\epsilon \frac{۱}{۳}\left(\frac{N}{۲}\right)^۳ \\ &= \frac{\epsilon N^۳}{۱۲} \end{aligned}$$

هرگاه N فرد باشد نتیجهٔ فوق بالاندازهٔ $\epsilon N^۲$ خطا دارد. این مقدار خطا $\epsilon(۱۲/N)$ برابر نتیجهٔ بالاست که اگر N بزرگ باشد صفر می‌شود.

۵ــ دو الکترونی را درنظر بگیرید که حالت اسپینی یکسانی دارند و با پتانسیل

$$\begin{aligned} V(|x_۱ - x_۲|) &= -V_۰ \qquad |x_۱ - x_۲| \le a \\ &= ۰ \qquad \text{جاهای دیگر} \end{aligned}$$

اگر اندازه‌حرکت کل این دو الکترون صفر باشد آنگاه پائینترین انرژی حالت دو الکترونی چیست؟ فرض کنید این پتانسیل آن قدر عمیق است که بیش از یک حالت مقیّد می‌تواند داشته باشد. (راهنمایی: این مسئله را به مسئلهٔ تک ذرّه‌ای با جرم کاهش یافته تبدیل کنید. بدانید که اگر دو الکترون در حالت اسپینی یکسانی باشند تابع‌موج فضایی باید تحت تبدیل $x_1 \leftrightarrow x_2$ تغییر علامت دهد.)

در این مسئله دو الکترون از طریق پتانسیل چاه مربعی با یکدیگر برهمکنش می‌کنند. تبدیل مسئلهٔ دو جسمی به دو مسئلهٔ یک جسمی آسان است. با نمادگذاری

$$x = x_1 - x_2, \quad X = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

و

$$P = p_1 + p_2$$

تابع‌موج به‌شکل

$$\psi(x_1, x_2) = e^{iPX} u(x)$$

است که در آن $u(x)$ جواب معادلهٔ زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = Eu(x)$$

توجه کنید که در روابط بالا جرم کاهش‌یافته را $m/2$ گرفته‌ایم. تعویض مکان دو الکترون با تبدیل $x \to -x$ متناظر است. حال تابع‌موج پائینترین حالت مقیّد را با $u_0(x)$ و تابع‌موج پائینترین حالت مقیّد بعدی را با $u_1(x)$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم که پائینترین حالت پاریتهٔ زوج دارد یعنی تحت تبدیل فوق زوج است حال آن که پائینترین حالت بعدی تحت همین تبدیل فرد است. بنابراین اگر دو الکترون در حالت اسپینی یکتایی باشند تابع‌موج فضایی باید زوج باشد و در نتیجه حالت دستگاه $u_0(x)$ است، امّا اگر حالت اسپینی دستگاه دو الکترونی سه‌تایی باشد تابع‌موج فضایی باید فرد، یعنی $u_1(x)$ است.

۶— دو ذرّهٔ یکسان را درنظر بگیرید که با عملگر انرژی

$$H = H(p_1, x_1) + H(p_2, x_2)$$

توصیف می‌شوند که در آن

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

حرکت مرکز جرم را تفکیک کنید و طیف انرژی این دستگاه را به‌دست آورید. نشان دهید که با جوابی که از حل معادلهٔ

$$H\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$$

به‌دست می‌آید وفق می‌دهد که در آن

$$\psi(x_۱, x_۲) = u_۱(x_۱)u_۲(x_۲)$$

دربارهٔ تبهگنی طیف انرژی بحث کنید.

با نمادگذاری

$$x = x_۱ - x_۲, \quad X = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$$

و

$$P = p_۱ + p_۲, \quad p = p_۱ - p_۲$$

هامیلتونی چنین است

$$H = \frac{P^۲}{۲M} + \frac{۱}{۲}M\omega^۲X^۲ + \frac{p^۲}{۲\mu} + \frac{۱}{۲}\mu\omega^۲x^۲$$

که در آن $M = ۲m$ جرم کلّ و $\mu = m/۲$ جرم کاهش‌یافته است. طیف انرژی مجموع انرژیهای نوسانگرهایی که یکی حرکت مرکزجرم و دیگری حرکت نسبی را توصیف می‌کنند. این دو نوسانگر هر دو با فرکانس ω مشخص می‌شوند و درنتیجه انرژی برابر است با

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega\left(N + \frac{۱}{۲}\right) + \hbar\omega\left(n + \frac{۱}{۲}\right) \\ &= \hbar\omega(N + n + ۱) \\ &\equiv \hbar\omega(\nu + ۱) \end{aligned}$$

تبهگنی تعداد راههایی که می‌توان عدد درست ν را برحسب مجموع دو عدد درست غیر منفی N و n نوشت. بنابراین به‌ازای هر ν مفروض داریم

$$(N, n) = (\nu, ۰), (\nu - ۱, ۱), (\nu - ۲, ۲), \ldots, (۱, \nu - ۱), (۰, \nu)$$

از این رو تبهگنی برابر است با $\nu + ۱$.

توجه کنید که اگر این دستگاه را متشکل از دو نوسانگر هماهنگ سادهٔ مستقل از هم با فرکانسهای مساوی درنظر می‌گرفتیم آنگاه انرژی دستگاه چنین می‌شد

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega\left(n_۱ + \frac{۱}{۲}\right) + \hbar\omega\left(n_۲ + \frac{۱}{۲}\right) \\ &= \hbar\omega(n_۱ + n_۲ + ۱) \\ &\equiv \hbar\omega(\nu + ۱) \end{aligned}$$

که چنانچه انتظار می‌رفت نتیجهٔ یکسانی است.

۷– دو الکترون را درنظر بگیرید که با هامیلتونی

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1) + V(x_2)$$

توصیف می‌شوند که در آن

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty \quad x < 0,\ x > a \\ &= 0 \qquad 0 < x < a \end{aligned}$$

فرض کنید الکترونها در حالت اسپینی یکسانی هستند، یعنی $\sigma_1 = \sigma_2$.

(الف) پائینترین انرژی حالت دو الکترونی چقدر است؟

(ب) ویژه‌تابع انرژی این حالت پایه چیست؟

(ج) چنانچه هنوز داشته باشیم $\sigma_1 = \sigma_2$، انرژی و تابع‌موج اوّلین حالت برانگیخته چیست؟

اگر الکترونها در حالت اسپینی یکسسانی باشند تابع‌موج فضایی دستگاه دو الکترونی باید تحت تعویض دو الکترون پادمتقارن باشد. چون دو الکترون باهم برهمکنش نمی‌کنند تابع‌موج به‌شکل

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_n(x_1)\,u_k(x_2) - u_k(x_1)\,u_n(x_2)\right]$$

و انرژی برابر است با

$$\begin{aligned} E &= E_n + E_k \\ &= \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n^2 + k^2\right) \end{aligned}$$

پائینترین حالت متناظر است با $n = 1, k = 2$ و $n^2 + k^2 = 5$. اوّلین حالت برانگیخته معمولاً حالت $(2, 2)$ است ولی این حالت پادمتقارن نیست و در نتیجه باید اعداد کوانتومی را $(1, 3)$ انتخاب کنیم.

۸– دستگاه دو الکترونی را درنظر بگیرید که در آن $\sigma_1 = \sigma_2$ و ازاین‌رو نیازی نیست اسپین درنظر گرفته شود. فرض کنید که الکترونها در بسته‌های موج گاوسی حول $x = a$ و $x = -a$ هستند و در نتیجه توابع‌موج آنها به‌ترتیب $\sqrt{\pi}/\mu e^{-\mu^2(x-a)^2/2}$ و $\sqrt{\pi}/\mu e^{-\mu^2(x+a)^2/2}$ است. تابع‌موج بهنجار این دستگاه دو الکترونی را پیدا کنید. فرض کنید $1/\mu = 0{,}5\ \text{Å}$. برآورد کنید که به‌ازای چه مقادیری از a می‌توان با تقریب یک در هزار از اثرهای اصل پائولی چشمپوشی کرد؟

تابع‌موج پادمتقارن به‌شکل زیر است

$$N\frac{\pi}{\mu^2}\left(e^{-\mu^2(x_1-a)^2/2}e^{-\mu^2(x_2+a)^2/2} - e^{-\mu^2(x_1+a)^2/2}e^{-\mu^2(x_2-a)^2/2}\right)$$

$$= N\frac{\pi}{\mu^2}e^{-\mu^2a^2}e^{-\mu^2\left(x_1^2+x_2^2\right)/2}\left(e^{-\mu^2(x_2-x_1)a} - e^{-\mu^2(x_1-x_2)a}\right)$$

حال متغیرهای مرکزجرم X و جدایی x را معرفی می‌کنیم

$$x_۱ = X + \frac{x}{۲}, \quad x_۲ = X - \frac{x}{۲}$$

تابع موج به‌شکل زیر درمی‌آید

$$\psi = N\frac{\pi}{\mu^۲}e^{-\mu^۲a^۲}e^{-\mu^۲X^۲}e^{-\mu^۲x^۲/۴}\sinh\mu^۲ax$$

برای بهنجار کردن تابع‌موج باید داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dX\int_{-\infty}^{+\infty}dx|\psi|^۲ = ۱$$

اندک عملیّات جبری به نتیجهٔ زیر می‌انجامد

$$N\frac{\pi}{\mu^۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{۱}{\sqrt{۱ - e^{-۲\mu^۲a^۲}}}$$

وجود دوّمین ضریب به‌خاطر همپوشی است. هرگاه خواسته باشیم که این ضریب ۱ در ۱۰۰۰ دور از ۱ باشد آنگاه باید $e^{-۲\mu^۲a^۲} = ۱/۵۰۰$، یعنی $\mu a = ۱٫۷۶$ یا $a = ۳٫۵۳\ \mathring{A}$.

۹ــ با استفاده از تابع‌موج دستگاه دو الکترونی مسئلهٔ ۸ احتمال این که فاصلهٔ دو الکترون در گسترهٔ $(x, x+dx)$ باشد چقدر است؟ نشان دهید که مقدار چشمداشتی مرکز جرم این دستگاه دو الکترونی برابر است با $\langle(x_۱+x_۲)/۲\rangle = ۰$. (راهنمایی: متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ را برحسب متغییر مرکز جرم $X = (x_۱+x_۲)/۲$ و فاصلهٔ جدایی $x = x_۱ - x_۲$ بنویسید و تابع‌موج را برحسب این دو متغییر جدید بیان کنید.)

چون

$$\psi = \sqrt{۲}\,\frac{e^{-\mu^۲a^۲}}{\sqrt{۱ - e^{-۲\mu^۲a^۲}}}e^{-\mu^۲X^۲}e^{-\mu^۲x^۲/۴}\sinh\mu^۲ax$$

برای محاسبهٔ چگالی احتمال x باید از مجذور ψ روی همهٔ X انتگرال بگیریم. این مجذور تابع گوسی ساده‌ای است که حاصل انتگرال‌گیری از آن برابر است با

$$P(x)dx = \frac{۲e^{-۲\mu^۲a^۲}}{۱ - e^{-۲\mu^۲a^۲}}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{\mu}e^{-۲\mu^۲x^۲/۲}\sinh^۲(\mu^۲ax)\,dx$$

بدیهی است که

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}dX\,X\,e^{-۲\mu^۲X^۲} = ۰$$

چون انتگرالده تابع فردی از X است.

۱۰ــ چگالی احتمال مسئلهٔ ۹ را به‌شکل تابعی از x در دو مورد (۱) $۱/a = \mu/۲$ و (۲) $۱/a = ۲\mu$ رسم کنید. فیزیک این نتایج را شرح دهید.

نموداری که باید به‌شکل تابعی از x رسم کنیم چنین است

$$P(x) = \frac{۲e^{-۲\mu^۲a^۲}}{۱ - e^{-۲\mu^۲a^۲}}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{\mu}e^{-۲\mu^۲x^۲/۲}\sinh^۲(\mu^۲ax)$$

عامل گوسی از a مستقل است. عامل دوّم در یکی از توابع $\sinh^۲(۲\mu x)$ و در دیگری $\sinh^۲(\mu x/۲)$ است. حال اگر $y = \mu x$ آنگاه توابعی که باید نمودارشان را رسم کنیم $e^{-y^۲/۲}\sinh^۲ ۲y$ و $e^{-y^۲/۲}\sinh^۲(y/۲)$ هستند.

حاصلضرب $e^{-y^۲/۲}\sinh^۲\kappa y$ در نقطه‌ای که در آن $dP(y)/dy = ۰$، یعنی

$$-y\sinh\kappa y + ۲\kappa\cosh\kappa y = ۰$$

بیشینه دارد. رسم نمودارهای $۲\kappa/y$ و $\tanh\kappa y$ نشان می‌دهد که وقتی که κ بزرگ است جواب در مقدار بزرگتر y رخ می‌دهد. بنابراین احتمال در مورد اوّلین تابع در فواصل جدایی بزرگتری قله دارد که در آن مقدار a چهار برابر مقدار آن در مورد تابع دوّم است. در واقع جواب مسئله حاوی چندان فیزیکی نیست. دو الکترون تمایل دارند از هم دور باشند و هرچه a بزرگ باشد، یعنی هرچه فاصلهٔ بین دو تابع‌موج زیاد باشد فاصلهٔ الکترونها از هم بیشتر است.

۱۱ — فرض کنید در مسایل ۸، ۹، و ۱۰ الکترونها را با بوزنها جایگزین کرده‌ایم. تغییراتی را فهرست کنید که در فرمولها به‌وجود می‌آید. چگالی احتمال را به‌شکل تابعی از x برای این دو جدایی رسم کنید و تفاوت چگالی احتمال را در دو مورد فرمیون و بوزن توضیح دهید.

فرض می‌کنیم ذرّات بوزن هستند. اسپین در اینجا مهّم نیست و تابع‌موج دستگاه دو ذرّه‌ای متقارن است. تغییرات اندک است. تابع‌موج چنین می‌شود

$$\psi = ۲N\frac{\pi}{\mu^۲}e^{-\mu^۲a^۲}e^{-\mu^۲X^۲}e^{-\mu^۲x^۲/۴}\cosh\mu^۲ax$$

با

$$N\frac{\mu^۲}{\pi} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{۱}{\sqrt{۱ + e^{-۲\mu^۲a^۲}}}$$

و

$$P(x) = \frac{۲e^{-۲\mu^۲a^۲}}{۱ + e^{-۲\mu^۲a^۲}}\frac{\sqrt{\pi}}{\mu\sqrt{۲}}e^{-\mu^۲x^۲/۲}\cosh^۲(\mu^۲ax)$$

تابعی که می‌خواهیم اینک به‌شکل $P(y) = e^{-y^۲/۲}\cosh^۲\kappa y$ درمی‌آید که در $y = ۰$ قله دارد و در $-y\cosh\kappa y + ۲\kappa\sinh\kappa y = ۰$ اکسترمم است، یعنی وقتی که

$$\tanh\kappa y = \frac{y}{۲\kappa}$$

که فقط وقتی رخ می‌دهد که $۲\kappa^۲ > ۱$. به احتمال زیاد وقتی که دو مرکز بهم نزدیک هستند آنگاه قله بین آنها رخ می‌دهد. اگر آنها دور از هم باشند برآمدگی کوچکی در وسط وجود دارد ولی بیشتر اوقات ذرّات حول مراکزشان در $\pm a$ خواهند بود.

۱۲ – محاسبات انرژی فرمی گاز فرمیونی را تکرار کنید مشروط بر این که فرمیونها جرم ندارند و در نتیجه رابطهٔ انرژی و اندازه‌حرکت $E = pc$ است.

محاسبات تغییر چندانی نمی‌کنند. انرژی برابر است با

$$\begin{aligned} E &= pc \\ &= \frac{\hbar\pi}{L}\sqrt{n_۱^۲ + n_۲^۲ + n_۳^۲} \end{aligned}$$

بنابراین در معادلهٔ (۱۵—۵۸) داریم

$$R^۲\sqrt{n_۱^۲ + n_۲^۲ + n_۳^۲} = \left(\frac{E_F}{\hbar c\pi}\right)^۲ L^۲$$

از این رو

$$N = \frac{\pi}{۳}\left(\frac{E_F L}{\pi\hbar c}\right)^۳$$

و

$$E_F = \pi\hbar c\left(\frac{۳n}{\pi}\right)^{۱/۳}$$

۱۳ – حالتهای تبهگن در جعبهٔ مکعبی به‌حجم $L^۳$ را به‌شکل تابعی از E حساب کنید، یعنی تعداد حالتها را در گسترهٔ $(E, E + dE)$ حساب کنید و از آن چگالی حالتهای گاز الکترونی را با دانستن این که هر حالت انرژی با دو الکترون اشغال می‌شود، به‌دست آورید. (راهنمایی: چند $\{n_۱, n_۲, n_۳\}$ وجود دارند که برای آنها $\sum_i n_i^۲ = ۲mEL^۲/\hbar^۲\pi^۲$ ؟)

تعداد اعداد درست مثبت $\{n_۱, n_۲, n_۳\}$ که در

$$n_۱^۲ + n_۲^۲ + n_۳^۲ = R^۲ = \frac{۲mE}{\hbar^۲\pi^۲}L^۲$$

صدق کنند برابر است با تعداد نقاطی که در داخل یک هشتم کره‌ای به‌شعاع R در ضخامت Δn قرار دارند. بنابراین کمیّت

$$\frac{۱}{۸}۴\pi R^۲ dR$$

را می‌خواهیم. این کمیّت را برحسب E می‌نویسیم. داریم

$$۲RdR = \left(\frac{۲mL^۲}{\hbar^۲\pi^۲}\right) dE$$

بنابراین تبهگنی حالتها برابر است با

$$\begin{aligned} N(E)dE &= ۲ \times \frac{۱}{۸}۴\pi R(RdR) \\ &= L^۳\frac{m\sqrt{۲m}}{\hbar^۳\pi^۲}\sqrt{E}\, dE \end{aligned}$$

برای به‌دست آوردن چگالی الکترونی باید در ۲ ضرب می‌کردیم تا به‌ازای هر حالت دو الکترون به‌حساب می آوردیم.

۱۴ــ چگالی انرژی گاز فوتونی در جعبهٔ مکعبی به‌حجم $L^۳$ را با دانستن این که هر حالت انرژی با دو فوتون اشغال می‌شود (دو حالت قطبش)، حساب کنید.

چون فوتونها جرم ندارند و به‌ازای هر حالت انرژی دو حالت فوتونی داریم، این مسئله با مسئلهٔ ۱۲ یکی است. بنابراین داریم

$$n_۱^۲ + n_۲^۲ + n_۳^۲ = R^۲ = \left(\frac{E}{\hbar\pi c}\right)^۲ L^۲$$

یا

$$R = \frac{EL}{\hbar\pi c}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} N(E)dE &= \frac{۱}{۸}۴\pi R^۲ dE \\ &= L^۳ \frac{E^۲}{\hbar^۳ c^۳ \pi^۲} dE \end{aligned}$$

۱۵ــ طیف انرژی گاز فوتونی را در جعبه‌ای به‌ابعاد a، a، و L حساب کنید ($a \ll L$).

ویژه‌توابع ذرّه‌ای در جعبه‌ای به‌ابعاد $L_۱$، $L_۲$، و $L_۳$ به‌شکل حاصلضرب

$$u(x,y,z) = \sqrt{\frac{۸}{L_۱L_۲L_۳}} \sin\frac{n_۱\pi x}{L_۱} \sin\frac{n_۲\pi y}{L_۲} \sin\frac{n_۳\pi z}{L_۳}$$

و انرژی ذرّهٔ بدون جرم که برای آن $E = pc$ برابر است با

$$\begin{aligned} E &= \hbar c\pi \sqrt{\frac{n_۱^۲}{L_۱^۲} + \frac{n_۲^۲}{L_۲^۲} + \frac{n_۳^۲}{L_۳^۲}} \\ &= \hbar c\pi \sqrt{\frac{n_۱^۲ + n_۲^۲}{a^۲} + \frac{n_۳^۲}{L_۳^۲}} \end{aligned}$$

توجه کنید که $a \ll L$، بنابراین برای حالتهایی که پائین قرار دارند $n_۱ = n_۲ = ۱$ و $n_۳$ از ۱ به بالاست. در نقطه‌ای دو تراز $n_۱ = ۲, n_۲ = ۱$ و $n_۱ = ۱, n_۲ = ۲$ "سکوی جدیدی را فراهم می‌کنند که مجموعه حالتهای $n_۳ = ۱, ۲, ۳, \ldots$ روی آنها می‌نشینند. با $a = ۱\,\mathrm{nm}$ و $L = ۱۰^۳\,\mathrm{nm}$ و به‌ازای $n_۱ = n_۲ = ۱$ پیش از این که سکوی جدیدی آغاز شود مقدار $n_۳$ می‌تواند تا $۱۰^۳$ برسد.

۱۶– طیف انرژی الکترون آزادی را در جعبه‌ای به‌ابعاد a، a، و L حساب کنید ($a \ll L$). فاصلهٔ بین ترازها به‌ازای $a = ۱$ nm و $L = ۱$ nm پیدا کنید.

برای ذرّات غیرنسبیّتی داریم

$$E = \frac{\hbar^۲}{۲m}\sqrt{\frac{n_۱^۲ + n_۲^۲}{a^۲} + \frac{n_۳^۲}{L^۲}}$$

۱۷– هسته از N نوترون و Z پروتون تشکیل شده است ($N + Z = A$). اگر شعاع هسته از رابطهٔ $R = r_۰ A^{۱/۳}$ به‌دست آید که در آن $r_۰ = ۱{,}۱$ fm (۱ fm $= ۱۰^{-۱۵}$ m) و اگر جرم نوترون و پروتون را یکسان بگیریم ($۱{,}۷ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg) عبارتی برای انرژی فرمی "گاز" پروتونی و "گاز" نوترونی بنویسید مشروط بر این که پروتونها و نوترونها مانند ذرّات آزاد حرکت می‌کنند. اگر $N = ۱۲۶$ و $Z = ۸۲$ باشد انرژیهای فرمی چقدر است؟

داریم

$$E_F = \frac{\hbar^۲\pi^۲}{۲M}\left(\frac{۳n}{\pi}\right)^{۲/۳}$$

که در آن M جرم نوکلئون است و برای نوترون و پروتون برابر درنظر گرفته شده‌است و n **چگالی عدد** است. چون در حجم $(۴/۳)\pi r_۰^۳ A$ تعداد Z پروتون وجود دارد چگالی عدد پروتونها و نوترونها چنین است

$$n_p = \frac{۳}{۴\pi r_۰^۳}\frac{Z}{A}, \quad n_n = \frac{۳}{۴\pi r_۰^۳}\frac{A - Z}{A}$$

با عددگذاری داریم

$$E_{F_p} = ۶۵\left(\frac{Z}{A}\right)^{۲/۳} \text{MeV}, \quad E_{F_n} = ۶۵\left(۱ - \frac{Z}{A}\right)^{۲/۳} \text{MeV}$$

به‌ازای $A = ۲۰۸$ و $Z = ۸۲$ داریم $E_{F_p} = ۳۵\,\text{MeV}$ و $E_{F_n} = ۴۷\,\text{MeV}$.

فصل چهاردهم

اتمها و مولکولها

۱ــ اتم هلیوم را در تقریبی درنظر بگیرید که در آن از دافعهٔ الکترون‌ـ‌الکترون صرفنظر شده‌است. تابع‌موج حالت پایهٔ اورتوهلیوم چیست (اسپین ۱)؟ در این تقریب تبهگنی چقدر است؟

قسمت اسپینی تابع‌موج سه‌تایی زیر است

$$\begin{array}{ll} m_s = ۱ & \chi_+^{(۱)}\chi_+^{(۲)} \\ m_s = ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\chi_+^{(۱)}\chi_-^{(۲)} + \chi_-^{(۱)}\chi_+^{(۲)}\right) \\ m_s = -۱ & \chi_-^{(۱)}\chi_-^{(۲)} \end{array}$$

از این روابط پیداست که قسمت فضایی تابع‌موج باید تحت تعویض مختصات دو ذرّه باید پادمتقارن باشد. درپائنترین حالت انرژی یکی از ذرّات در حالتی با $n = ۱, l = ۰$ و الکترون دیگر در حالتی $n = ۲, l = ۱$ یا $n = ۲, l = ۰$ خواهد بود. حالتهای ممکن عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Big(u_{۱۰۰}(\mathbf{r}_۱)u_{۲۱m}(\mathbf{r}_۲) - u_{۱۰۰}(\mathbf{r}_۲)u_{۲۱m}(\mathbf{r}_۱)\Big), \qquad m = ۱, ۰, -۱$$

و

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Big(u_{۱۰۰}(\mathbf{r}_۱)u_{۲۰۰}(\mathbf{r}_۲) - u_{۱۰۰}(\mathbf{r}_۲)u_{۲۰۰}(\mathbf{r}_۱)\Big),$$

تعداد کلّ حالتهایی که انرژی آنها $E_۱ + E_۲$ است برابر است با $۳ \times ۴ = ۱۲$.

۲ــ در نظریّهٔ اختلال مرتبهٔ اوّل عبارت تغییر انرژی ناشی از دافعهٔ الکترون‌ـ‌الکترون را بنویسید و آن را ساده کنید. (انتگرالهای نهایی را حساب نکنید!) آیا این نتیجه تبهگنی مسئلهٔ ۱ را تغییر خواهد داد؟ ترتیب قرار گرفتن ترازهای مختلف را برآورد کنید.

برای حالت سه‌تایی جابجاییهای انرژی اختلال مرتبهٔ اوّل برابرند با

$$\Delta E_{۲۱m} = \iint d^۳\mathbf{r}_۱ d^۳\mathbf{r}_۲ \left|\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Big(u_{۱۰۰}(\mathbf{r}_۱)u_{۲۱m}(\mathbf{r}_۲) - u_{۱۰۰}(\mathbf{r}_۲)u_{۲۱m}(\mathbf{r}_۱)\Big)\right|^۲ \frac{e^۲}{۴\pi\epsilon_۰|\mathbf{r}_۱ - \mathbf{r}_۲|}$$

$$\Delta E_{۲۰۰} = \iint d^۳\mathbf{r}_۱ d^۳\mathbf{r}_۲ \left|\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Big(u_{۱۰۰}(\mathbf{r}_۱)u_{۲۰۰}(\mathbf{r}_۲) - u_{۱۰۰}(\mathbf{r}_۲)u_{۲۰۰}(\mathbf{r}_۱)\Big)\right|^۲ \frac{e^۲}{۴\pi\epsilon_۰|\mathbf{r}_۱ - \mathbf{r}_۲|}$$

جابجایی انرژی $l = ۱$ از توابع‌موج دو الکترونی استفاده می‌کند که اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری آنها ۱ است. در این مسئله راستای متمایزی وجود ندارد و از این رو روابط به ویژه‌مقادیر L_z بستگی نخواهند داشت و هر سه مقدار m انرژی یکسانی دارند. جابجایی انرژی $l = ۰$ از ویژه‌توابع متفاوتی استفاده می‌کند و در نتیجه تبهگنی شکافته می‌شود و به‌جای تبهگنی ۱۲ گانه به ۳ + ۹ شکافتگی خواهیم داشت.

ساده‌سازی انتگرالهای جابجایی انرژی به ساده‌سازی انتگرالهای قسمت دوّم معادلهٔ (۱۴—۲۹) کتاب برمی‌گردد. محاسبهٔ این انتگرالها دردسر دارد و ما فقط قسمت $l = ۱$ آنها را انجام می‌دهیم. داریم

$$\iint d^{۳}\mathbf{r}_{۱} d^{۳}\mathbf{r}_{۲} \to \int_{۰}^{\infty} r_{۱}^{۲} dr_{۱} \int_{۰}^{\infty} r_{۲}^{۲} dr_{۲} \int d\Omega_{۱} \int d\Omega_{۲}$$

قسمتهای زاویه‌ای از طریق تابع‌موج $u_{۲۱۰}$ و جملهٔ $۱/r_{۱۲}$ وارد می‌شوند. از معادلات (۱۴—۲۶) و (۱۴—۲۹) برای محاسبهٔ انتگرال مستقیم

$$\frac{e^{۲}}{۴\pi\epsilon_{۰}} \int_{۰}^{\infty} r_{۱}^{۲} dr_{۱} \int_{۰}^{\infty} r_{۲}^{۲} dr_{۲} R_{۱۰}^{۲}(r_{۱}) R_{۲۱}^{۲}(r_{۲})$$
$$\int d\Omega_{۱} \int d\Omega_{۲} \left(\frac{۱}{\sqrt{۴\pi}}\right)^{۲} \left(\sqrt{\frac{۳}{۴\pi}} \cos\theta_{۲}\right)^{۲} \sum_{L} P_{L}(\cos\theta_{۱۲}) \frac{r_{<}^{L}}{r_{>}^{L+۱}}$$

استفاده می‌کنیم که در آن $\theta_{۱۲}$ زاویهٔ بین $\mathbf{r}_{۱}$ و $\mathbf{r}_{۲}$ است. از قضیّهٔ جمع

$$P_{L}(\cos\theta_{۱۲}) = P_{L}(\cos\theta_{۱}) P_{L}(\cos\theta_{۲})$$
$$+۲ \sum_{m=۱} \frac{(L-m)!}{(L+m)!} P_{L}^{m}(\cos\theta_{۱}) P_{L}^{m}(\cos\theta_{۲}) \cos m\phi_{۲} \frac{r_{<}^{L}}{r_{>}^{L+۱}}$$

نیز استفاده می‌کنیم. چون جمع روی $m = ۱, ۲, ۳, \ldots$ است انتگرال روی $\phi_{۲}$ جمع را حذف می‌کند و داریم

$$\sum_{L} P_{L}(\cos\theta_{۱۲}) \frac{r_{<}^{L}}{r_{>}^{L+۱}} = \sum_{L} P_{L}(\cos\theta_{۱}) P_{L}(\cos\theta_{۲}) \frac{r_{<}^{L}}{r_{>}^{L+۱}}$$

اینک داریم

$$\int d\Omega_{۱} = ۴\pi \delta_{L۰}$$

و

$$\int d\Omega_{۲} \cos^{۲}\theta_{۲} = \frac{۴\pi}{۳}$$

اثر رویهمرفته این است که جمع را با $۱/r_{>}$ جایگزین کنیم که در انتگرال شعاعی وارد می‌شود.

در انتگرال تعویض باید تغییراتی بدهیم. در قسمت شعاعی

$$R_{۱۰}^{۲}(r_{۱}) R_{۲۱}^{۲}(r_{۲}) \to R_{۱۰}(r_{۱}) R_{۲۱}(r_{۱}) R_{۱۰}(r_{۲}) R_{۲۱}(r_{۲})$$

و در قسمت زاویه‌ای

$$\frac{1}{4\pi}\frac{3}{4\pi}\cos^2\theta_2 \to \frac{3}{(4\pi)^2}\cos\theta_1\cos\theta_2$$

در انتگرال‌گیری سمتی باز هم جملات $m \neq 0$ ناپدید می‌شوند و آنچه می‌ماند حاصلضرب دو انتگرال است به‌شکل

$$\int d\Omega\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta P_L(\cos\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\delta_{L1}$$

اثر رویهمرفته این است که جمع را با $\frac{1}{3}\frac{r_<}{r_>^2}$ جایگزین و در انتگرال شعاعی وارد کنیم. برای $l = 0$ این روال را دنبال می‌کنیم و حاصل چنین است

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty r_1^2 dr_1\int_0^\infty r_2^2 dr_2\frac{1}{r_>}[R_{10}(r_1)R_{20}(r_2)][R_{10}(r_1)R_{20}(r_2) - R_{10}(r_2)R_{20}(r_1)]$$

محاسبهٔ انتگرالهای شعاعی آسان است ولی تعداد جملات زیادند و از این گونه محاسبات فیزیکی عاید نمی‌شود.

برای این که برآورد کنیم کدامیک از ترکیبهای پادمتقارن $(l = 0, l = 0)$ و $(l = 0, l = 1)$ انرژی کمتری دارد از راه فیزیک وارد می‌شویم. در تابع‌موج دو الکترونی یکی از الکترونها در حالت $n = 1, l = 0$ و الکترون دیگر در حالت $n = 2$ است. درنتیجه تابع‌موج اندکی پخش است و احتمال دارد الکترون بتواند به هسته نزدیک شود. این احتمال برای حالت $l = 0$ بیشتر از حالت $l = 1$ است. بنابراین انتظار داریم انرژی حالتی که در آن اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری دو الکترون صفر است کمتر باشد.

۳– پائینترین حالت اورتوهلیوم را در مسایل ۱ و ۲ درنظر بگیرید. آیا می‌توانید گشتاور مغناطیسی این حالت را برآورد کنید؟

در حالت پایهٔ اورتوهیلیوم اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری هر دو الکترون صفر است. بنابراین تنها اسپین الکترون است که در گشتاور مغناطیسی سهم دارد. برهمکنش الکترون با میدان مغناطیسی با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود

$$\begin{aligned} H &= -\frac{ge}{2m_e}\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B} - \frac{ge}{2m_e}\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{B} \\ &= -\frac{ge}{2m_e}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} \end{aligned}$$

چون در این رابطه $g = 2$ بنابراین گشتاور مغناطیسی می‌تواند مقادیر $-\frac{e\hbar}{2m_e}m_l$ را بپذیرد که در آن $m_l = 1, 0, -1$.

۴– عبارت

$$\text{“}E\text{”} = \langle\Psi|H|\Psi\rangle$$

را درنظر بگیرید که در آن Ψ تابع‌موج آزمون دلخواهی است. نشان دهید که اگر Ψ با جملاتی از مرتبهٔ ε با تابع‌موج درست حالت پایه ψ_0 فرق داشته باشد آنگاه "E" با جملاتی از مرتبهٔ ε^2 با انرژی حالت پایه فرق خواهد داشت. [توجه: شرط بهنجارش $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ را فراموش نکنید.]

فرض می‌کنیم که ψ بهنجار و به‌شکل زیر است

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \epsilon|\chi\rangle$$

از شرط بهنجارش داریم

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = \langle\psi_0|\psi_0\rangle + \epsilon^*\langle\chi|\psi_0\rangle + \epsilon\langle\psi_0|\chi\rangle + \epsilon\epsilon^*\langle\chi|\chi\rangle$$

بنابراین

$$\epsilon^*\langle\chi|\psi_0\rangle + \epsilon\langle\psi_0|\chi\rangle + \epsilon\epsilon^*\langle\chi|\chi\rangle = 0$$

اینک داریم

$$\begin{aligned}\langle\psi|H|\psi\rangle &= \langle\psi_0 + \epsilon\chi|H|\psi_0 + \epsilon\chi\rangle \\ &= E_0 + \epsilon^* E_0\langle\chi|\psi_0\rangle + \epsilon E_0\langle\psi_0|\chi\rangle + |\epsilon|^2\langle\chi|H|\chi\rangle \\ &= E_0 + |\epsilon|^2\langle\chi|H - E_0|\chi\rangle\end{aligned}$$

که در آن از شرط بهنجارش استفاده کرده‌ایم. بنابراین مقدار چشمداشتی H با مقدار دقیق آن به‌اندازهٔ عبارتهایی از مرتبهٔ $|\epsilon|^2$ فرق دارد.

۵– با استفاده از اصل وردش انرژی حالت پایهٔ نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی را برآورد کنید. تابع‌موج آزمون را

$$\Psi = Ne^{-\alpha r}$$

درنظر بگیرید.

باید عبارت

$$E(\alpha) = \frac{\int_0^\infty 4\pi r^2 dr\, e^{-\alpha r}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right] e^{-\alpha r}}{\int_0^\infty 4\pi r^2 dr\, e^{-2\alpha r}}$$

را حساب کنیم. با اندک عملیّات جبری و با استفاده از $\int_0^\infty dy\, y^n e^{-y} = n!$ داریم

$$E(\alpha) = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + \frac{3m\omega^2}{2\alpha^2}$$

کمینهٔ این عبارت وقتی است که $dE(\alpha)/d\alpha = ۰$ و از آن داریم $\alpha^۲ = \sqrt{۳}m\omega/\hbar$. اگر این مقدار را در $E(\alpha)$ قرار دهیم نتیجه می‌گیریم که

$$E_۰ = \sqrt{۳}\,\hbar\omega$$

مقدار دقیق انرژی کمتر از این مقدار است. مقدار دقیق برابر است با $\frac{۳}{۲}\hbar\omega$ و تقریب ما بسیار خوب است.

۶– معادلهٔ شرودینگر برای $l = ۰$ را با پتانسیل

$$V(r) = V_۰ f(r/r_۰)$$

درنظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که می‌توان آن را به‌شکل

$$\frac{d^۲u(x)}{dx^۲} - \alpha^۲u(x) + \lambda f(x)u(x) = ۰$$

نوشت که در آن $u(۰) = ۰$ و

$$\lambda = \frac{\int_۰^\infty dx\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^۲ + \alpha^۲u^۲(x)\right)}{\int_۰^\infty dx\, f(x)u^۲(x)}$$

(ب) نشان دهید که ویژه‌توابع دقیق λ را کمینه می‌کنند.

معادلهٔ شرودینگر هر حالت مقیّد در پتانسیل چاذبه‌ای با $l = ۰$ چنین می‌شود

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m}\left(\frac{d^۲}{dr^۲} + \frac{۲}{r}\frac{d}{dr}\right)\psi(r) - |V_۰|\, f\left(\frac{r}{r_۰}\right)\psi(r) = -E_B\psi(r)$$

با نمادگذاری

$$x = \frac{r}{r_۰}, \quad u_۰(x) = x\,\psi(x), \quad \lambda = \frac{۲m|V_۰|r_۰^۲}{\hbar^۲}, \quad \alpha^۲ = \frac{۲mE_Br_۰^۲}{\hbar^۲}$$

معادلهٔ بالا چنین می‌شود

$$\frac{d^۲u_۰(x)}{dx^۲} - \alpha^۲u_۰(x) + \lambda\, f(x)u_۰(x) = ۰$$

حال تابع دلخواه $w(x)$ را درنظر بگیرید که در $w(۰) = ۰$ صدق می‌کند (مثل $u_۰(۰)$). تعریف می‌کنیم

$$\eta[w] = \frac{\int_۰^\infty dx\left(\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^۲ + \alpha^۲w^۲(x)\right)}{\int_۰^\infty dx\, f(x)w^۲(x)}$$

از ما خواسته شده‌است ثابت کنیم که اگر $\eta = \lambda + \delta\lambda$ و $w(x) = u_\circ(x) + \delta u(x)$ آنگاه اگر $\delta u(x) \to \circ$ داریم $\delta\lambda \to \circ$. ما فقط تا مرتبهٔ اوّل در $\delta u(x)$ کار می‌کنیم. بنابراین اگر سمت راست معادلهٔ بالا را به‌شکل اختصاری بنویسیم چنین می‌شود

$$\frac{\int \left(u_\circ'^{\text{۲}} + \alpha^{\text{۲}} u_\circ^{\text{۲}}\right) + \text{۲} \int \left(u_\circ' \delta u' + \alpha^{\text{۲}} u_\circ \delta u\right)}{\int f \left(u_\circ^{\text{۲}} + \text{۲} u_\circ \delta u\right)}$$

$$= \frac{\int \left(u_\circ'^{\text{۲}} + \alpha^{\text{۲}} u_\circ^{\text{۲}}\right)}{\int f u_\circ^{\text{۲}}} - \text{۲} \frac{\int \left(u_\circ' \delta u' + \alpha^{\text{۲}} u_\circ \delta u\right)}{\int f u_\circ^{\text{۲}}} \frac{\int \left(u_\circ'^{\text{۲}} + \alpha^{\text{۲}} u_\circ^{\text{۲}}\right)}{\int f u_\circ^{\text{۲}}}$$

جملهٔ اوّل در این رابطه برابر است با $\eta[u_\circ]$ و به آسانی می‌توان نشان داد که حاصل آن برابر است با λ. همان شکل در جملهٔ دوّم نیز پدیدار می‌شود. برای اوّلین ضریب در جملهٔ دوّم از

$$\int dx \left(u_\circ' \delta u'\right) = \int dx \frac{d}{dx} \left(u_\circ' \delta u\right) - \int dx u_\circ'' \delta u$$

استفاده می‌کنیم. جملهٔ اوّل سمت راست صفر است چون ویژه‌تابع در بی‌نهایت صفر می‌شود و نیز $\delta u_\circ(\circ) = \circ$. جملهٔ دوّم در این معادله $\eta[w]$ برابر است با

$$\frac{\text{۲}}{\int f u_\circ^{\text{۲}}} \int \delta u \left[-u_\circ'' + \alpha^{\text{۲}} u_\circ - \lambda f u_\circ\right]$$

بنابراین وقتی که $\delta u \to \circ$ داریم $\eta \to \lambda$.

۷− ماتریس H_{ij} را با ابعاد متناهی درنظر بگیرید. نشان دهید که شرط کمینه‌کردن

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_{i,j=\text{۱}}^{n} a_i^* H_{ij} a_j$$

مشروط بر این که

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{i=\text{۱}}^{n} a_i^* a_i = \text{۱}$$

ویژه‌مقادیر ماتریس H را تعیین می‌کند. (راهنمایی: از روش مضارب لاگرانژ استفاده کنید.)

می‌خواهیم کمیّت

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{i,j} a_i^* H_{ij} a_j$$

را کمینه کنیم مشروط بر این که

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{i} a_i^* a_i = \text{۱}$$

با توجه به روش مضارب لاگرانژ باید تابع

$$F\left(a_i^*, a_i\right) = \sum_{i,j} a_i^* H_{ij} a_j - \lambda \sum_i a_i^* a_i$$

را کمینه کنیم. شرط $\partial F/\partial a_i^* = 0$ ایجاب می‌کند که

$$\sum_j H_{ij} a_j = \lambda a_i$$

همچنین شرط $\partial F/\partial a_i = 0$ ایجاب می‌کند که

$$\sum_i a_i^* H_{ij} = \lambda a_j^*$$

بنابراین شرط کمینه کردن جوابهای معادلهٔ ویژه‌مقدار H را به‌دست می‌دهد.

۸– با استفاده از اصل وردش نشان دهید که هر پتانسیل جاذبه‌ای یک بعدی همیشه حالت مقیّد خواهد داشت. (راهنمایی: عبارت $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$ را با تابع‌موج آزمون مناسبی، برای مثال $Ne^{-\beta^2 x^2}$ حساب کنید و نشان دهید که این مقدار چشمداشتی را همیشه می‌توان منفی ساخت.)

مقدار چشمداشتی H را درنظر بگیرید که با تابع‌موج آزمونی بهنجار

$$\psi(x) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\beta x^2/2}$$

حساب شده‌است. پس از اندک عملیّات جبری این مقدار چشمداشتی به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
E(\beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) \\
&= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\beta^2 - \beta^4 x^2\right) e^{-\beta^2 x^2}\right) + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, V(x) e^{-\beta^2 x^2} \\
&= \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m} + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, V(x) e^{-\beta^2 x^2}
\end{aligned}$$

سؤال این است که آیا می‌توانیم β چنان پیدا کنیم که این کمیّت منفی شود؟ اگر چنین شود آنگاه مقدار واقعی انرژی حالت پایه باید منفی‌تر از این مقدار باشد. می‌دانیم که پتانسیل جاذبه‌ای است، یعنی $V(x)$ هرگز مثبت نمی‌شود. می‌نویسیم $V(x) = -|V(x)|$ و می‌پرسیم که آیا می‌توان β را چنان تعیین کرد که

$$\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |V(x)| e^{-\beta^2 x^2} > \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m}$$

به‌ازای هر $|V(x)|$ می‌توانیم "سدّ مربعی داشته باشیم. برای مثال اگر ارتفاع این سدّ پتانسیل V_0 و از $-a$ تا $+a$ گسترده باشد آنگاه سمت چپ معادلهٔ بالا همیشه بزرگتر است از

$$L(\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} V_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\beta^2 x^2}$$

اکنون سؤال ما چنین می‌شود که آیا می‌توان β را چنان یافت که

$$\frac{۴m}{\hbar^۲}L(\beta) > \beta^۲$$

آشکار است که به‌ازای β های کوچک که به‌ازای آنها $\beta^۲a^۲ \ll ۱$، سمت چپ را می‌توان با

$$۲a\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\frac{۴mV_\circ}{\hbar^۲}$$

تقریب گرفت. این عبارت نسبت به β خطی است و همواره می‌توان β آن قدر کوچکی یافت که سمت چپ بزرگتر از سمت راست شود.

۹– با استفاده از داده‌های شکل ۱۴–۴ مکان تراز $(۲s)(۲p)$ را در بالا حالت پایهٔ هلیوم پیدا کنید و سرعت الکترونی را حساب کنید که در خودیونیدگی گسیل می‌شود مشروط بر این که در انتها یون He^+ در پائینترین حالت خود باشد. اگر He^+ در اوّلین حالت برانگیختهٔ خود باشد این سرعت چقدر می‌شود؟

داده‌ها حاکی از تشدیدی متناظر با طول‌موج $۲۰٫۶۱\,\mathrm{nm}$ هستند که با انرژی

$$\begin{aligned}h\frac{c}{\lambda} &= \frac{۲\pi(۱٫۰۵۴\times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J.s})(۳\times ۱۰^۸\,\mathrm{m/sec})}{(۲۰٫۶۱\times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{m})(۱٫۶۰۲\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{J/eV})}\\ &= ۶۰٫۱۷\,\mathrm{eV}\end{aligned}$$

بالای حالت پایه متناظر است. انرژی حالت پایه $-۷۸٫۹۸\,\mathrm{eV}$ است حال آن که حالت پایهٔ He^+ انرژی پیوندی اتم هیدرژن گونه‌ای با $Z = ۲$ را دارد، یعنی $۵۴٫۴۲\,\mathrm{eV}$. بنابراین انرژی یونش He برابر است با $(۷۸٫۹۸ - ۵۴٫۴۲)\,\mathrm{eV} = ۲۴٫۵۵\,\mathrm{eV}$ بالای حالت پایه. در نتیجه وقتی که حالت $(۲s)(۲p)$ به He^+ و الکترون وامی‌پاشد الکترون $(۶۰٫۱۷ - ۲۴٫۵۵)\,\mathrm{eV} = ۳۵٫۶۲\,\mathrm{eV}$ انرژی دارد. از اینجا سرعت الکترون برابر می‌شود با $v = \sqrt{۲E/m} = ۳٫۵۴\times ۱۰^۶\,\mathrm{m/sec}$. اوّلین حالت برانگیختهٔ یون He^+ به مقدار $۵۴٫۴۲(۱ - ۱/۴) = ۴۰٫۸۲\,\mathrm{eV}$ بالای حالت پایهٔ یون He^+ واقع است و این خود بالای حالت $(۲s)(۲p)$ قرار می‌گیرد.

۱۰– تابع‌موج $\psi(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n)$ را درنظر بگیرید که برای آن فقط بستگی به تعدادی پارامتر را نشان داده‌ایم. این تابع‌موج بهنجار است:

$$\langle\psi(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n)|\psi(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n)\rangle = ۱$$

و بستگی آن به این پارامترها چنان است که عبارت

$$\mathcal{E} = \langle\psi(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n)|H|\psi(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n)\rangle$$

کمینه است. نشان دهید که این پارامترها از مجموعه معادلات

$$\left\langle \psi(\alpha_۱,\ldots) \left| H \right| \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \right\rangle - \mu \left\langle \psi(\alpha_۱,\ldots) \middle| \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \right\rangle = ۰, \quad i = ۱,۲,۳,\ldots,n$$

که در آن μ مضرب لاگرانژ است. فرض کنید که H به پارامتری مانند λ بستگی دارد (برای مثال بار هسته‌ای یا نوعی فاصله، مثلاً فاصله بین هسته‌ای در مولکولها). آنگاه α_i نیز به این پارامتر بستگی خواهد داشت. ثابت کنید که

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\lambda} = \left\langle \psi(\alpha_۱,\ldots) \left| \frac{\partial H}{\partial\lambda} \right| \psi(\alpha_۱,\ldots) \right\rangle$$

این رابطه به قضیهٔ فاینمن—هلمن معروف است و در محاسبات فیزیک مولکولی بسیار مفید است.

برای محاسبهٔ کمینهٔ عبارت

$$E(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots) = \frac{\langle \psi(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots) | H | \psi(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots) \rangle}{\langle \psi(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots) | \psi(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots) \rangle}$$

قرار می‌دهیم $\partial E/\partial\alpha_i = ۰$ که در آن $i = ۱,۲,۳,\ldots$. داریم

$$\frac{\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \middle| H \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \middle| H \middle| \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \right\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} - \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle \left(\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \middle| \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \right\rangle \right)}{\langle\psi|\psi\rangle^۲} = ۰$$

این معادله هم‌ارز است با معادلهٔ

$$\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \middle| H \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \middle| H \middle| \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \right\rangle = E(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots) \left(\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \middle| \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \right\rangle \right)$$

حال فرض می‌کنیم که H به پارامتری مانند λ بستگی دارد. برای محاسبهٔ کمینه، پارامترهای α_i را باید چنان انتخاب کنیم که به λ بستگی داشته باشند. معادلهٔ آغازین را طوری می‌نویسیم که همه چیز به λ بستگی داشته باشد

$$E(\lambda)\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle = \langle\psi(\lambda)|H|\psi(\lambda)\rangle$$

اینک نسبت به λ دیفرانسیل می‌گیریم و توجه می‌کنیم که

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} = \sum_i \frac{\partial\alpha_i}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}$$

بنابراین داریم

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda}\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle + E(\lambda)\sum_i \frac{\partial\alpha_i}{\partial\lambda} \left(\left\langle \frac{\partial\psi(\lambda)}{\partial\alpha_i} \middle| \psi(\lambda) \right\rangle + \left\langle \psi(\lambda) \middle| \frac{\partial\psi(\lambda)}{\partial\alpha_i} \right\rangle \right) =$$

$$\left\langle \psi(\lambda) \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi(\lambda) \right\rangle + \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda} \left(\left\langle \frac{\partial \psi(\lambda)}{\partial \alpha_i} \left| H \right| \psi(\lambda) \right\rangle + \left\langle \psi(\lambda) \left| H \right| \frac{\partial \psi(\lambda)}{\partial \alpha_i} \right\rangle \right)$$

از آنجا که نشان داده‌ایم

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \left| H \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| H \right| \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \right\rangle = E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \left(\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \middle| \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \right\rangle \right)$$

نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} \langle \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle = \left\langle \psi(\lambda) \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \psi(\lambda) \right\rangle \right.$$

با توابع‌موج آزمونی بهنجار سرانجام به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \left\langle \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \right\rangle$$

توجه کنید که قضیهٔ پائولی در پیوست ۸–الف کتاب شکل یکسانی دارد ولی آن قضیهٔ با ویژه‌مقادیر دقیق و ویژه‌توابع دقیق سروکار دارد. در اینجا دریافتیم که همان رابطه برای ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع تقریبی نیز به‌کار می‌رود مشروط بر این که این ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع به پارامترهایی مانند α بستگی داشته باشند که مقدار چشمداشتی هامیلتونی را (که خود به‌این پارامترها بستگی ندارد) کمینه کنند.

۱۱– با استفاده از اصل وردش انرژی حالت پایهٔ نوسانگر ناهماهنگ

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda x^4$$

را حساب کنید. نتیجه‌ای را که به‌دست می‌آورید با جواب دقیق

$$E_0 = 1{,}060\, \lambda^{1/3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{2/3}$$

(راهنمایی: از تابع آزمون گوسی استفاده کنید.)

با تابع‌موج آزمونی

$$\psi(x) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\beta^2 x^2/2}$$

داریم

$$\begin{aligned} E(\beta) &= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\beta^2 x^2/2} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \lambda x^4 \right) e^{-\beta^2 x^2/2} \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\beta^2 x^2} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\beta^2 - \beta^4 x^2 \right) + \lambda x^4 \right) \\ &= \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m} + \frac{3\lambda}{4\beta^4} \end{aligned}$$

با قرار دادن $\partial E/\partial\beta = ۰$ این معادله را کمینه می‌کنیم و داریم

$$\beta^۲ = \left(\frac{۶m\lambda}{\hbar^۲}\right)^{۱/۳}$$

اگر این مقدار را در عبارت E قرار دهیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E_{\min} &= \left(\frac{\hbar^۲}{۲m}\right)^{۲/۳} (۴\lambda)^{۱/۳} \left(\frac{۶^{۱/۳}}{۴} + \frac{۳}{۴}\frac{۱}{۶^{۲/۳}}\right) \\ &= ۱{,}۰۸۳ \left(\frac{\hbar^۲}{۲m}\right)^{۲/۳} \lambda^{۱/۳} \end{aligned}$$

این مقدار به مقدار واقعی که در آن ضریب جلویی ۱٫۰۶۰ است خیلی نزدیک است.

۱۲– با استفاده از جوابی که در مسئلهٔ ۱۱ ذکر کردیم و نیز قضیهٔ فاینمن–هلمن، کمیّتهای $\langle p^۲\rangle$ و $\langle x^۴\rangle$ را برای حالت پایهٔ نوسانگر ناهماهنگ حساب کنید.

با هامیلتونی

$$H = \frac{p^۲}{۲m} + \lambda x^۴$$

نخست $(۱/۲m)$ را پارامتر قضیهٔ فاینمن–هلمن می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} \langle ۰|p^۲|۰\rangle &= \frac{\partial E_{\min}}{\partial(۱/m)} \\ &= ۰{,}۸۹۰ (\hbar^۴ m\lambda)^{۱/۳} \end{aligned}$$

هرگاه λ را پارامتر خود انتخاب کنیم آنگاه

$$\begin{aligned} \langle ۰|x^۴|۰\rangle &= \frac{\partial E_{\min}}{\partial\lambda} \\ &= ۰{,}۳۵۳ \left(\frac{\hbar^۲}{۲m\lambda}\right)^{۲/۳} \end{aligned}$$

۱۳– بنابر اصل وردش ریتز مقدار چشمداشتی هامیلتونی H در هر حالت بهنجار دلخواه ψ از رابطهٔ

$$\langle\psi|H|\psi\rangle > E_۰$$

پیروی می‌کند که در آن $E_\circ$ پائنترین ویژه‌مقدار H است. فرض کنید که H ماتریس هرمیتی $N \times N$ است که عناصر ماتریسی آن H_{ij} $(i,j = ۱,۲,۳,\ldots,N)$ و $E_\circ$ پائینترین ویژه‌مقدار انرژی است. با انتخاب مناسب ψ ثابت کنید که $E_\circ$ از همهٔ عناصر قطری H_{ii} ماتریس H کوچکتر است.

با رابطهٔ

$$E_\circ \leq \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi\psi\rangle} = \frac{\sum\limits_{ij} a_i^* H a_j}{\sum\limits_i a_i^* a_i}$$

آغاز می‌کنیم. حال بردار آزمون را برداری انتخاب می‌کنیم که همهٔ ورودیهای آن صفر است جز ورودی k–ام آن که برابر است با ۱، یعنی $a_i = \delta_{ik}$. داریم

$$E_\circ \leq H_{kk}$$

که در آن $k = ۱,۲,۳,\ldots$. بنابراین پائینترین ویژه‌مقدار همیشه از کوچکترین المان قطری کوچکتر است.

۱۴– دو ذرّهٔ یکسان اسپین ۱/۲ را در پتانسیل نوسانگر هماهنگ درنظر بگیرید. هامیلتونی این دستگاه چنین است:

$$H = \frac{p_۱^۲}{۲m} + \frac{p_۲^۲}{۲m} + \frac{۱}{۴}m\omega^۲(\mathbf{r}_۱ - \mathbf{r}_۲)^۲$$

فرض کنید که اندازه‌حرکت مرکز جرم این دستگاه دو ذرّه‌ای صفر و دو ذرّه در حالت $l = \circ$ باشند.

(الف) تابع‌موج حالت پایه را بنویسید که شامل اسپین نیز باشد.

(ب) اوّلین حالت برانگیخته را در حالتهای اسپینی یکتایی و سه‌تایی بنویسید.

(ج) فرض کنید که برهمکنش کوتاه بردی بین این دو ذرّه وجود دارد که می‌توان آن را در حالت $l = \circ$ با $C\left[\delta(r)/r^۲\right]$ تقریب گرفت. اثر این اختلال را بر حالتهایی که در قسمت (ب) یافتید حساب کنید.

اگر مرکزجرم دستگاه در حال سکون باشد مسئلهٔ دو جسمی به مسئلهٔ یک جسمی تبدیل می‌شود که در آن هامیلتونی با

$$H = \frac{\mathbf{p}^۲}{۲\mu} + \frac{۱}{۲}m\omega^۲ r^۲$$

توصیف می‌شود که در آن μ جرم کاهش‌یافته برابر است با $m/۲$.

(الف) دو ذرّه در حالت $l = \circ$ هستند، یعنی تابع‌موج حالت پایه فقط به r بستگی دارد که تحت تعویض دو ذرّه متقارن است $(r = |\mathbf{r}_۱ - \mathbf{r}_۲|)$. بنابراین الکترونها باید در حالت اسپین یکتایی باشند و تابع‌موج حالت پایه چنین است

$$\psi(\mathbf{r}) = u_\circ(r) X_{\text{یکتایی}}$$

که در آن

$$\begin{aligned} u_\circ(r) &= u_\circ(x)u_\circ(y)u_\circ(z) \\ &= \left(\frac{\mu\omega}{\hbar\pi}\right)^{۳/۴} e^{-\mu\omega r^{۲}/۲\hbar} \end{aligned}$$

در اینجا از $u_\circ(x)$ معادلهٔ (٦—۵۵) متن کتاب استفاده کرده‌ایم.

(ب) حال باید جوابهای نوسانگر هماهنگ سادهٔ سه بعدی را بدانیم. این جوابها را در مسئلهٔ ۱۳ فصل ۸ به‌دست آوردیم. این جوابها شباهت زیادی به جوابهای اتم هیدرژن دارند. در آنها دو عدد کوانتومی n_r و l را داریم. در اینجا $l = \circ$ است و از این رو اوّلین حالت یکتایی برانگیختهٔ متناظر خواهد بود با $n_r = ۱$. در حالت اسپینی سه‌تایی تابع‌موج اسپینی متقارن است و در نتیجه تابع‌موج فضایی باید پادمتقارن باشد که با $l = \circ$ ممکن نیست!

برای به‌دست آوردن تابع‌موج اوّلین حالت یکتایی برانگیخته معادلهٔ $H(\rho)$ را بررسی می‌کنیم که در آن $H(\rho)$ به‌شکل $a + b\rho^{۲}$ است. چون

$$\frac{d^{۲}H}{d\rho^{۲}} + ۲\left(\frac{۱}{\rho} - \rho\right)\frac{dH}{d\rho} + ۴H = \circ$$

داریم

$$H(\rho) = ۱ - \frac{۲}{۳}\rho^{۲}$$

و جواب چنین است

$$u_{۱}(r) = N\left(۱ - \frac{۲}{۳}\rho^{۲}\right)e^{-\rho^{۲}/۲}$$

که در آن $r\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^{۱/۲} = \rho$. از شرط بهنجارش داریم

$$N^{۲}\int_\circ^\infty r^{۲}dr\left(۱ - \frac{۲\mu\omega}{۳\hbar}r^{۲}\right)^{۲} e^{-\mu\omega r^{۲}/\hbar} = ۱$$

بنابراین

$$N^{۲} = \frac{٦}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^{۳/۲}$$

(ج) جابجایی انرژی تا پائینترین مرتبه برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_\circ^\infty r^{۲}dr\left[C\frac{\delta(r)}{r^{۲}}\right]N^{۲}\left(۱ - \frac{۲\mu\omega}{۳\hbar}r^{۲}\right)^{۲} e^{-\mu\omega r^{۲}/\hbar} \\ &= CN^{۲} \end{aligned}$$

۱۵ــ حرکت دورانی مولکولها بر مکان تعادلی هسته‌ها اثر می‌گذارد. اگر $R_\circ$ فاصلهٔ هسته‌ها برای اندازه‌حرکت زاویه‌ای صفر باشد با کمینه کردن عبارت

$$E(R) = \frac{۱}{۲} M_{\text{red}} \omega^۲ (R - R_\circ)^۲ + \frac{\hbar^۲ J(J+۱)}{۲ M_{\text{red}} R^۲}$$

فاصلهٔ جدید بین هسته‌ها را حساب کنید، مشروط بر این که انحراف از $R_\circ$ کوچک باشد. تغییر در طیف مولکول چگونه است؟ (راهنمایی: تغییر در گشتاور لختی را حساب کنید.)

انرژی برابر است با

$$E = \frac{۱}{۲} M_{\text{کاهش‌یافته}} \omega^۲ (R - R_\circ)^۲ + \frac{\hbar^۲ J(J+۱)}{۲ M_{\text{کاهش‌یافته}} R^۲}$$

اگر پتانسیل ارتعاشی را کلاسیکی درنظر بگیریم آنگاه پائینترین حالت انرژی با $R = R_\circ$ متناظر است. حرکت ارتعاشی فاصلهٔ بین هسته‌های مولکول را تغییر می‌دهد. نقطهٔ تعادل جدید را با $R_۱$ نمایش می‌دهیم که جواب معادلهٔ زیر است

$$\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{R_۱} = \circ = M_{\text{کاهش‌یافته}} \omega^۲ (R_۱ - R_\circ) - \frac{\hbar^۲ J(J+۱)}{M_{\text{کاهش‌یافته}} R_۱^۳}$$

فرض می‌کنیم $R_۱ = R_\circ + \Delta$. آنگاه تا مرتبهٔ اوّل در Δ داریم

$$\Delta = \frac{\hbar^۲ J(J+۱)}{M^۲_{\text{کاهش‌یافته}} \omega^۲ R_\circ^۳}$$

حال اگر مقدار جدید $R_۱$ در معادلهٔ انرژی قرار دهیم درمی‌یابیم که فقط انرژی دورانی تغییر می‌کند (چون قسمت ارتعاشی با $\Delta^۲$ متناسب است). اینک انرژی دورانی برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} E_{\text{دورانی}} &= \frac{\hbar^۲ J(J+۱)}{۲ M_{\text{کاهش‌یافته}} R_\circ^۲ (۱ + ۲\Delta/R_\circ)} \\ &= \frac{\hbar^۲ J(J+۱)}{۲ M_{\text{کاهش‌یافته}} R_\circ^۲} - (J(J+۱))^۲ \frac{\hbar^۴}{M^۳_{\text{کاهش‌یافته}} \omega^۲ R_\circ^٦} \end{aligned}$$

علامت جملهٔ دوّم منفی است چون دوران مولکول را می‌کشد و باعث افزایش گشتاور لختی آن می‌شود.

۱٦ــ طول‌موج خط جذبی $J = \circ \to J = ۱$ در مولکول CO برابر است با ۲٫٦۰۳ nm. با استفاده از این طول‌موج گشتاور لختی و فاصلهٔ تعادلی بین هسته‌ای در این مولکول را حساب کنید.

در گذار $J = ۱ \to J = \circ$ داریم

$$\Delta E = \frac{\hbar^{۲}}{۲M_{\text{کاهش‌یافته}}R^{۲}}(۲-۰) = \frac{۲\pi\hbar c}{\lambda}$$

بنابراین

$$R^{۲} = \frac{\hbar\lambda}{۲\pi c}\frac{۱}{M_{\text{کاهش‌یافته}}} = \frac{\hbar\lambda}{۲\pi c}\frac{۱}{M_{\text{نوکلئون}}}\left(\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۶}\right) = \left(۱{,}۱۲۷\times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}\right)^{۲}$$

از این رو فاصلهٔ بین هسته‌ای برابر است با $۰{,}۱۱۳\,\mathrm{nm}$ و گشتاور لختی برابر است با

$$M_{\text{کاهش‌یافته}}R^{۲} = ۱{,}۴۵\times ۱۰^{-۴۶}\,\mathrm{kg\,m^{۲}}$$

۱۷ــ مولکول $H_۲$ را درنظر بگیرید. اسپین دو هستهٔ این مولکول (پروتونها) ۱/۲ است و بنابراین این مولکول می‌تواند در حالت اسپینی کل $S=۰$ یا $S=۱$ باشد.

(الف) به‌ازای هریک از این دو مقدار اسپین کل، اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری این دستگاه دو نوکلئونی در پائینترین حالت انرژی چقدر است؟

(ب) در ان دو مورد طول‌موج تابشی که در گذار ار پائینترین برانگیختگی دورانی گسیل می‌شود چقدر است؟

(الف)دو هسته یکسان هستند. چون حالت دستگاه دو الکترونی حالت اسپین ۰ متقارن فضایی است بنابراین وقتی که دربارهٔ حالتهای پائینترین انرژی مولکول سخن می‌گوییم می‌توان الکترونها را نادیده انگاریم. در حالت پایه دو پروتون در حالت $L=۰$ متقارن خواهند بود و در نتیجه باید در حالت اسپینی پادمتقارن $S=۰$ باشند.

برای حالت اسپینی متقارن $S=۱$ تابع‌موج فضایی باید پادمتقارن باشد و از این رو حالت پائینترین انرژی $L=۱$ خواهد بود.

(ب) برای حالت پائینترین انرژی که بالای حالت پایه $L=۰$ قرار دارد و نیز حالت $S=۰$ است، باید $L=۲$ باشد. بنابراین تغییر انرژی در این گذار برابر است با

$$\Delta E = \frac{\hbar^{۲}}{M_pR^{۲}}[۲(۲+۱)-۰]$$

$$= \frac{۶\hbar^۲}{M_p R^۲}$$
$$= \frac{۲\pi\hbar c}{\lambda_{\text{یکتایی}}}$$

در رابطهٔ بالا جرم کاهش‌یافتهٔ دستگاه دو پروتونی را $M_p/۲$ گرفته‌ایم.
برای دستگاه $S = ۱$ حالت بالای پائینترین حالت $L = ۱$ حالت $L = ۳$ است و در اینجا

$$\Delta E = \frac{\hbar^۲}{M_p R^۲}[۳(۳+۱) - ۱(۱+۱)]$$
$$= \frac{۱۰\hbar^۲}{M_p R^۲}$$
$$= \frac{۲\pi\hbar c}{\lambda_{\text{سه‌تایی}}}$$

هرگاه R را بدانیم می‌توانیم طول‌موجهای یکتایی و سه‌تایی را به‌آسانی حساب کنیم. این دو دقیقاً یکی نیستند.

فصل پانزدهم

نظریهٔ اختلال وابسته به زمان

۱ــ اتم هیدرژنی را در میدان الکتریکی وابسته به زمانی قرار داده‌ایم که در راستای z است و بزرگی آن $E(t)$ با

$$\begin{aligned} E(t) &= \circ \qquad t < \circ \\ &= E_\circ e^{-\gamma t} \quad t > \circ \end{aligned}$$

داده می‌شود. اگر در آغاز این اتم هیدرژن در حالت پایه باشد احتمال این که به‌ازای $t \to \infty$ گذاری به حالت $۲p$ انجام دهد چقدر است؟

با توجه به پتانسیل مختل‌کننده‌ای که مسئله داده است داریم

$$\begin{aligned} C(۱s \to ۲p) &= \frac{eE_\circ}{i\hbar}\langle \phi_{۲۱\circ}|z|\phi_{۱\circ\circ}\rangle \int_\circ^\infty dt\, e^{i\omega t} e^{-\gamma t} \\ &= \frac{eE_\circ}{i\hbar}\langle \phi_{۲۱\circ}|z|\phi_{۱\circ\circ}\rangle \frac{۱}{\gamma - i\omega} \end{aligned}$$

که در آن $\omega = (E_{۲۱} - E_{۱\circ})$. بنابراین مجذور مطلق $C(۱s \to ۲p)$ برابر است با

$$P(۱s \to ۲p) = e^۲ E_\circ^۲ \frac{|\langle \phi_{۲۱\circ}|z|\phi_{۱\circ\circ}\rangle|^۲}{\hbar^۲(\gamma^۲ + \omega^۲)}$$

با استفاده از

$$|\langle \phi_{۲۱\circ}|z|\phi_{۱\circ\circ}\rangle|^۲ = \frac{۲^{۱۵}}{۳^{۱\circ}} a_\circ^۲$$

محاسبهٔ فوق کامل می‌شود.

۲ــ ذرّه‌ای را در چاه پتانسیل بی‌نهایت

$$\begin{aligned} V(x) &= \circ \qquad \circ \le x \le a \\ &= \infty \quad \text{جاهای دیگر} \end{aligned}$$

قرار دارد. پتانسیل در گسترهٔ $\circ \le x \le a$ با جملهٔ اضافی زیر تغییر می‌کند:

$$V_۱(x) = \lambda \left(x - \frac{a}{۲}\right) \sin \omega t$$

(الف) احتمال این که این ذرّه گذاری از حالت پایه $(n = ۱)$ به اوّلین حالت برانگیخته $(n = ۲)$ انجام دهد چقدر است؟

(ب) احتمال این که گذاری به دوّمین حالت برانگیخته ($n = ۳$) انجام دهد چقدر است؟

(ج) اگر $\omega \to ۰$ جوابها چه تغییری می‌کنند؟

(الف) در اینجا باید مجذور مطلق عبارت زیر را حساب کنیم

$$\frac{۱}{i\hbar}\int_{۰}^{T} dt\, e^{i\omega_{۲۱}t}\sin\omega t \times \frac{۲}{a}\lambda\int_{۰}^{a} dx\,\sin\frac{۲\pi x}{a}\left(x-\frac{a}{۲}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$$

نخست انتگرال زمانی را حساب می‌کنیم. فرض می‌کنیم که در لحظهٔ $t = ۰$ دستگاه در حالت پایه است. آنگاه انتگرال زمانی برابر است با

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{\infty} dt\, e^{i\omega_{۲۱}t}\sin\omega t &= \frac{۱}{۲i}\int_{۰}^{\infty} dt\,\left\{e^{i(\omega_{۲۱}+\omega)t} - e^{i(\omega_{۲۱}-\omega)t}\right\}\\ &= \frac{\omega}{\omega^{۲}-\omega_{۲۱}^{۲}}\end{aligned}$$

در اینجا از این واقعیّت استفاده کرده‌ایم که هر تابعی که به سرعت نوسان کند به‌طور متوسط صفر است. در حالت خاصّی که ω با فرکانس گذار برابر است باید این انتگرال را جور دیگری حلّ کرد که در اینجا به‌این مورد خاصّ نمی‌پردازیم.

انتگرال فضایی چنین است

$$\begin{aligned}\frac{۲}{a}\int_{۰}^{a} dx\,\sin\frac{۲\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\left(x-\frac{a}{۲}\right) &= \frac{۱}{a}\int_{۰}^{a} dx\,\left(\cos\frac{\pi x}{a}-\cos\frac{۳\pi x}{a}\right)\left(x-\frac{a}{۲}\right)\\ &= \frac{۱}{a}\int_{۰}^{a} dx\,\left\{\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}-\frac{a}{۳\pi}\sin\frac{۳\pi x}{a}\right)\right.\right.\\ &\qquad \left.\left.\left(x-\frac{a}{۲}\right)\right]-\left(\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}-\frac{a}{۳\pi}\sin\frac{۳\pi x}{a}\right)\right\}\\ &= \frac{۱}{a}\left[\frac{a^{۲}}{\pi^{۲}}\cos\frac{\pi x}{a}-\frac{a^{۲}}{۹\pi^{۲}}\cos\frac{۳\pi x}{a}\right]_{۰}^{a}\\ &= -۲\frac{a}{\pi^{۲}}\frac{۸}{۹}\end{aligned}$$

بنابراین احتمال برابر است با

$$P_{۱۲} = \left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^{۲}\left(\frac{۱۶a}{۹\pi^{۲}}\right)^{۲}\frac{\omega^{۲}}{(\omega_{۱۲}^{۲}-\omega^{۲})^{۲}}$$

(ب) احتمال گذار از حالت $n = ۱$ به حالت $n = ۳$ صفر است زیرا ویژه‌توابع متناظر با n های فرد حول $x = a/۲$ متقارن هستند حال آن که پتانسیل $(x - a/۲)$ حول این محور پادمتقارن است و در نتیجه انتگرال صفر می‌شود. به‌طور کلّی احتمال گذارهای (زوج ← زوج) و (فرد ← فرد) صفر است.

(ج) وقتی که $\omega \to ۰$ احتمال گذار به‌سمت صفر میل می‌کند.

۳ــ محاسبات فوق را با جایگزینی $e^{-t^{۲}/\tau^{۲}}$ به‌جای $\sin\omega t$ تکرار کنید. در قسمت (ج) حدّ $\tau \to \infty$ را درنظر بگیرید. توجه کنید که در هر دو مورد قسمت (ج) نشان می‌دهد برای اختلالی که به‌کُندی تغییر می‌کند گذاری وجود ندارد. مسئلهٔ ٦ را ببینید.

تنها چیزی که تغییر می‌کند مجذور مطلق انتگرال زمانی است. انتگرال زمانی که باید مجذور مطلق آن را حساب کنیم چنین است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega_{۱۲}t} e^{-t^{۲}/\tau^{۲}} = \sqrt{\pi} e^{-\omega^{۲}\tau^{۲}/۴}$$

وقتی که $\tau \to \infty$ این انتگرال صفر می‌شود که حاکی از آن است که آهنگ گذار برای اختلالی که بسیار کُند تغییر می‌کند صفر است.

۴ــ ذرّه‌ای را در حالت n ام نوسانگر هماهنگ یک بعدی درنظر بگیرید که طیف انرژی آن $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{۱}{۲}\right)$ است. فرض کنید که این دستگاه با پتانسیل

$$\begin{aligned} V(t) &= ۰ && t < ۰ \\ &= \lambda x \cos\omega_{۱} t\, e^{-\alpha t} && t > ۰ \end{aligned}$$

مختل شود. احتمال گذار به حالت m را حساب کنید. به‌ازای چه مقادیری از m گذارها مجازند؟ اگر $\omega \to \omega_{۱}$ و/ یا $\alpha \to ۰$ چه ویژگیهای خاصی پیش می‌آید؟ (راهنمایی: برای محاسبهٔ عنصر ماتریسی از روش عملگرهای بالابرنده و پائین‌آورنده استفاده کنید.)

دامنهٔ گذار برابر است با

$$\begin{aligned} C_{n\to m} &= \frac{\lambda}{i\hbar}\left\langle m\left|\sqrt{\frac{\hbar}{۲M\omega}}(A + A^{\dagger})\right|n\right\rangle \int_{۰}^{\infty} dt\, e^{i\omega(m-n)t} e^{-\alpha t}\cos\omega_{۱} t \\ &= -i\lambda\sqrt{\frac{۱}{۲M\hbar\omega}}\left(\sqrt{n}\,\delta_{m,n-۱}\sqrt{n+۱}\,\delta_{m,n+۱}\right)\frac{\alpha - i\omega(m-n)}{(\alpha - i\omega(m-n))^{۲} + \omega_{۱}^{۲}} \end{aligned}$$

(الف) گذارها فقط به‌ازای $m = n \pm ۱$ مجازند.
(ب) با درنظر گرفتن این که $(m-n)^{۲} = ۱$ مجذور مطلق دامنه برابر است با

$$\frac{\lambda^{۲}}{۲M\hbar\omega}\left[n\delta_{m,n+۱}(n+۱)\delta_{m,n+۱}\right]\frac{\alpha^{۲} + \omega^{۲}}{\left(\alpha^{۲} + \omega_{۱}^{۲} - \omega^{۲}\right)^{۲} + ۴\alpha^{۲}\omega^{۲}}$$

وقتی که $\omega \to \omega_{۱}$ چیز خاصّی رخ نمی‌دهد جز این که اگر $\alpha^{۲}$ خیلی کوچک باشد احتمال از یک تجاوز می‌کند که از نظر فیزیکی پذیرفته نیست. چنین امری حاکی از آن است که فرکانس خارجی $\omega_{۱}$ با فرکانس نوسانگر برابر می‌شود وقتی که $\alpha \to ۰$ به‌شرایط تشدید می‌رسیم. در چنین شرایطی نظریهٔ اختلال مرتبهٔ اوّل را نمی‌توان به‌کار برد.

۵– فرض کنید ذرّه‌ای به‌جرم سکون M به دو ذرّه به جرمهای سکون $m_۱$ و $m_۲$ وامی‌پاشد. با استفاده از رابطهٔ نسبیّتی بین انرژی و اندازه‌حرکت چگالیِ حالتهای ρ را در (۱۵–۲۹) حساب کنید.

[راهنمایی: فقط یک اندازه‌حرکت مستقل داریم، مثلاً $\mathbf{p}$ و به رابطهٔ

$$\int \frac{d^۳\mathbf{p}}{(۲\pi\hbar)^۶}\delta\left(E_{\text{اولیه}} - \sum_{\text{حالتهای نهایی}} E\right)$$

نیاز داریم.]

چون دو ذرّه اندازه‌حرکتهای برابر و در خلاف جهت هم دارند داریم

$$E_i = \sqrt{(pc)^۲ + m_i^۲ c^۴}$$

انتگرال چنین است

$$\frac{۱}{(۲\pi\hbar)^۶}\int d\Omega \int_۰^\infty p^۲ dp\, \delta\Big(Mc^۲ - E_۱(p) - E_۲(p)\Big)$$

ما فقط به انتگرال دوّم نیاز داریم. تغییر متغییر می‌دهیم

$$u = E_۱(p) + E_۲(p)$$

آنگاه

$$\begin{aligned} du &= \frac{pc^۲}{E_۱}dp + \frac{pc^۲}{E_۲}dp \\ &= (E_۱ + E_۲)\frac{p\,dp}{E_۱E_۲} \end{aligned}$$

و انتگرال اندازه‌حرکت عبارت است از

$$\begin{aligned} \int_۰^\infty p^۲ dp\, \delta\Big(Mc^۲ - E_۱(p) - E_۲(p)\Big) &= \int_{(m_۱+m_۲)c^۲}^\infty p\,\frac{E_۱E_۲\,du}{uc^۲}\,\delta\Big(Mc^۲ - u\Big) \\ &= p\,\frac{E_۱E_۲}{Mc^۴} \end{aligned}$$

اینک باید p را برحسب جرمها بنویسیم. داریم

$$\begin{aligned} \left(m_۲c^۲\right)^۲ + p^۲c^۲ &= \left(Mc^۲ - \sqrt{\left(m_۱c^۲\right)^۲ + p^۲c^۲}\right)^۲ \\ &= \left(Mc^۲\right)^۲ - ۲Mc^۲E_۱(p) + \left(m_۱c^۲\right)^۲ + p^۲c^۲ \end{aligned}$$

نتیجه چنین است

$$E_۱(p) = \frac{\left(Mc^۲\right)^۲ + \left(m_۱c^۲\right)^۲ - \left(m_۲c^۲\right)^۲}{۲Mc^۲}$$

و نیز

$$E_{۲}(p) = \frac{\left(Mc^{۲}\right)^{۲} + \left(m_{۲}c^{۲}\right)^{۲} - \left(m_{۱}c^{۲}\right)^{۲}}{۲Mc^{۲}}$$

طرفین هر یک از دو رابطهٔ بالا که به توان دو برسانیم می‌توانیم عبارتی برای $p^{۲}$ به‌دست آوریم. نتیجه پس از اندک عملیّات جبری برابر است با

$$p^{۲} = \frac{c^{۲}}{۴M^{۲}}\left(M - m_{۱} - m_{۲}\right)\left(M - m_{۱} + m_{۲}\right)\left(M + m_{۱} - m_{۲}\right)\left(M + m_{۱} + m_{۲}\right)$$

۶– در این مسئله قضیّهٔ آدیاباتیک را شرح می‌دهیم. این قضیّه بیان می‌کند که اگر هامیلتونی به‌آرامی از $H_{\circ}$ به H تغییر کند آنگاه دستگاه بدون این که گذاری انجام دهد از ویژه‌حالت مفروض $H_{\circ}$ به ویژه‌حالت متناظر H می‌رود. مسئله را دقیقتر بیان می‌کنیم. حالت پایه را درنظر بگیرید

$$H_{\circ}\phi_{\circ} = E_{\circ}\phi_{\circ}$$

فرض کنید $V(t) = f(t)V$ که در آن چنانچه نمودار زیر نشان می‌دهد تابع $f(t)$ به‌آرامی تغییر می‌کند.

اگر حالت پایهٔ $H = H_{\circ} + V$ را $|w_{\circ}\rangle$ بگیریم این قضیّه بیان می‌کند که

$$|\langle w_{\circ}|\psi(t)\rangle| \to ۱$$

برای انجام محاسبات باید مراحل زیر را طی کرد:

(الف) نشان دهید که به‌ازای t هایی که $f(t) = ۱$ داریم:

$$\frac{۱}{i\hbar}\int_{\circ}^{t} dt'\, e^{i\left(E_{m}^{(\circ)} - E_{\circ}^{(\circ)}\right)t'/\hbar} f(t') \to \frac{e^{i\left(E_{m}^{(\circ)} - E_{\circ}^{(\circ)}\right)t'/\hbar}}{E_{m}^{(\circ)} - E_{\circ}^{(\circ)}}$$

از رابطهٔ

$$\frac{df(t')}{dt'} \ll \frac{E_{m}^{(\circ)} - E_{\circ}^{(\circ)}}{\hbar} f(t')$$

استفاده کنید. یا مثالی برای تابع $f(t)$ بزنید یا جزبه‌جز انتگرال بگیرید، یعنی در انتگرال بالا بنویسید:

$$e^{i\omega t'} = \frac{۱}{i\omega}\frac{d}{dt'}e^{i\omega t'}$$

(ب) از روابط (۱۵–۳) و (۱۵–۱۰) استفاده کنید و $\psi(t)$ را بیابید. نتیجه را با فرمول (۱۵–۱۱) مقایسه کنید که در اینجا به‌شکل

$$|w_{\circ}\rangle = |\phi_{\circ}\rangle + \sum_{m \neq \circ} \frac{\langle \phi_{m}|V|\phi_{\circ}\rangle}{E_{\circ}^{(\circ)} - E_{m}^{(\circ)}}|\phi_{m}\rangle$$

درمی‌آید و نشان دهید که

$$|\langle w_\circ|\psi(t)\rangle| \to ۱$$

تابع‌موج دستگاهی که دستخوش پتانسیل مختل‌کنندهٔ زیر است

$$\lambda V(t) = Vf(t)$$

که در آن $f(\circ) = \circ$، $\lim_{t\to\infty} f(t) = ۱$، و $df(t)/dt \ll \omega f(t)$ با

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m C_m(t)\, e^{-iE_m^\circ t/\hbar}|\phi_m\rangle$$

توصیف می‌شود و تا مرتبهٔ اوّل در V داریم

$$C_m(t) = \frac{۱}{i\hbar}\int_\circ^t dt'\, e^{i\omega t'} f(t')\langle\phi_m|V|\phi_\circ\rangle$$

که در آن $\omega = (E_m^\circ - E_\circ^\circ)/\hbar$ و در لحظهٔ $t = \circ$ دستگاه در حالت پایه است. انتگرال زمانی برابر است با

$$\int_\circ^t dt'\, e^{i\omega t'} f(t') = \int_\circ^t dt' f(t')\frac{d}{dt'}\frac{e^{i\omega t'}}{i\omega}$$
$$= \frac{۱}{i\omega}\int_\circ^t dt'\frac{d}{dt'}\left(e^{i\omega t'} f(t')\right) - \frac{۱}{i\omega}\int_\circ^t dt' e^{i\omega t'}\frac{df(t')}{dt'}$$

جملهٔ دوّم به‌مراتب کوچکتر از جمله‌ای است که می‌خواهیم حساب کنیم و از این رو فقط جملهٔ اوّل را خواهیم داشت. با استفاده از $f(\circ) = \circ$ آنچه می‌ماند $e^{i\omega t}/i\omega$ است چون در زمانهای طولانی $f(t) = ۱$ و وقتی آن را در عبارت $C_m(t)$ قرار دهیم داریم

$$C_m(t) = -\frac{e^{i\omega t}}{(E_m^\circ - E_\circ^\circ)}\langle\phi_m|V|\phi_\circ\rangle, \quad m \neq \circ$$

حال این عبارت را در رابطهٔ $|\psi(t)\rangle$ قرار می‌دهیم

$$|\psi(t)\rangle = |\phi_\circ\rangle + e^{-iE_\circ^\circ t/\hbar}\sum_{m\neq\circ}\frac{\langle\phi_m|V|\phi_\circ\rangle}{E_\circ^\circ - E_m^\circ}|\phi_n\rangle$$

از سوی دیگر تابع‌موج حالت پایه تا مرتبهٔ اوّل در V برابر است با

$$|w_\circ\rangle = |\phi_\circ\rangle + \sum_{n\neq\circ}\frac{\langle\phi_n|V|\phi_\circ\rangle}{E_\circ^\circ - E_n^\circ}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\langle w_\circ|\psi(t)\rangle = ۱ + e^{-iE_\circ^\circ t/\hbar}\sum_{m\neq\circ}\frac{\langle\phi_\circ|V|\phi_m\rangle\langle\phi_m|V|\phi_\circ\rangle}{(E_\circ^\circ - E_m^\circ)^۲}$$

بنابراین تا مرتبهٔ اوّل در V سمت راست برابر است با ۱. بحث کامل در این باره را در کتاب آشنایی با مکانیک کوانتومی تألیف دیوید گریفیس خواهید یافت.

۷– گاهی هسته‌ها با فرآیند تبدیل داخلی از حالتهای برانگیخته به حالت پایه وامی‌پاشند. تبدیل داخلی فرآیندی است که در آن به‌جای فوتون یکی از الکترونهای $۱s$ گسیل می‌شود. فرض کنید که توابع‌موج هسته‌ای اوّلیه و نهایی

$$\phi_I(\mathbf{r}_۱,\mathbf{r}_۲,\ldots,\mathbf{r}_A) \quad \text{و} \quad \phi_F(\mathbf{r}_۱,\mathbf{r}_۲,\ldots,\mathbf{r}_A)$$

باشند که در آن $\mathbf{r}_i(i=۱,۲,\ldots,Z)$ پروتونها و $\mathbf{r}_{Z+۱},\ldots,\mathbf{r}_A$ نوترونها را توصیف می‌کنند. اختلالی که سبب گذار می‌شود فقط برهمکنش هسته–الکترون

$$V = -\sum_{i=۱}^{Z}\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

است که در آن $\mathbf{r}$ مختص الکترون است. بنابراین عنصر ماتریسی چنین است:

$$-\int d^۳\mathbf{r}\int d^۳\mathbf{r}_۱\cdots d^۳\mathbf{r}_A\phi_F^*\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}}\sum_{i=۱}^{Z}\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\phi_I\psi_{۱\circ\circ}(\mathbf{r})$$

(الف) بزرگی اندازه‌حرکت الکترون آزاد $\mathbf{p}$ چقدر است؟
(ب) آهنگ این فرآیند را با استفاده از بسط

$$\frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\simeq\frac{۱}{r}+\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i}{r^۲}$$

برای گذار دوقطبی برحسب

$$\mathbf{d}=\sum\int d^۳\mathbf{r}_۱\cdots d^۳\mathbf{r}_A\phi_F^*\mathbf{r}_i\phi_I$$

حساب کنید.

(الف) باید المان ماتریسی زیر را حساب کنیم

$$M_{fi} = -\frac{e^۲}{۴\pi\epsilon_\circ}\int d^۳\mathbf{r}_۱\int d^۳\mathbf{r}_۲\ldots\int d^۳\mathbf{r}_A\Phi_f^*(\mathbf{r}_۱,\mathbf{r}_۲,\ldots\mathbf{r}_A)\int d^۳\mathbf{r}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}}$$

$$\sum_{i=۱}^{Z} \frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\psi_{۱۰۰}(\mathbf{r})\Phi_i(\mathbf{r}_۱,\mathbf{r}_۲,\dots\mathbf{r}_A)$$

جمع روی $Z\dots$ $i = ۱,۲,\dots Z$، یعنی فقط روی مختصات پروتونهاست. تابع‌موج الکترون خروجی را موج تخت گرفته‌ایم و Φ ها توابع‌موج هسته‌ای هستند. چون ابعاد هسته‌ای در مقایسه با ابعاد اتمی فوق‌العاده کوچک هستند بنابراین $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_i|$ و می‌نویسیم

$$\frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = \frac{۱}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^۳} + \dots$$

جملهٔ $۱/r$ سهمی ندارد چون $\langle\Phi_f|\Phi_i\rangle = ۰$ یعنی حالتهای اوّلیه و نهایی هسته‌ای متعامدند زیرا انرژیهای متفاوتی دارند. حال تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{d} = \sum_{j=۱}^{Z}\int d^۳\mathbf{r}_۱\int d^۳\mathbf{r}_۲\dots\int d^۳\mathbf{r}_A\Phi_f^*(\mathbf{r}_۱,\mathbf{r}_۲,\dots\mathbf{r}_A)\mathbf{r}_j\Phi_i(\mathbf{r}_۱,\mathbf{r}_۲,\dots\mathbf{r}_A)$$

بنابراین المان ماتریسی برابر می‌شود با

$$M_{fi} = -\frac{e^۲}{۴\pi\epsilon_۰}\int d^۳\mathbf{r}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^۳}\psi_{۱۰۰}(\mathbf{r})$$

اینک تنها کاری که باید بکنیم محاسبهٔ انتگرال بالاست.

توجه کنید که انرژی الکترون آزاد برابر است با

$$\frac{p^۲}{۲m} = \Delta E + |E_{۱۰۰}|$$

که در آن ΔE تغییر انرژی هسته‌ای است. چون انرژیهای هسته‌ای به‌مراتب از انرژیهای اتمی بزرگترند بنابراین برای p از رابطهٔ غیرنسبیّتی آن $p = \sqrt{۲m\Delta E}$ استفاده می‌کنیم. برای محاسبهٔ این انتگرال $\mathbf{p}$ را محور z می‌گیریم و می‌نویسیم $p/\hbar = k$. مختص $\mathbf{r}$ را طبق معمول برحسب زوایای θ و ϕ می‌نویسیم. داریم

$$\int d^۳\mathbf{r}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^۳}\psi_{۱۰۰}(\mathbf{r}) =$$
$$\int d\Omega\int dr\, e^{ikr\cos\theta}\left(d_x\sin\theta\cos\phi + d_y\sin\theta\sin\phi + d_z\cos\theta\right)\frac{۲}{\sqrt{۴\pi}}\left(\frac{Z}{a_۰}\right)^{۳/۲}e^{-Zr/a_۰}$$

انتگرال فضایی برابر است با $\int_۰^{۲\pi}d\phi$ و از این رو دو جملهٔ اوّل یکدیگر را حذف می‌کنند. آنچه می‌ماند چنین است

$$\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_۰}\right)^{۳/۲}۲\pi d_z\int_{-۱}^{۱}d(\cos\theta)\int_۰^{\infty}dr\,\cos\theta\, e^{-ikr\cos\theta}e^{-Zr/a_۰} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} 2\pi(\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{p}})\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{\cos\theta}{(Z/a_0+ik\cos\theta)}$$

این انتگرال، با تغییر متغیر $u=\cos\theta$ به‌شکل زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} du\frac{u}{Z/a_0+iku} &= \int_{-1}^{1} du\frac{(Z/a_0-iku)u}{(Z/a_0)^2+k^2u^2}\\ &= -ik\int_{-1}^{1} du\frac{u^2}{(Z/a_0)^2+k^2u^2}-\frac{i}{k^2}\int_{-k}^{k}\frac{w^2}{(Z/a_0)^2+w^2}\\ &= -\frac{2i}{k^2}\left[k-\frac{a_0}{Z}\arctan\left(\frac{a_0k}{Z}\right)\right]\end{aligned}$$

اینک توجه کنید که

$$\begin{aligned}\frac{ka_0}{Z} &= \frac{k\hbar}{mcZ\alpha}\\ &= \sqrt{\frac{2\Delta E}{Z^2mc^2\alpha^2}}\\ &= \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{\Delta E}{(13.6\,\mathrm{eV})}}\end{aligned}$$

هرگاه Z خیلی بزرگ نباشد آنگاه این ضریب بسیار بزرگ می‌شود چون انرژیهای هسته‌ای در گسترهٔ هزارها میلیونها الکترون ولت هستند. در چنین شرایطی محاسبهٔ انتگرال بالا ساده می‌شود و برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}(2\pi)\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{p}}{p^2}(-2i\hbar)\left[1-\frac{\pi\hbar Z}{2a_0p}\right]$$

(ب) برای محاسبهٔ آهنگ گذار فقط از اوّلین عامل داخل کروشه استفاده می‌کنیم. به مجذور مطلق المان ماتریسی نیاز داریم که برابر است با

$$\left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{V}}\right)^2 16\pi\hbar^2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3\frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{p})^2}{p^4}$$

آهنگ گذار بر هسته برابر است با

$$\begin{aligned}R_{fi} &= \frac{2\pi}{\hbar}\int\frac{d^3\mathbf{p}V}{(2\pi\hbar)^3}\delta\left(\frac{p^2}{2m}-\Delta E\right)|M_{fi}|^2\\ &= \frac{2\pi}{\hbar}\int\frac{d^3\mathbf{p}V}{(2\pi\hbar)^3}\delta\left(\frac{p^2}{2m}-\Delta E\right)\frac{1}{V}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)16\pi\hbar^2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3\frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{p})^2}{p^4}\end{aligned}$$

محاسبهٔ انتگرال زاویه‌ای به نتیجهٔ زیر می‌انجامد

$$\int d\Omega\, (\mathbf{d}\cdot\mathbf{p})^{۲} = \frac{۴\pi}{۳}\,|\mathbf{d}|^{۲} p^{۲}$$

بنابراین آنچه می‌ماند چنین است

$$(\text{ضرایب عددی}) \int dp\, \delta\left(\frac{p^{۲}}{۲m} - \Delta E\right) = \sqrt{\frac{m}{۲\Delta E}}$$

با گرد آوردن آنچه تاکنون به‌دست آمد سرانجام داریم

$$R_{fi} = \frac{۱۶}{۳}(Z\alpha)^{۳}\,\frac{d^{۲}}{a_{\circ}^{۲}}\sqrt{\frac{mc^{۲}}{۲\Delta E}}\,\frac{mc^{۲}}{\hbar}$$

این آهنگ گذار را به‌شکلی نوشته‌ایم که ابعاد آهنگ گذار را نمایان می‌کند.

فصل شانزدهم

نظریهٔ برهمکنش ذرّات باردار با میدان الکترومغناطیسی

۱ــ طیف ذرّه‌ای به‌جرم m در نوسانگر هماهنگ سه بعدی با انرژی پتانسیل $m\omega^{۲}r^{۲}/۲$ چنین است:

$$E = \hbar\omega(۲n_r + l + ۳/۲)$$

که در آن n_r عدد کوانتومی شعاعی $(n_r = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots)$ و l اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری است $(l = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots)$. فرض کنید بار این ذرّه q و نوسانگر هماهنگ در میدان مغناطیسی ضعیف $\mathbf{B}$ قرار گرفته باشد. طیف پائینترین سه حالت انرژی این ذرّه را رسم کنید.

اختلالی که میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد هامیلتونی $H_۰$ نوسانگر هماهنگ ساده را به‌شکل زیر درمی‌آورد

$$H = H_۰ + \frac{q}{۲m}\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}$$

اگر محور z را با میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ تعریف کنیم آنگاه جملهٔ آخر در این هامیلتونی برابر می‌شود با BL_z. اگر عملگر H بر ویژه‌حالتهای نوسانگر $|n_r, l, m_l\rangle$ عمل کند داریم

$$H|n_r, l, m_l\rangle = \left[\hbar\omega\left(۲n_r + l + \frac{۳}{۲}\right) + \frac{qB\hbar}{۲m}m_l\right]|n_r, l, m_l\rangle$$

فرض می‌کنیم $\omega_B = qB/۲m$. پائینترین سه تراز انرژی را درنظر می‌گیریم. تراز $n_r = ۰, l = ۰$ که انرژی آن $۳\hbar\omega/۲$ است. تراز $n_r = ۱, l = ۱$ که ترازی است با تبهگنی سه‌گانه و انرژی مختل نشدهٔ آن $۵\hbar\omega/۲$ به سه تراز ناتبهگن باانرژیهای

$$E = \frac{۵}{۲}\hbar\omega + \hbar\omega_B\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

می‌شکافد. اعداد کوانتومی تراز انرژی بعدی $n_r = ۲, l = ۰$ یا $n_r = ۰, l = ۲$ است. بنابراین تبهگنی این تراز چهارگانه و انرژی آن $۷\hbar\omega/۲$ است. میدان مغناطیسی این ترازها را مطابق با مقدار

m_l شان می‌شکافد. انرژی ترازهای شکافته شده برابرند با

$$E = \frac{۷}{۲}\hbar\omega + \hbar\omega_B \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰, ۰ \\ -۱ \\ -۲ \end{pmatrix}, \quad n_r = ۱, ۰$$

۲– ذره‌ای به جرم M را درنظر بگیرید که به میلهٔ صلب بدون جرم با طول ثابت L متصل شده‌است که انتهای دیگرش در مبدأ ثابت شده‌است. میله حول این نقطهٔ ثابت می‌تواند آزادانه دوران کند.

(الف) استدلال کنید که چرا می‌توان هامیلتونی این دستگاه را به‌شکل

$$H = \frac{\mathbf{L}^۲}{۲I} = \frac{(\mathbf{R}\times\mathbf{p})^۲}{۲I}$$

نوشت که در آن $I = MR^۲$.

(ب) اگر بار ذرّه q باشد و این چرخنده در میدان مغناطیسی ثابت $\mathbf{B}$ قرار گیرد هامیلتونی اصلاح‌یافته چیست؟

(ج) اگر B کوچک باشد طیف انرژی چیست؟

(الف) این دستگاه فقط یک درجهٔ آزادی دارد که همان زاویهٔ دوران θ است. اگر گشتاوری بر این دستگاه وارد نشود آنگاه سرعت زاویه‌ای $\omega = d\theta/dt$ ثابت می‌ماند. انرژی جنبشی برابر است با

$$E = \frac{۱}{۲}Mv^۲ = \frac{۱}{۲}\frac{M^۲v^۲R^۲}{MR^۲} = \frac{۱}{۲}\frac{L^۲}{I}$$

که در آن MvR اندازه‌حرکت زاویه‌ای و I گشتاور لختی است. تعمیم این رابطه به دستگاه کوانتومی ایجاب می‌کند که $\mathbf{L}^۲$ را با عملگر متناظرش جایگزین کنیم

$$H = \frac{\mathbf{L}^۲}{۲I}$$

(ب) عملگر $\mathbf{L}$ را به‌شکل $\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}$ نیز نوشت. وقتی که این دستگاه را در میدان مغناطیسی ثابتی قرار می‌دهیم باید جایگزینی زیر را انجام دهیم

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A} &= \mathbf{p} - q\left(-\frac{۱}{۲}\mathbf{r}\times\mathbf{B}\right)\\ &= \mathbf{p} + \frac{q}{۲}\mathbf{r}\times\mathbf{B}\end{aligned}$$

عملگر $\mathbf{r}$ مکان ذرّه را نسبت به محور نمایش می‌دهد و برابر است با $\mathbf{R}$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{p} \to \mathbf{R} \times \left(\mathbf{p} + \frac{q}{۲}\mathbf{R} \times \mathbf{B}\right) = \mathbf{L} + \frac{q}{۲}\left(\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}) - R^۲\mathbf{B}\right)$$

اگر دو طرف این رابطه را به توان دو برسانیم و فقط جملات خطی نسبت به $\mathbf{B}$ را نگهداریم آنگاه از $\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = ۰$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} H &= \frac{۱}{۲I}\left(\mathbf{L}^۲ - qR^۲\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}\right) \\ &= \frac{\mathbf{L}^۲}{۲I} - \frac{q}{۲M}\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \\ &= \frac{\mathbf{L}^۲}{۲I} - \frac{qB}{۲M} L_z \end{aligned}$$

در رسیدن به آخرین مرحله از این واقعیّت استفاده کرده‌ایم که پیش از این فرض کردیم میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در راستای محور z است. بنابراین ویژه‌مقادیر انرژی برابرند با

$$E = \frac{\hbar^۲ l(l+۱)}{۲I} - \frac{qB\hbar}{۲M} m_l$$

۳– اتم هیدرژنی در میدان مغناطیسی به‌بزرگی $۱۰^۴$ گوس قرار دارد. طول‌موجهای سه خط زیمان در گذار $۳D \to ۲P$ این اتم را حساب کنید.

اگر میدان مغناطیسی نباشد آنگاه فرکانس گذار $n = ۳ \to n = ۲$ از رابطهٔ

$$۲\pi\hbar\nu = \frac{۱}{۲}mc^۲\alpha^۲\left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۹}\right)$$

به‌دست می آید. بنابراین

$$\nu = \frac{mc^۲\alpha^۲}{۴\pi\hbar}\,\frac{۵}{۳۶}$$

خطوط $\Delta m = \pm ۱$ نسبت به خط $\Delta m = ۰$ مختل نشده به بالا (و پائین) جابجا می‌شوند. مقدار این جابجایی که از رابطهٔ

$$h\Delta\nu = \frac{e\hbar B}{۲mc}$$

به‌دست می آید برابر است با

$$\Delta\nu = \frac{eB}{۴\pi mc}$$

به‌ازای $\nu = ۰{,}۴۵۷۲ \times ۱۰^{۱۵}\ \mathrm{Hz}$ و $B = ۱\ \mathrm{T}$ داریم $\Delta\nu = ۱{,}۴۰ \times ۱۰^{۱۰}\ \mathrm{Hz}$. بنابراین فرکانسها برابرند با ν و $\nu(۱ \pm \Delta\nu/\nu)$ و طول‌موجهای متناظر با این فرکانسها برابرند با c/ν و

$(c/\nu)(1 \mp \Delta\nu/\nu)$. درنتیجه به سه خط $\lambda = 655{,}713\,\mathrm{nm}$ می‌رسیم که دو خط دیگر به‌اندازه $0{,}02\,\mathrm{nm}$ به بالا و پائین جابجا شده‌اند.

۴— ذرّهٔ بارداری در میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ و میدان الکتریکی عمود بر آن $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ قرار دارد. این مسئلهٔ ویژه‌مقدار را حل کنید. (راهنمایی: انتخاب درست گاژ مهم است.)

هامیلتونی به‌شکل زیر است

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - q\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}$$

اگر $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ و $\mathbf{B} = (0, 0, B)$، ولی پیمانه را چنان انتخاب کنیم که $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ آنگاه هامیلتونی به‌شکل

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + (p_y - qxB)^2 + p_z^2\right) - qEx \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2qBp_yx + q^2B^2x^2 - 2mqEx\right) \end{aligned}$$

درمی‌آید. حال ویژه‌حالت را ویژه‌حالت همزمان عملگرهای H، p_z (با ویژه‌مقدار صفر)، و p_y (با ویژه‌مقدار $\hbar k$) انتخاب می‌کنیم. آنگاه هامیلتونی چنین می‌شود

$$H = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}\left(qBx - \hbar k - \frac{mE}{B}\right)^2 - \frac{1}{2m}\left(\hbar k + \frac{mE}{B}\right)^2$$

این رابطه همان هامیلتونی نوسانگر هماهنگ جابجاشده‌ای است که به آن نوعی ثابت انرژی افزوده شده است. این هامیلتونی را می‌توانیم به‌شکل زیر بنویسیم

$$H = -\frac{\hbar kE}{B} - \frac{mE^2}{2B^2} + \frac{1}{2}m\left(\frac{q^2B^2}{m^2}\right)\left(x - \frac{\hbar k - mE/B}{qB}\right)$$

بنابراین انرژی برابر است با

$$E = -\frac{\hbar kE}{B} - \frac{mE^2}{2B^2} + \hbar\left(\frac{qB}{m}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

۵— الکترونی را درنظر بگیرید که در ناحیهٔ بین دو استوانه هم محور به‌ترتیب به‌شعاعهای a و b، $(b > a)$، محبوس است. در داخل استوانه‌ای که شعاع آن a است میدان مغناطیسی ثابت B در امتداد محور استوانه برقرار است. میدان در خارج استوانهٔ داخلی صفر است. معادلهٔ شرودینگر را در مختصات استوانه‌ای بنویسید. شرط تعیین ویژه‌مقادیر انرژی را بنویسید. نشان دهید که هرچند تابع‌موج الکترون به ناحیه‌ای مقید است که در آن B صفر می‌شود ولی ویژه‌مقادیر انرژی به‌شار Φ درون استوانهٔ داخلی بستگی دارند. (توجه: برای یافتن جواب صریح این مسئله باید مختصری دربارهٔ توابع بسل بدانید. برای بحث کوتاهی در این‌باره به پیوست ۱۶—ب رجوع کنید.

نخست باید همه چیز را در مختصات استوانه‌ای بنویسیم. چون با استوانهٔ نامحدودی سروکار داریم که محورش را امتداد محور z انتخاب کرده‌ایم بنابراین هیچ چیز به z بستگی نخواهد داشت و فقط با مختصات ρ و φ کار خواهیم داشت. معادلهٔ شرودینگر را فقط باید در گسترهٔ $a \leq \rho \leq b$ بنویسیم. با

$$H = \frac{۱}{۲m_e}\left(\Pi_x^۲ + \Pi_y^۲\right)$$

که در آن

$$\Pi_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + eA_x, \quad \Pi_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + eA_y$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۶—۳۳) متن کتاب و نیز باتوجه به این که در موردی که مطالعه می‌کنیم داریم

$$A_x = -\sin\varphi\, A_\varphi, \quad A_x = \cos\varphi\, A_\varphi, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{۲\pi\rho}$$

که در آن Φ شار مغناطیسی در درون استوانه است، می‌توانیم دو عبارت بالا را در مختصات استوانه‌ای بنویسیم. حال اگر همهٔ آنچه را انجام داده‌ایم گرد آوریم معادلهٔ

$$H\psi(\rho,\varphi) = E\psi(\rho,\varphi)$$

به‌شکل زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m_e}\left(\frac{\partial^۲\psi}{\partial\rho^۲} + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{۱}{\rho^۲}\frac{\partial^۲\psi}{\partial\varphi^۲}\right) - ۲i\hbar e\frac{\Phi}{۲\pi}\frac{۱}{\rho^۲}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{e^۲}{\rho^۲}\left(\frac{\Phi}{۲\pi}\right)^۲\psi = E\psi$$

برای حلّ این معادله از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. از تجربه‌ای که داریم می‌نویسیم

$$\psi(\rho,\varphi) = f(\rho)\, e^{im\varphi}$$

تک مقداری بودن جواب ایجاب می‌کند که $m = ۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \ldots$. با نمادگذاری

$$k^۲ = \frac{۲m_e E}{\hbar^۲}$$

معادلهٔ $f(\rho)$ چنین می‌شود

$$\frac{d^۲f(\rho)}{d\rho^۲} + \frac{۱}{\rho}\frac{df(\rho)}{d\rho} - \left(m + \frac{e\Phi}{۲\pi\hbar}\right)^۲ f(\rho) = -k^۲ f(\rho)$$

اگر فرض کنیم که $z = k\rho$ و $v = m + \dfrac{e\Phi}{۲\pi\hbar}$ آنگاه معادلهٔ فوق به‌شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{d^۲f(z)}{dz^۲} + \frac{۱}{z}\frac{df(z)}{dz} + \left(۱ - \frac{v^۲}{z^۲}\right) f(z) = ۰$$

این معادله معادلهٔ بسل است و عمومیترین جواب آن برابر است با

$$f(\rho) = AJ_v(k\rho) + BN_v(k\rho)$$

اینک اگر شرایط مرزی $f(ka) = f(kb) = 0$ را اعمال کنیم به نتایج زیر می‌رسیم

$$AJ_v(ka) + BN_v(ka) = 0$$

و

$$AJ_v(kb) + BN_v(kb) = 0$$

این دو معادله فقط وقتی برقرارند که داشته باشیم

$$J_v(ka)N_v(kb) - J_v(kb)N_v(ka) = 0$$

این معادله معادلهٔ ویژه‌مقدار است و بدیهی است که جواب k به توابع بسل مرتبهٔ v، یعنی به شار محصور در داخل استوانه بستگی دارد.

فصل هفدهم

واپاشیهای تابش‌زا

۱ — در تجزیهٔ نوری دوترون عنصر ماتریسیی را حساب کنید که فقط شامل اسپین است یعنی عبارت

$$X^*_{\text{یکتایی}} \left[\frac{g_p - g_n}{۲}(\mathbf{S}_p - \mathbf{S}_n)\cdot\mathbf{B}\right] X_{\text{سه‌تایی}}$$

را حساب کنید که در آن

$$X_{\text{یکتایی}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\chi_+^{(p)}\chi_-^{(n)} - \chi_-^{(p)}\chi_+^{(n)}\right)$$

و

$$X_{\text{سه‌تایی}} = \begin{cases} \chi_+^{(p)}\chi_+^{(n)} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\chi_+^{(p)}\chi_-^{(n)} + \chi_-^{(p)}\chi_+^{(n)}\right) \\ \chi_-^{(p)}\chi_-^{(n)} \end{cases}$$

برای $\mathbf{B}$ از $\nabla\times\mathbf{A}$ و (۱۷—۱۹) استفاده کنید.

از معادلهٔ (۱۷—۱۹) متن کتاب شروع می‌کنیم. بردار $\mathbf{k}$ را محور z می‌گیریم، یعنی بردار قطبش که بر بردار $\mathbf{k}$ عمود است به‌شکل کلّی زیر است

$$\varepsilon^{(\lambda)} = \hat{\mathbf{i}}\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\sin\varphi$$

از اینجا داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A} \\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar}{۲\epsilon_\circ\omega V}}\,k\hat{\mathbf{k}}\times(\hat{\mathbf{i}}\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\sin\varphi) \\ &= B_\circ(\hat{\mathbf{j}}\cos\varphi - \hat{\mathbf{i}}\sin\varphi) \end{aligned}$$

عبارت زیر را می‌خواهیم

$$M = B_\circ\frac{g_p - g_n}{۲}\frac{\hbar}{۲}\overline{X}_\circ\left\{\left(\sigma_y^{(p)} - \sigma_y^{(n)}\right)\cos\varphi - \left(\sigma_x^{(p)} - \sigma_x^{(n)}\right)\sin\varphi\right\}X_۱^m$$

عبارتهای عملگری به‌شکل زیرند

$$\sigma_y \cos\varphi - \sigma_x \sin\varphi = \begin{pmatrix} ۰ & -i\cos\varphi \\ i\cos\varphi & ۰ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۰ & \sin\varphi \\ \sin\varphi & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix}$$

محاسبهٔ قسمت "برا" در حاصلضرب داخلی آسان است

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left[\overline{\chi}_+^{(p)}\overline{\chi}_-^{(n)} - \overline{\chi}_-^{(p)}\overline{\chi}_+^{(n)}\right]\left[\begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix}_p - \begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix}_n\right]$$

به کمک

$$\overline{\chi}_+\begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix} = (۱ \quad ۰)\begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix} = (۰ \quad -ie^{-i\varphi}) = -ie^{-i\varphi}\overline{\chi}_-$$

و

$$\overline{\chi}_-\begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix} = (۰ \quad ۱)\begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix} = (ie^{i\varphi} \quad ۰) = ie^{i\varphi}\overline{\chi}_+$$

قسمت "برا" برابر می‌شود با

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left[\overline{\chi}_+^{(p)}\overline{\chi}_-^{(n)} - \overline{\chi}_-^{(p)}\overline{\chi}_+^{(n)}\right]&\left[\begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix}_p - \begin{pmatrix} ۰ & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & ۰ \end{pmatrix}_n\right] \\ &= -\sqrt{۲}\,i\left[e^{-i\varphi}\overline{\chi}_-^{(p)}\overline{\chi}_-^{(n)} + e^{i\varphi}\overline{\chi}_+^{(p)}\overline{\chi}_+^{(n)}\right] \\ &= -\sqrt{۲}\,i\left[e^{-i\varphi}\overline{X}_۱^{-۱} + e^{i\varphi}\overline{X}_۱^{۱}\right]\end{aligned}$$

برای حالت کت می‌توانیم حالت

$$X_{\text{سه‌تایی}} = \alpha X_۱^۱ + \beta X_۱^۰ + \gamma X_۱^{-۱}$$

را انتخاب کنیم و آنگاه المان ماتریسی برابر می‌شود با

$$M = -i\sqrt{۲}B_۰\frac{g_p - g_n}{۲}\frac{\hbar}{۲}\left(e^{i\varphi}\alpha + e^{-i\varphi}\beta\right)$$

۲– با محاسبهٔ جملهٔ بین حالت $Y_{lm}(\theta,\phi)$ و حالت پایهٔ $(l = ۰)$ نشان دهید که جملهٔ اوّل در (۱۷–۳۵) به‌گذارهای $\Delta l = ۲$ منجر می‌شود.

می‌خواهیم بدانیم که به‌ازای چه مقادیری از l و m المان ماتریسی

$$\frac{۱}{۲}\langle l,m|(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + (\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})|۰,۰\rangle$$

صفر نمی‌شود. این رابطه را با استفاده از روشی که در معادلهٔ (۷–۲۲) متن کتاب به‌کار بردیم به‌شکل زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{۲}\frac{im_e}{\hbar}\langle l,m|[H_\circ,\varepsilon\cdot\mathbf{r}](\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})+(\varepsilon\cdot\mathbf{r})[H_\circ,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]|\circ,\circ\rangle\\
&\quad=\frac{im_e}{۲\hbar}\langle l,m|H_\circ(\varepsilon\cdot\mathbf{r})-(\varepsilon\cdot\mathbf{r})H_\circ(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})+(\varepsilon\cdot\mathbf{r})H_\circ(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})-(\varepsilon\cdot\mathbf{r})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})H_\circ|\circ,\circ\rangle\\
&\quad=\frac{im_e}{۲\hbar}\left(E_{l,m}-E_{\circ,\circ}\right)\langle l,m|(\varepsilon\cdot\mathbf{r})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})|\circ,\circ\rangle
\end{aligned}$$

حال $\mathbf{k}$ را محور z می‌گیریم، یعنی $\mathbf{k}=(\circ,\circ,k)$. چون ε بر $\mathbf{k}$ عمود است می‌توانیم آن را $\varepsilon=(\cos\alpha,\sin\alpha,\circ)$ انتخاب کنیم. بنابراین در مختصات قطبی داریم

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\cdot\mathbf{r})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) &= k(\cos\alpha\sin\theta\cos\phi+\sin\alpha\sin\theta\sin\phi)\cos\theta\\
&= k\sin\theta\cos\theta\cos(\phi-\alpha)
\end{aligned}$$

این عبارت ترکیب خطی هماهنگهای کروی $Y_{۲۱}(\theta,\phi)$ و $Y_{۲,-۱}(\theta,\phi)$ است. در نتیجه انتگرال زاویه‌ای به‌شکل $\int d\Omega Y^*_{l,m}Y_{۲,\pm۱}Y_{\circ,\circ}$ است و چون $Y_{\circ,\circ}$ عددی بیش نیست این انتگرال متناسب است با $\delta_{l,۲}$. قاعدهٔ انتخاب $\Delta m=\pm۱$ را نیز داریم که از نتخاب محورهایمان ناشی می‌شود.

۳– گذار از اولیّن حالت برانگیخته به حالت پایه در اتم هیدرژن را درنظر بگیرید. فرض کنید که این حالت برانگیخته قطبیده است، یعنی در حالت $m=۱$ است. در این مورد $d\Gamma$ را حساب کنید.

در گذار مورد نظر قسمت شعاعی آهنگ گذار تغییری نمی‌کند. تنها تغییری که هست به قسمتی از المان ماتریسی مربوط می‌شود که با بستگی فوتون گسیل‌شده در این گذار به قطبش سروکار دارد. برای مثال معادلهٔ (۱۷–۴۴) نشان می‌دهد که $\delta_{m,۱}$ در $\varepsilon_x^۲+\varepsilon_y^۲=۱-\varepsilon_z^۲$ ضرب شده‌است و این ضریب حاوی اطلاعاتی است دربارهٔ جهت اندازه‌حرکت فوتون، هرچند این اطلاعات به‌صراحت در المان ماتریسی مشهود نیست. این گونه عمل می‌کنیم: فرض می‌کنیم جهت قطبش حالت اتمی اوّلیه محور z تعریف می‌کند و جهت اندازه‌حرکت فوتون با رابطهٔ

$$\hat{\mathbf{d}}=\hat{\mathbf{i}}\sin\Theta\cos\Phi+\hat{\mathbf{j}}\sin\Theta\sin\Phi+\hat{\mathbf{k}}\cos\Theta$$

توصیف می‌شود. می‌توانیم دو بردار یکّه انتخاب کنیم که بر این بردار عمود باشند. یکی از این دو بردار یکّه را $\hat{\mathbf{d}}\times\hat{\mathbf{k}}$ انتخاب می‌کنیم که پس از آن که آن را بر زاویهٔ بین این دو بردار، یعنی Θ، تقسیم کنیم نتیجه می‌شود که

$$\hat{\varepsilon}_۱=-\hat{\mathbf{i}}\sin\Phi+\hat{\mathbf{j}}\cos\Phi$$

بردار یکّهٔ دیگر $\hat{\varepsilon}_۲=\hat{\mathbf{d}}\times\hat{\varepsilon}_۱$ (دو بردار عمود بر هم) است که برابر است با

$$\hat{\varepsilon}_۲ = \hat{\mathbf{i}}\cos\Theta\cos\Phi + \hat{\mathbf{j}}\cos\Theta\sin\Phi - \hat{\mathbf{k}}\sin\Theta$$

در دستگاه مختصاتی که بردار $\hat{\mathbf{d}}$ محور z را تعریف کند بردار های $\hat{\varepsilon}_i$ محورهای x و y را نمایش می‌دهند و چون قطبش فوتون باید در این صفحهٔ $x-y$ جدید قرار گیرد می‌بینیم که بردار قطبش به‌شکل

$$\varepsilon = \cos\chi\,\hat{\varepsilon}_۱ + \sin\chi\,\hat{\varepsilon}_۲$$

باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\varepsilon} = -\sin\chi\sin\Theta\\ \varepsilon_x &= \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\varepsilon} = \cos\chi\sin\Phi + \sin\chi\cos\Theta\cos\Phi\\ \varepsilon_y &= \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\varepsilon} = -\cos\chi\cos\Phi + \sin\chi\cos\Theta\sin\Phi\end{aligned}$$

و

$$\varepsilon_x^۲ + \varepsilon_y^۲ = ۱ - \varepsilon_z^۲ = ۱ - \sin^۲\chi\,\sin^۲\Theta$$

سرانجام جواب نهایی برابر است با(با استفاده از معادلهٔ (۱۷ — ۴۴) متن کتاب)

$$d\Gamma = \frac{\alpha}{۲\pi}\frac{\omega^۳}{c^۲}\frac{۲^{۱۵}}{۳^{۱۰}}\left(\frac{۱}{۲}\delta_{m,۱}\right)\left(۱-\sin^۲\chi\,\sin^۲\Theta\right)d(\cos\Theta)d\Phi$$

بستگی به قطبش در جملهٔ $\sin^۲\chi$ تجلّی می‌کند.

۴— آهنگ گذار $۲p \to ۱s$ را برای نوسانگر حساب کنید. در این مورد ویژه‌مقادیر انرژی $E = \hbar\omega\left(n+\frac{۳}{۲}\right)$ و عدد کوانتومی انرژی $n = n_r + l$ که در آن $n_r = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و $l = ۰, ۱, ۲, \ldots$.

پیش از هر چیز باید بدانیم که $۲p \to ۱s$ برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی چه معنایی دارد. اعداد "۲" و "۱" معمولاً به اعداد کوانتومی اصلی اطلاق می‌شود،برای مثال $n = n_r + l + ۱$ در اتم هیدرژن. در اینجا طیف انرژی با $۲n_r + l + ۱$ توصیف می‌شود و همین ترکیب است که ما آن را عدد کوانتومی اصلی می‌نامیم. بنابراین گذار $۲p \to ۱s$ به معنی گذار $(n_r = ۰, l = ۱) \to (n_r = ۰, n_r = ۰)$ در نوسانگر هماهنگ سه بعدی است.

برای حلّ این مسئله باید بدانیم که در انتگرال‌گیری زاویه‌ای که برای گذار $۲p \to ۱s$ انجام دادیم چیزی تغییر نمی‌کند. تنها تغییر در المان ماتریسی حاوی توابع شعاعی است. در اتم هیدرژن انتگرال

$$\int r^۳ R_{۲۱}(r) R_{۱۰}(r)\,dr$$

را با استفاده از توابع شعاعی اتم هیدرژن حساب کردیم. در اینجا نیز همین انتگرال را حساب خواهیم کرد ولی با توابع شعاعی نوسانگر هماهنگ. ویژه‌توابع بهنجا در اینجا برابرند با

$$R_{۱۰}(r) = \frac{۲}{\pi^{۱/۴}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{۳/۲} e^{-m\omega r^{۲}/۲\hbar}$$

و

$$R_{۲۱}(r) = \left(\frac{۸}{۳}\right)^{۱/۲} \frac{۱}{\pi^{۱/۴}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{۵/۲} e^{-m\omega r^{۲}/۲\hbar}$$

این توابع در جواب مسئلهٔ ۱۳ فصل ۸ آمده‌اند. با داشتن این مفروضات محاسبهٔ انتگرالی که المان ماتریسی را به‌دست می‌دهد آسان است. داریم

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{۸}{۳}\right)^{۱/۲} \frac{۲}{\pi^{۱/۲}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{۲} \int_{۰}^{\infty} dr\, r^{۴} e^{-m\omega r^{۲}/\hbar} \\ &= \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱/۲} \frac{۴}{\pi^{۱/۲}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{۲}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{۵/۲} \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} dx\, x^{۳/۲} e^{-x} \\ &= \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱/۲} \frac{۴}{\pi^{۱/۲}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{۲}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{۵/۲} \frac{۱}{۲}\,\frac{۳\pi^{۱/۲}}{۴} \end{aligned}$$

مجذور این عبارت برابر است با $\frac{۳\hbar}{۲m\omega}$ که چنانچه باید بُعد ^{۲}(طول) دارد. برای محاسبه کردن آهنگ واپاشی در نتیجه‌ای که برای اتم هیدرژن به‌دست آوردیم جایگزینی

$$|M_{\text{هیدرژن}}|^{۲} = \frac{۲^{۱۵}}{۳^{۹}} a_{۰}^{۲} \to |M|^{۲} = \frac{۳\hbar}{۲m\omega}$$

را انجام می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} R &= \frac{۴}{۹}\alpha\frac{\omega^{۳}}{c^{۲}}|M|^{۲} \\ &= \frac{۲\alpha}{۳}\left(\frac{\hbar\omega}{mc^{۲}}\right)\omega \end{aligned}$$

فصل نوزدهم

نظریهٔ برخورد

۱ – نشان دهید که برای پتانسیل مرکزی $V(\mathbf{r}) = V(r)$، عنصر ماتریسی M_{fi} در رابطهٔ (۱۹–۷۷) را می‌توان به‌شکل

$$M_{fi} = \frac{1}{V}\frac{4\pi\hbar}{\Delta}\int_0^\infty r dr V(r) \sin r\Delta$$

نوشت. توجه کنید که این عبارت تابع زوجی از Δ است، یعنی تابعی است از

$$\Delta^2 = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)^2/\hbar^2$$

داریم

$$M_{fi} = \frac{1}{V}\int d^3\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{r}\cdot\Delta} V(\mathbf{r})$$

اگر $V(\mathbf{r}) = V(r)$، یعنی پتانسیل مرکزی باشد آنگاه مشروط بر این که بردار Δ محور z را تعریف کند انتگرال زاویه‌ای چنین می‌شود

$$M_{fi} = \frac{1}{V}\int_0^\infty r^2 V(r)\, dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, e^{-ir\Delta\cos\theta}$$

انتگرال زاویه‌ای برابر است با

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, e^{-ir\Delta\cos\theta} &= 2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, e^{-ir\Delta\cos\theta} \\ &= \frac{4\pi}{r\Delta}\sin r\Delta\end{aligned}$$

بنابراین

$$M_{fi} = \frac{1}{V}\frac{4\pi}{\Delta}\int_0^\infty r dr V(r) \sin r\Delta$$

توجه کنید که این عبارت تابع زوجی از Δ است، یعنی تابعی است از $\Delta^2 = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)^2/\hbar^2$.

۲– پتانسیلی به‌شکل

$$V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2}$$

را درنظر بگیرید. با استفاده از تقریب بورن مقطع دیفرانسیلی $d\sigma/d\Omega$ را به‌شکل تابعی از زاویهٔ پراکندگی مرکزجرم θ حساب کنید. نتیجه‌ای را که به‌دست می‌آورید با مقطع دیفرانسیلی پتانسیل یوکاوا

$$V(r) = V_\circ b\frac{e^{-r/b}}{r}$$

[که پیش از این در (۱۹—۸۵) الی (۱۹—۸۹) به‌انجام رسید] مقایسه کنید. برای انجام این مقایسه پارامترهای این دو مورد را چنان تنظیم کنید که دو مقطع دیفرانسیلی و شیب آنها در راستای جلو در $\Delta = \circ$ برابر شوند. بهتر است مقادیر عددی معینی برای V_G، $V_\circ$، a، و b انتخاب کنید تا بتوانید این مقایسه را با نمودار انجام دهید. می‌توانید استدلال کنید که چرا پیشگوئیهای انتقالهای اندازه‌حرکت بزرگ اختلاف زیادی باهم دارند؟

برای پتانسیل گوسی داریم

$$M_{fi} = \frac{۱}{V}\frac{۴\pi V_\circ}{\Delta}\int_\circ^\infty r dr \sin r\Delta\, e^{-r^۲/a^۲}$$

در اینجا انتگرالده تابع زوجی است از r و از این رو آن را به‌شکل زیر می‌نویسیم

$$\int_\circ^\infty r dr \sin r\Delta\, e^{-r^۲/a^۲} = \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^\infty r dr \sin r\Delta\, e^{-r^۲/a^۲}$$

انتگرال سمت راست را چنین می‌نویسیم

$$\frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^\infty r dr \sin r\Delta\, e^{-r^۲/a^۲} = \frac{۱}{۴i}\int_{-\infty}^\infty r dr \left(e^{-r^۲/a^۲+ir\Delta} - e^{-r^۲/a^۲-ir\Delta}\right)$$

حال داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۴i}\int_{-\infty}^\infty r dr\, e^{-r^۲/a^۲+ir\Delta} &= \frac{۱}{i}\frac{\partial}{\partial\Delta}\int_{-\infty}^\infty dr\, e^{-r^۲/a^۲+ir\Delta} \\ &= -i\frac{\partial}{\partial\Delta}a\sqrt{\pi}\, e^{-a^۲\Delta^۲/۴} \\ &= i\,\frac{a^۳\Delta\sqrt{\pi}}{۲}\, e^{-a^۲\Delta^۲/۴}\end{aligned}$$

اگر این جمله را از مزدوج موهومی آن کسر و بر $۴i$ تقسیم کنیم داریم

$$M_{fi} = \frac{۱}{V}(a\sqrt{\pi})^۳ V_\circ\, e^{-a^۲\Delta^۲/۴}$$

همین ماتریس برای پتانسیل یوکاوا به‌شکل زیر است

$$\begin{aligned}\overline{M}_{fi} &= \frac{۱}{V}\frac{۴\pi}{\Delta}V_Y b\int_\circ^\infty dr\, e^{-r/b}\sin r\Delta \\ &= \frac{۱}{V}۴\pi V_Y\frac{b^۳}{۱+b^۲\Delta^۲}\end{aligned}$$

اگر $a = ۲b$ و $V_Y = ۲\sqrt{\pi}V_\circ$، می‌توانیم به آسانی نشان دهیم که این المانهای ماتریسی و مشتقهای آنها نسبت به $\Delta^۲$ در $\Delta = \circ$ با هم برابر می‌شوند.

هرگاه پراکندگی شامل همان ذرّاتی در حالت نهایی باشد که در حالت اوّلیه بود مقطع دیفرانسیلی پراکندگی ساده‌ترین شکل خود را خواهد داشت. مقطع دیفرانسیلی برابر است با

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^۲}{۴\pi^۲\hbar^۴}|U(\Delta)|^۲$$

که در آن μ جرم کاهش‌یافته و $U(\Delta) = VM_{fi}$ است.

ما به مقایسهٔ دو مقطع دیفرانسیلی پراکندگی علاقه‌مندیم

$$\begin{aligned}\frac{(d\sigma/d\Omega)_{\text{گوس}}}{(d\sigma/d\Omega)_{\text{یوکاوا}}} &= \frac{e^{-۲b^۲\Delta^۲}}{(۱+b^۲\Delta^۲)^{-۲}}\\ &= (۱+X)^۲e^{-۲X}\end{aligned}$$

که در آن از نماد $X = b^۲\Delta^۲$ استفاده کرده‌ایم. این نسبت به‌شکل تابعی از X از مقدار اوّلیه‌اش ۱ در $X = \circ$ با شیب صفر شروع می‌کند و به‌سرعت افت می‌کند و وقتی که $X = ۴$، یعنی در $\Delta = ۲/b$، به‌کمتر از یک درصد مقدار اوّلیه خود می‌رسد.

۳– پتانسیل

$$V(r) = V_\circ a\frac{e^{-r/a}}{r}$$

را درنظر بگیرید. اگر بزرگی پارامتر برد $a = ۱٫۲\ \text{fm} = ۱٫۲ \times ۱\circ^{-۱۵}\ \text{m}$ و $V_\circ = ۱\circ\circ\ \text{MeV}$ باشد مقطع کل که در تقریب بورن برای پراکندگی پروتون–پروتون در انرژی مرکز جرم $۱\circ\circ$ MeV محاسبه شود چقدر است؟ از پراکندگی کولنی صرفنظر کنید ولی دو پروتون را یکسان بگیرید. توجه: بهتر است از رابطهٔ

$$\hbar^۲\Delta^۲ = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)^۲ = ۲p^۲(۱-\cos\theta)$$

استفاده کنید و بنویسید:

$$d\Omega = ۲\pi d(\cos\theta) = \frac{\hbar^۲\pi}{p^۲}d(\Delta^۲)$$

از راهنمایی مسئله استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{p^۲}{\pi\hbar^۲}\frac{d\sigma}{d\Delta^۲}\\ &= \frac{\mu^۲}{۴\pi^۲\hbar^۴}\left|۴\pi V_\circ\frac{b^۳}{۱+b^۲\Delta^۲}\right|^۲\end{aligned}$$

اگر از این عبارت روی $\Delta^{۲}$ در گسترهٔ $\circ \leq \Delta^{۲} \leq p^{۲}\hbar^{۲}$ که با گسترهٔ $-۱ \leq \cos\theta \leq ۱$ متناظر است انتگرال بگیریم مقطع کلّ را به‌دست می‌آوریم. انتگرال را می‌توان تحلیلی حساب کرد. این انتگرال با نمادگذاری $k^{۲} = p^{۲}\hbar^{۲}$ چنین می‌شود

$$\int_{\circ}^{۴k^{۲}} d\Delta^{۲}\frac{۱}{(۱+b^{۲}\Delta^{۲})^{۲}} = \frac{۱}{b^{۲}}\int_{\circ}^{۴k^{۲}b^{۲}}\frac{dx}{(۱+x)^{۲}} = \frac{۴k^{۲}}{۱+۴k^{۲}b^{۲}}$$

اگر ذرّات یکسان نباشند این عبارت به مقطع کلّ را به‌دست می‌دهد. برای ذرّات یکسان مشکلات تقارن پیش می‌آید که به اصلِ طرد پائولی و این که پروتونها اسپین ۱/۲ دارند مربوط می‌شود. المانهای ماتریسی از اسپین متاثر نمی‌شوند زیرا جفت شدگی اسپین—مدار یا هیچ گونه بستگی به اسپین در پتانسیل درکار نیست. باوجوداین در حالت اسپین سه‌تایی تابع‌موج فضایی پادمتقارن است حال آن که تابع‌موج فضایی حالت اسپین یکتایی متقارن است و در نتیجه در تقریب بورن خواهیم داشت

$$\int d^{۳}\mathbf{r}\frac{e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \mp e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{۲}}V(r)\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mp e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{۲}} = \int d^{۳}\mathbf{r}V(r)e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \mp \int d^{۳}\mathbf{r}V(r)e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}$$

جملهٔ اوّل شکل آشنایی دارد

$$۴\pi V_{\circ}\frac{b^{۳}}{۱+b^{۲}\Delta^{۲}} = ۴\pi V_{\circ}\frac{b^{۳}}{۱+۲b^{۲}k^{۲}(۱-\cos\theta)}$$

و جملهٔ دوّم از تغییر $\cos\theta$ به $-\cos\theta$ در جملهٔ اوّل به‌دست می‌آید. بنابراین مقطع پراکندگی شامل

$$\int_{-۱}^{۱}\left(\frac{۱}{۱+۲b^{۲}k^{۲}-۲b^{۲}k^{۲}\cos\theta} \mp \frac{۱}{۱+۲b^{۲}k^{۲}+۲b^{۲}k^{۲}\cos\theta}\right)^{۲}$$
$$\to \int_{-۱}^{۱}\left(\frac{۱}{۱+a-az} \mp \frac{۱}{۱+a+az}\right)^{۲} = \frac{۴}{۱+۲a} \mp \frac{۲}{a(۱+a)}\ln(۱+۲a)$$

خواهد بود که در آن $a = ۲b^{۲}k^{۲}$. بنابراین مقطع کلّ برابر است با

$$\sigma = \frac{۸\pi\mu^{۲}b^{۶}}{\hbar^{۴}}V_{\circ}^{۲}\left[\frac{۴}{۱+۴k^{۲}b^{۲}} \mp \frac{۱}{k^{۲}b^{۲}(۱+۲k^{۲}b^{۲})}\ln\left(۱+۴k^{۲}b^{۲}\right)\right]$$

رابطه با انرژی مرکزجرم از $E = p^{۲}/۲\mu = \hbar^{۲}k^{۲}/۲\mu$ به‌دست می‌آید و داریم

$$k^{۲} = \frac{۲\mu E}{\hbar^{۲}}$$
$$= \frac{(۱٫۶۷\times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg})(۱۰۰\times ۱٫۶\times ۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{J})}{(۱٫۰۵۴\times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J.s})^{۲}}$$

با $b = ۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{m}$ داریم $k^۲b^۲ = ۳٫۵$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} \sigma &= ۴٫۳ \times ۱۰^{-۲۸}\,\mathrm{m}^۲ \\ &= ۴٫۳ \times ۱۰^{-۲۴}\,\mathrm{cm}^۲ \\ &= ۳٫۴\,\mathrm{barns} \end{aligned}$$

۴– فرض کنید که دامنهٔ پراکندگی در پراکندگی نوترون–پروتون به‌شکل

$$f(\theta) = \xi_f^\dagger (A + B\sigma_P \cdot \sigma_N)\xi_i$$

است که در آن ξ_i و ξ_f حالتهای اسپینی اولیّه و نهایی دستگاه نوترون–پروتون هستند. حالتهای ممکن عبارت‌انداز

$$\begin{array}{ll} \xi_i = \chi_\uparrow^{(P)}\chi_\uparrow^{(N)} & \xi_f = \chi_\uparrow^{(P)}\chi_\uparrow^{(N)} \\ \quad\;\; \chi_\uparrow^{(P)}\chi_\downarrow^{(N)} & \quad\;\; \chi_\uparrow^{(P)}\chi_\downarrow^{(N)} \\ \quad\;\; \chi_\downarrow^{(P)}\chi_\uparrow^{(N)} & \quad\;\; \chi_\downarrow^{(P)}\chi_\uparrow^{(N)} \\ \quad\;\; \chi_\downarrow^{(P)}\chi_\downarrow^{(N)} & \quad\;\; \chi_\downarrow^{(P)}\chi_\downarrow^{(N)} \end{array}$$

با استفاده از تساوی

$$\sigma_P \cdot \sigma_N = \sigma_z^{(P)}\sigma_z^{(N)} + ۲\left(\sigma_+^{(P)}\sigma_-^{(N)} + \sigma_-^{(P)}\sigma_+^{(N)}\right)$$

هر شانزده دامنهٔ پراکندگی را حساب کنید. در تساوی بالا در نمایشی که در آن

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

و

$$\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad \chi_\downarrow = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

هستند داریم:

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{۲} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \qquad \sigma_- = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{۲} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

از نتایج خود جدول بسازید و مقاطع را نیز در این جدول بیاورید.

برای ساختن جدول پیش از هرچیز نمادگذاری را عوض می‌کنیم. اسپینورهای پروتون را با $\chi_\pm$ و اسپینورهای نوترون را با $\eta_\pm$ نمایش می‌دهیم. برای این که عمل عملگر

$$\sigma_p \cdot \sigma_n = \sigma_{pz}\sigma_{nz} + ۲\left(\sigma_{p+}\sigma_{n-} + \sigma_{p-}\sigma_{n+}\right)$$

را بر چهار ترکیب اوّلیه حساب کنیم از $\sigma_-\chi_- = \circ$، $\sigma_+\chi_+ = \chi_+$ و $\sigma_+\chi_- = \chi_-$ و $\sigma_-\chi_+ = \chi_-$ و همین‌طور برای اسپنورهای نوترون استفاده خواهیم کرد. داریم

$$\begin{aligned}
\left[\sigma_{pz}\sigma_{nz} + ۲\left(\sigma_{p+}\sigma_{n-} + \sigma_{p-}\sigma_{n+}\right)\right]\chi_+\eta_+ &= \chi_+\eta_+ \\
\left[\sigma_{pz}\sigma_{nz} + ۲\left(\sigma_{p+}\sigma_{n-} + \sigma_{p-}\sigma_{n+}\right)\right]\chi_+\eta_- &= -\chi_+\eta_- + ۲\chi_-\eta_+ \\
\left[\sigma_{pz}\sigma_{nz} + ۲\left(\sigma_{p+}\sigma_{n-} + \sigma_{p-}\sigma_{n+}\right)\right]\chi_-\eta_+ &= -\chi_-\eta_+ + ۲\chi_+\eta_- \\
\left[\sigma_{pz}\sigma_{nz} + ۲\left(\sigma_{p+}\sigma_{n-} + \sigma_{p-}\sigma_{n+}\right)\right]\chi_-\eta_- &= \chi_-\eta_-
\end{aligned}$$

از اینجا می‌توانیم ماتریس $A + B\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n$ را بسازیم. سطرها و ستونهای این ماتریس را با $(++)$، $(+-)$، $(-+)$، و $(--)$ نمایش می‌دهیم و داریم

$$A + B\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n = \begin{pmatrix} A+B & \circ & \circ & \circ \\ \circ & A-B & ۲B & \circ \\ \circ & ۲B & A-B & \circ \\ \circ & \circ & \circ & A+B \end{pmatrix}$$

مقطعها ماتریسهای مشابهی خواهند بود که در آنها دامنه‌ها با مجذور مطلقشان $|A+B|^۲$، $|۲B|^۲$، و $|A-B|^۲$ جایگزین شده‌اند.

۵– اگر هریک از حالتهای اسپینی اندازه‌گیری نشده‌باشد (مثلاً پروتون اولیّه یا نوترون اولیّه) آنگا مقطع مجموع حالتهای اسپینی اندازه‌گیری نشده خواهدبود. فرض کنید اسپینهای پروتون اولیّه و نهایی هر دو اندازه‌گیری نشده‌باشند. اگر حالت اسپینی نوترون اولیّه "بالا" باشد عبارتهایی برای مقاطع نوترون نهایی "بالا" و نوترون نهایی "پائین" بنویسید. قطبش P که با رابطهٔ

$$P = \frac{\sigma\uparrow - \sigma\downarrow}{\sigma\uparrow + \sigma\downarrow}$$

تعریف می‌شود چقدر است که در آن $\sigma\uparrow$ مقطع نوترون نهایی "بالا" و الاآخر است؟

بار دیگر پراکندگی $n-p$ را درنظر بگیرید. اگر اسپین اوّلیهٔ پروتون مشخص نشده‌باشد آنگاه باید مقاطع همهٔ حالتهای ممکن اوّلیهٔ پروتون را با هم جمع و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم زیرا از پیش هیچ دلیلی وجود ندارد که در حالت اوّلیه تعداد پروتونهای اسپین بالا کمتر باشد یا بیشتر. باید روی حالتهای نهایی نیز جمع ببندیم. توجه کنید که دامنه‌ها را جمع نمی‌بندیم زیرا حالتهای اسپین پروتون تمیزپذیرند. بنابراین برای اسپین نوترون بالای اوّلیه و اسپین بالای نوترون نهایی داریم

$$\sigma(+|+) = \frac{۱}{۲}\left(\sigma(++,++) + \sigma(++,-+) + \sigma(-+,++) + \sigma(-+,-+)\right)$$

که در آن در سمت راست اوّلین برچسب هر طرف به پروتون و دوّمین برچسب به نوترون اشاره دارد. از این رو داریم

$$\begin{aligned}
\sigma(+|+) &= \frac{۱}{۲}\left(|A+B|^۲ + |A-B|^۲\right) \\
&= |A|^۲ + |B|^۲
\end{aligned}$$

و نیز

$$\begin{aligned}\sigma(-|+) &= \frac{۱}{۲}(\sigma(+-,++)+\sigma(+-,-+)+\sigma(--,++)+\sigma(--,-+))\\ &= \frac{۱}{۲}(|۲B|^{۲})\\ &= ۲|B|^{۲}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}P &= \frac{|A|^{۲}+|B|^{۲}-۲|B|^{۲}}{|A|^{۲}+|B|^{۲}+۲|B|^{۲}}\\ &= \frac{|A|^{۲}-|B|^{۲}}{|A|^{۲}+۳|B|^{۲}}\end{aligned}$$

٦- با استفاده از جدولی که در مسئلهٔ ۴ ساخته‌اید مقطع پراکندگی سه‌تایی ← سه‌تایی و یکتایی ← یکتایی را حساب کنید. نشان دهید پراکندگی سه‌تایی ← یکتایی حذف می‌شود. نتایج خود را با مشاهدهٔ این که چون (برحسب آحاد $\hbar$)

$$\frac{۱}{۲}\sigma_P+\frac{۱}{۲}\sigma_N=\mathbf{S}$$

داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_P\cdot\sigma_N &= ۲\mathbf{S}^{۲}-۳\\ &= ۱ \quad \text{اگر بر حالت سه‌تایی عمل کند}\\ &= -۳ \quad \text{اگر بر حالت یکتایی عمل کند}\end{aligned}$$

بیازمایید. توجه کنید که دامنهٔ پراکندگی از m_S مستقل است و ازاین‌رو m_S در حالتهای اسپینی اولیّه و نهایی یکسان است. در سه‌تایی سه حالت وجود دارد که همه به‌یک اندازه در مقطع سه‌تایی سهم دارند ولی در مقطع یکتایی این سه فقط یک سهم دارند. [احتیاط: در محاسبه دامنه‌هایی چون

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\chi_\uparrow^{(P)}\chi_\downarrow^{(N)}-\chi_\downarrow^{(P)}\chi_\uparrow^{(N)}\right)(A+B\sigma_P\cdot\sigma_N)\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\chi_\uparrow^{(P)}\chi_\downarrow^{(N)}-\chi_\downarrow^{(P)}\chi_\uparrow^{(N)}\right)$$

دامنه‌های چهار عبارت پیش‌ازاین‌که مجذور شوند باهم جمع می‌شوند. می‌توانید توضیح دهید چرا؟]

در پراکندگی سه‌تایی ← سه‌تایی داریم (با نمادگذاری $(\mathbf{S},S_z)$)

$$\begin{aligned}&(۱,۱)\to(۱,۱) \qquad \langle\chi_+\eta_+|\chi_+\eta_+\rangle = A+B\\ &(۱,-۱)\to(۱,-۱) \qquad \langle\chi_-\eta_-|\chi_-\eta_-\rangle = A+B\\ &(۱,۰)\to(۱,۰) \qquad \left\langle\frac{\chi_+\eta_-+\chi_-\eta_+}{\sqrt{۲}}\middle|\frac{\chi_+\eta_-+\chi_-\eta_+}{\sqrt{۲}}\right\rangle\\ &\qquad = \frac{۱}{۲}(A-B+۲B+۲B+A-B)\\ &\qquad = A+B\end{aligned}$$

$$(\circ,\circ)\rightarrow(\circ,\circ)\quad \left\langle \frac{\chi_+\eta_- - \chi_-\eta_+}{\sqrt{۲}} \middle| \frac{\chi_+\eta_- - \chi_-\eta_+}{\sqrt{۲}} \right\rangle$$

$$= \frac{۱}{۲}(A-B-۲B-۲B+A-B)$$

$$= A-۳B$$

$$(\circ,\circ)\rightarrow(۱,\circ)\quad \left\langle \frac{\chi_+\eta_- - \chi_-\eta_+}{\sqrt{۲}} \middle| \frac{\chi_+\eta_- + \chi_-\eta_+}{\sqrt{۲}} \right\rangle$$

$$= \frac{۱}{۲}(A-B+۲B-۲B-A+B)$$

$$= \circ$$

درستی روابط بالا را می‌توانیم با توجه به (برحسب واحدهای $\hbar$)

$$A+B\boldsymbol{\sigma}_p\cdot\boldsymbol{\sigma}_n = A+۴B\mathbf{s}_p\cdot\mathbf{s}_n$$

$$= A+۲B(\mathbf{S}^۲-\mathbf{s}_p^۲-\mathbf{s}_n^۲)$$

$$= A+۲B\left[S(S+۱)-\frac{۳}{۲}\right]$$

بیازماییم. این کمیّت به‌ازای $S=۱$ برابر است با $A+B$ و به‌ازای $S=\circ$ برابر است با $A-B$ و چون براثر تعامد حالتهای سه‌تایی با یکتایی داریم $\langle S=۱|\mathbf{S}^۲-۳/۲|S=\circ\rangle=\circ$ آنگاه همان نتیجهٔ بالا را به‌دست می‌آوریم.

۷– انتگرال

$$I(kr)=\int_\circ^\pi d\theta\sin\theta g(\cos\theta)e^{-ikr\cos\theta}=\int_{-۱}^{۱}dug(u)e^{-ikru}$$

را درنظر بگیرید که در آن $g(\cos\theta)$ حول $\theta=\theta_\circ$ جایگزیده است و بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است. مثالی از این‌گونه تابع

$$g=e^{-\alpha^۲(\cos\theta-\cos\theta_\circ)^۲}$$

است که در آن α بزرگ است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $g(u)$ و همهٔ مشتقهای آن در $u=\pm۱$ صفر می‌شوند. در چنین موردی نشان دهید که اگر $kr\rightarrow\infty$ آنگاه $I(kr)$ سریعتر از هر توانی از kr صفر می‌شود. راهنمایی: بنویسید $e^{-ikru}=i/kr\,d/du\,e^{-ikru}$ و به‌روش جزبه‌جز پشت‌سرهم انتگرال بگیرید.

با $x=kr$ و $\cos\theta=u$ داریم

$$I(x)=\int_{-۱}^{۱}du\,g(u)\,e^{-iux}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-۱}^{۱} du\, g(u)\, \frac{i}{x}\frac{d}{dx}\, e^{-iux} \\
&= \frac{i}{x}\int_{-۱}^{۱} du\, \frac{d}{du}\left(g(u)e^{-iux}\right) - \frac{i}{x}\int_{-۱}^{۱} du \left(\frac{dg}{du}\right) e^{-iux}
\end{aligned}
$$

جملهٔ اوّل صفر می‌شود چون $g(\pm ۱) = ۰$. یکبار دیگر اقدام می‌کنیم و با توجه به این که مشتق $g(u)$ نیز در $u = \pm ۱$ صفر می‌شود داریم

$$
I(x) = \left(\frac{-i}{x}\right)^{۲} \int_{-۱}^{۱} du \left(\frac{d^{۲} g}{du^{۲}}\right) e^{-iux}
$$

و الی آخر. همیشه می‌توانیم به ورای هر توان از پیش تعیین شده‌ای برای $۱/x$ برویم به‌طوری که $I(x)$ سریعتر از هر توانی از $۱/x$ به‌سمت صفر میل کند.

۸– مقطع فرآیند

$$
\gamma + \text{دوترون} \to N + P
$$

را حساب کنید. در اینجا مثل مورد اثر فوتوالکتریک عمل کنید. در محاسبهٔ عنصر ماتریسی تابع‌موج حالت نهایی بازهم

$$
\psi_f(\mathbf{r}) = \frac{۱}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}
$$

است که در آن $\mathbf{p}$ اندازه‌حرکت پروتون است. در انرژیهای کم طول‌موج تابش به‌مراتب از ”اندازهٔ“ دوترون بزرگتر است و در نتیجه $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx ۱$. برای محاسبهٔ

$$
\int d^{۳}r\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \psi_i(r)
$$

از تابع‌موج

$$
\begin{aligned}
\psi_i(\mathbf{r}) &= \frac{N}{\sqrt{۴\pi}} e^{-\alpha(r-r_{\circ})} & r > r_{\circ} \\
&= ۰ & r < r_{\circ}
\end{aligned}
$$

استفاده کنید که درست بهنجار شده‌باشد. به‌ازای چه انرژیهایی انتظار دارید طول‌موج فوتون از برد پتانسیل $r_{\circ} \cong ۱٫۲$ fm به‌مراتب بزرگتر باشد.

مانند مورد اثر فوتوالکتریک عمل می‌کنیم. در آنجا آهنگ که با معادلهٔ (۹–۱۱۱) توصیف شد چنین است

$$
R = \frac{۲\pi V}{\hbar} \int d\Omega \frac{m p_e}{(۲\pi\hbar)^{۳}} |M_{fi}|^{۲}
$$

که در آن m جرم الکترون و p_e اندازه‌حرکت الکترون خروجی است. ضریبی که از حاصلضرب این دو به‌وجود آمده‌است از انتگرال فضای فاز است

$$\int dp\,p^{۲}\delta\left(\frac{p^{۲}}{۲m}-E_\gamma\right) = \int d\left(\frac{p^{۲}}{۲m}\right)mp\delta\left(\frac{p^{۲}}{۲m}-E_\gamma\right)$$
$$= mp_e$$

که در آن p_e را چنانچه تابع دلتایی نشان می‌دهد انرژی فوتون تعیین می‌کند. در فرآیند تجزیهٔ نوری دوترون پایستگی انرژی در $\delta\left(p^{۲}/M-E_\gamma-E_B\right)$ تجلی یافته است. این تابع دلتایی از دو جنبه با تابع دلتایی قبلی فرق دارد. یکی این که مقدار E_B از انرژی فوتون به دوترون داده می‌شود و دوّم این که در حالت نهایی دو ذرّه با جرمهای یکسان با اندازه‌حرکتهای برابر p در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند و از این رو جرم کاهش‌یافته $(M/۲ =)$ پدیدار می‌شود. بنابراین ضریب mp_e را با $Mp/۲$ جایگزین خواهیم کرد که در آن اندازه‌حرکت ذرّه را تابع دلتایی تعیین می‌کند.

اینک المان ماتریسی را بررسی می‌کنیم. حالت نهایی با معادلهٔ (۱۹ــ ۱۱۴) توصیف می‌شود که در آن p_e با p تابع‌موج هیدرژن‌گونه با تابع‌موج حالت پایهٔ دوترون جایگزین شده‌است. داریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{۲\pi}{\hbar}\frac{\left(V\dfrac{Mp}{۲}\right)}{(۲\pi\hbar)^{۲}}\frac{V}{c}\left(\frac{e}{M}\right)^{۲}\frac{\hbar}{۲\varepsilon_\circ\omega V}(\varepsilon\cdot\mathbf{p})^{۲}\left|\int d^{۳}\mathbf{r}\,e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p}/\hbar)\cdot\mathbf{r}}\psi_d(\mathbf{r})\right|^{۲}$$

باید بزرگی ضریب $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ را پیدا کنیم. انتگرال روی تابع‌موج دوترون است. اگر تابع‌موج حالت پایه مانند $e^{-\alpha r}$ رفتار کند آنگاه توزیع احتمال مانند $e^{-۲\alpha r}$ رفتار خواهد کرد و ما می‌توانیم "اندازهٔ" دوترون را با $۱/۲\alpha$ تقریب بگیریم. توجه کنید که $\alpha^{۲}=ME_B/\hbar^{۲}$. عدد موج k_γ با رابطهٔ

$$k_\gamma=\frac{p_\gamma}{\hbar}=\frac{E_\gamma}{\hbar c}$$

با $E_B=۲{,}۲\,\text{MeV}$ و $E_\gamma=۱۰\,\text{MeV}$ داریم $k/۲\alpha=۰{,}۱۱$، یعنی می‌توانیم ضریب نوسانی را نادیده بگیریم. بنابراین در المان ماتریسی فقط $\int d^{۳}\mathbf{r}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\psi_d(\mathbf{r})$ می‌ماند که باید آن را پیدا کنیم.

تابع‌موجی که باید به‌کاربریم چنین است

$$\psi_d(r)=\frac{N}{\sqrt{۴\pi}}\frac{e^{-\alpha(r-r_\circ)}}{r},\quad r>r_\circ$$

ثابت N از شرط بهنجارش به‌دست می‌آید

$$\frac{N^{۲}}{۴\pi}\int_{r_\circ}^{\infty}۴\pi r^{۲}dr\frac{e^{-۲\alpha(r-r_\circ)}}{r^{۲}}=۱$$

بنابراین

$$N^{۲}=۲\alpha$$

المان ماتریسی شامل عبارت زیر است

$$\frac{N}{\sqrt{۴\pi}}\frac{۴\pi}{k}\int_{r_\circ}^{\infty} rdr\sin kr\,\frac{e^{-\alpha(r-r_\circ)}}{r} = \frac{N\sqrt{۴\pi}}{k}\int_\circ^{\infty} dx\sin k(x+r_\circ)e^{-\alpha x}$$
$$= \frac{N\sqrt{۴\pi}}{k}\int_\circ^{\infty} dx\left(\sin kr_\circ \mathrm{Re}\left(e^{-x(\alpha-ik)}\right)\right.$$
$$\left.+\cos kr_\circ \mathrm{Re}\left(e^{-x(\alpha-ik)}\right)\right)$$
$$= \frac{N\sqrt{۴\pi}}{k}\left(\frac{\alpha}{\alpha^۲+k^۲}\sin kr_\circ + \frac{k}{\alpha^۲+k^۲}\cos kr_\circ\right)$$

مجذور این عبارت برابر است با

$$\frac{۴\pi N^۲}{k^۲}r_\circ^۲\left[\frac{\alpha r_\circ}{\alpha^۲r_\circ^۲+k^۲r_\circ^۲}\sin kr_\circ + \frac{kr_\circ}{\alpha^۲r_\circ^۲+k^۲r_\circ^۲}\cos kr_\circ\right]^۲$$

سرانجام داریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = ۲\left(\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ\hbar c}\right)\frac{pr_\circ}{M\omega}(\alpha r_\circ)\left[\frac{\alpha r_\circ}{\alpha^۲r_\circ^۲+k^۲r_\circ^۲}\sin kr_\circ + \frac{kr_\circ}{\alpha^۲r_\circ^۲+k^۲r_\circ^۲}\cos kr_\circ\right]^۲$$

می‌توانیم به‌آسانی ثابت کنیم که بُعد این عبارت طول است. برای محاسبات عددی داریم $\alpha r_\circ = ۰٫۵۲$، $kr_\circ = ۰٫۲۶\sqrt{E(\mathrm{MeV})}$، و $\hbar\omega = E_B + p^۲/M$.

۹ــ فرض کنید که الکترون با پتانسیل چاه مربعی به هسته مقیّد باشد. بستگی انرژی مقطع اثر فوتوالکتریک را حساب کنید. فرض کنید که انرژی فوتون به‌مراتب از انرژی بستگی الکترون بزرگتر است و پتانسیل برد کوتاهی دارد. (راهنمایی: مسئلهٔ ۸ را ببینید.)

تغییری که باید در محاسبات داد این است که تابع‌موج اتم هیدرژنی

$$\frac{۱}{\sqrt{۴\pi}}۲\left(\frac{Z}{a_\circ}\right)^{۳/۲}e^{-Zr/a_\circ}$$

را با

$$\psi(r) = \frac{N}{\sqrt{۴\pi}}\frac{\sin qr}{r},\quad r<r_\circ$$
$$= \frac{N}{\sqrt{۴\pi}}\frac{e^{-\kappa r}}{r},\quad r>r_\circ$$

جایگزین کرد که در آن κ را انرژی پیوندی مشخصهٔ حالت پایهٔ الکترون تعیین می‌کند

$$\kappa^۲ = \frac{۲m_e|E_B|}{\hbar^۲}$$
$$= \left(\frac{m_e c\alpha}{\hbar}\right)^۲$$

با $\alpha = ۱/۱۳۷$. شرط ویژه‌مقدار q را به κ مربوط می‌سازد

$$qr_\circ \cot qr_\circ = -\kappa r_\circ$$

که در آن

$$q^۲ = \frac{۲m_e V_\circ}{\hbar^۲} - \kappa^۲$$

و $V_\circ$ عمق چاه پتانسیل مربعی است. عبارت مقطع دیفرانسیلی را با تقسیم معادلهٔ (۱۹-۱۱۶) بر $۴(Z/a_\circ)^۲$ و جایگزینی تابع‌موج در المان ماتریسی با تابع‌موجی که در بالا داده‌ایم به‌دست می آوریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{۲\pi}{\hbar}\frac{m_e p_e}{(۲\pi\hbar)^۳}\frac{۱}{c}\left(\frac{e}{m_e}\right)^۲ \frac{\hbar}{۲\varepsilon_\circ\omega}\frac{p_e^۲}{۴\pi}(\hat{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}})^۲\left|\int d^۳\mathbf{r}\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p}_e/\hbar)\cdot\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r})\right|^۲$$

مشروط بر این که انرژی فوتون به‌مراتب از انرژی پیوندی الکترون بزرگتر است و پتانسیل برد بسیار کوتاهی دارد می‌خواهیم بدانیم که بستگی مقطع دیفرانسیلی به انرژی چگونه است. قانون پایستگی انرژی می‌گوید که در چنین شرایطی داریم $\hbar\omega = p_e^۲/۲m_e$. ضریب جلویی به‌شکل $p_e^۳/\omega \propto p_e \propto \sqrt{E_\gamma}$ تغییر می‌کند و در نتیجه باید بستگی به انرژی کمیّت $\left|\int d^۳\mathbf{r}\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p}_e/\hbar)\cdot\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r})\right|^۲$ را بررسی کنیم. این انتگرال به‌شکل زیر است

$$\int d^۳\mathbf{r}\, e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) = \frac{۴\pi}{Q}\int_\circ^\infty r dr \sin Qr\, \psi(r)$$

که در آن $\mathbf{Q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}_e/\hbar$ و در نتیجه

$$Q^۲ = k^۲ + \frac{p_e^۲}{\hbar^۲} - ۲\frac{kp_e}{\hbar}(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{p}})$$

حال

$$\begin{aligned}\frac{\hbar^۲k^۲}{p_e^۲} &= \frac{\hbar^۲\omega^۲}{p_e^۲c^۲} \\ &= \hbar\omega\frac{p_e^۲/۲m_e}{p_e^۲c^۲} \\ &= \frac{\hbar\omega}{۲m_ec^۲}\end{aligned}$$

چون در ناحیهٔ غیرنسبیّتی هستیم این نسبت به‌مراتب از ۱ کوچکتر است. بنابراین از جملاتی که به k بستگی دارند چشمپوشی می‌کنیم و Q را با $p_e/\hbar$ جایگزین می‌کنیم. از این رو انتگرال چنین می‌شود

$$\frac{۴\pi}{Q}\frac{N}{\sqrt{۴\pi}}\left[\int_\circ^{r_\circ} dr \sin Qr \sin qr + \int_{r_\circ}^\infty dr \sin Qr\, e^{-\kappa r}\right]$$

انتگرال اوّل برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{r_۰} dr\big(\cos(Q-q)r-\cos(Q+q)r\big) = \frac{۱}{۲}\left[\frac{\sin(Q-q)r_۰}{Q-q}-\frac{\sin(Q+q)r_۰}{Q+q}\right]$$
$$\approx -\frac{۱}{Q}\cos Qr_۰ \sin Qr_۰$$

که در آن در مرحلهٔ آخر از $Q >> q$ استفاده کرده‌ایم. انتگرال دوّم برابر است با

$$\mathrm{Im}\int_{r_۰}^{\infty} dr\, e^{-r(\kappa-iQ)} = \mathrm{Im}\frac{e^{-r(\kappa-iQ)}}{\kappa-iQ}$$
$$\approx \frac{\cos Qr_۰}{Q}\, e^{-\kappa r_۰}$$

بنابراین مجذور المان ماتریسی برابر می‌شود با

$$\frac{۴\pi N^۲}{Q^۲}\,\frac{۱}{Q^۲}\left(\cos Qr_۰\left(e^{-\kappa r_۰}-\sin qr_۰\right)\right)$$

مجذور کسینوس را می‌توان با ۱/۲ جایگزین کرد چون ضریبی است که سریع نوسان می‌کند و در نتیجه بستگی غالب $۱/Q^۴$، یعنی $۱/E_\gamma^۲$ است. بنابراین بستگی کلّ به‌انرژی فوتون به‌شکل $۱/E_\gamma^{۳/۲}$ یا $۱/p_e^۳$ است بر خلاف بستگی به انرژی اتمی که $۱/p_e^۲$ است.

۱۰ــ اصل توازن دقیق عناصر ماتریسی واکنشهای

$$A+a\to B+b \quad \mathrm{I}$$

و

$$B+b\to A+a \quad \mathrm{II}$$

را بهم ربط می‌دهد. بنابراین

$$\sum|M_{\mathrm{I}}|^۲=\sum|M_{\mathrm{II}}|^۲$$

که در آن جمع روی هر دو حالت اسپین اولیّه و نهایی است. بادرنظرگرفتن این‌که در محاسبهٔ آهنگ یا مقطع روی حالتهای اسپینی اولیّه میانگین می‌گیریم و روی حالتهای اسپینی نهایی جمع می‌بندیم نشان دهید که در محاسبهٔ آهنگها داریم:

$$\frac{(۲J_A+۱)(۲J_a+۱)}{p_b^۲(dp_b/dE_b)}\frac{dR_{\mathrm{I}}}{d\Omega_b}=\frac{(۲J_B+۱)(۲J_b+۱)}{p_a^۲(dp_a/dE_a)}\frac{dR_{\mathrm{II}}}{d\Omega_a}$$

که در آن J_a، J_A، J_b، و J_B اسپینهای ذرّات، p_b و p_a اندازه‌حرکتهای مرکزجرم ذرّات b و a (واکنشهای I و II باید در انرژی کل یکسان رخ دهند)، E_b و E_a انرژیهای متناظر ذرّات، و $d\Omega_b$ و $d\Omega_a$ زوایای فضایی هستند که b و a در آنها دیده می‌شوند. ازاین نتیجه استفاده کنید و مقطع فرآیند گیراندازی تابش‌زای

$$N + P \to D + \gamma$$

را برحسب مقطعی که در مسئلهٔ ۸ حساب کردید بیان کنید. توجه کنید که ضریب $(۲J + ۱)$ برای فوتونها ۲ است زیرا فقط دو حالت قطبش وجود دارد و نیز اسپین دوترون ۱ است.

آهنگ دیفرانسیلی فرآیند I، یعنی $a + A \to b + B$ در چارچوب مرکز اندازه‌حرکت برابر است با

$$\frac{dR_{\mathrm{I}}}{d\Omega} = \frac{۱}{(۲j_a + ۱)(۲J_A + ۱)} \frac{۱}{(۲\pi\hbar)^۳} p_b^۲ \frac{dp_b}{dE_b} \sum_{\text{اسپینها}} |M_{\mathrm{I}}|^۲$$

جمع روی همهٔ حالتهای اسپینی اوّلیه و نهایی است. چون مجبوریم که روی حالتهای اوّلیه میانگین (به جای جمع) بگیریم دو ضریب اوّل را به این دلیل آورده‌ایم. ضریب فاز همان ضریب فاز معمول است که بدون مشخص کردن نحوهٔ بستگی E_b به p_b نوشته شده‌است. آهنگ فرآیند وارون II، یعنی $b + B \to a + A$ شکل یکسانی دارد

$$\frac{dR_{\mathrm{II}}}{d\Omega} = \frac{۱}{(۲j_b + ۱)(۲J_B + ۱)} \frac{۱}{(۲\pi\hbar)^۳} p_a^۲ \frac{dp_a}{dE_a} \sum_{\text{اسپینها}} |M_{\mathrm{II}}|^۲$$

بنابر اصل توازن دقیق جمع روی همهٔ حالتهای اسپینی مجذور المانهای ماتریسی دو واکنش با هم برابرند مشروط بر این که این دو در انرژیهای مرکز اندازه‌حرکت یکسانی باشند. بنابراین

$$\sum_{\text{اسپینها}} |M_{\mathrm{I}}|^۲ = \sum_{\text{اسپینها}} |M_{\mathrm{II}}|^۲$$

با استفاده از این رابطه به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\frac{(۲j_a + ۱)(۲J_A + ۱)}{p_b^۲ (dp_b/dE_b)} \frac{dR_{\mathrm{I}}}{d\Omega} = \frac{(۲j_b + ۱)(۲J_B + ۱)}{p_a^۲ (dp_a/dE_a)} \frac{dR_{\mathrm{II}}}{d\Omega}$$

حال این نتیجه را برای محاسبهٔ مقطع تسخیر رادیواکتیو در فرآیند $N + P \to D + \gamma$ به‌کار می‌بریم. نخست باید آهنگ را به مقطع تبدیل کنیم. بدین منظور آهنگ R را در عامل حجمی V ضرب و بر سرعت نسبی ذرّات در حالت اوّلیه تقسیم می‌کنیم. در فرآیند I، یعنی تجزیهٔ نوری $\gamma + D \to N + P$ سرعت نسبی ذرّات برابر است با سرعت نور c و این سرعت در فرآیند II برابر است با $p_b/m_{red} = p_b/M$. داریم

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{I}}}{d\Omega} = \frac{V}{c} \frac{dR_{\mathrm{I}}}{d\Omega}, \quad \frac{d\sigma_{\mathrm{II}}}{d\Omega} = \frac{MV}{۲p_b} \frac{dR_{\mathrm{II}}}{d\Omega}$$

با اعمال نتیجه‌ای که در بالا به‌دست آمد داریم

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\mathrm{II}}}{d\Omega} &= \frac{MV}{۲p_b}\frac{dR_{\mathrm{II}}}{d\Omega}\\ &= \frac{MV}{۲p_b}\frac{p_a^۲(dp_a/dE_a)}{(۲j_b+۱)(۲J_B+۱)} \times \frac{(۲j_a+۱)(۲J_A+۱)}{p_b^۲(dp_b/dE_b)}\frac{c}{V}\frac{d\sigma_{\mathrm{I}}}{d\Omega}\end{aligned}$$

همهٔ عوامل مهمّ این رابطه را می‌توانیم محاسبه کنیم. در محاسبات سینماتیکی انرژی پیوندی دوترون را نادیده خواهیم گرفت. نخست داریم

$$\frac{(۲j_\gamma+۱)(۲J_D+۱)}{(۲j_P+۱)(۲J_N+۱)} = \frac{۲\times۳}{۲\times۲} = \frac{۳}{۲}$$

آنگاه در چارچوب مرکز اندازه‌حرکت انرژی مرکزجرم برابر است با

$$\begin{aligned}W &= p_a c + \frac{p_a^۲}{۲M_D}\\ &\approx p_a c + \frac{p_a^۲}{۴M}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{dE_a}{dp_a} = c + \frac{p_a}{۲M}$$

در واکنش II

$$W = ۲\times\frac{p_b^۲}{۲M} = \frac{p_b^۲}{M}$$

بنابراین

$$\frac{dE_b}{dp_b} = \frac{۲p_b}{M}$$

اینک کسر زیر را داریم

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\mathrm{I}}}{d\Omega}\Big/\frac{d\sigma_{\mathrm{II}}}{d\Omega} &= \frac{۳}{۲}\frac{۲p_b}{Mc}\frac{p_b^۲(M/۲p_b)}{p_a^۲(۱/c)}\\ &= \frac{۳}{۲}\left(\frac{p_b}{p_a}\right)^۲\end{aligned}$$

به‌ازای انرژیهای فوتونی کم ($\sim ۲۰ - ۴۰$ MeV) می‌توان جرم دوترون را در واکنش I بی‌نهایت پنداشت و در نتیجه اختلافی بین چارچوب آزمایشگاهی و چارچوب مرکز اندازه‌حرکت در حالت پایهٔ واکنش I وجود ندارد. از این رو $W = E_\gamma = p_a c$، و نیز $W = p_b^۲/M$. داریم $(p_b/p_a)^۲ = Mc^۲W/W = Mc^۲/E_\gamma$. سرانجام خواهیم داشت

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{(NP\to\gamma D)} = \frac{۳}{۲}\frac{Mc^۲}{E_\gamma}\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{(\gamma D\to NP)}$$