سؤالات ریاضیات آزمون سراسری سال ۱۳۹۳

رشته‌ی علوم تجربی

تهیه کننده: ناصر رضائی‌ایوب

سؤالات ریاضی آزمون سراسری سال ۱۳۹۳ (رشته‌ی علوم تجربی)

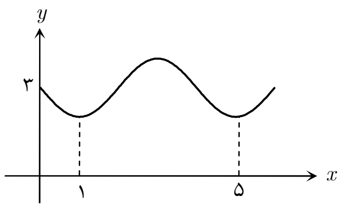
۱۲۶. به‌ازای یک مقدار x، اعداد $x^۲ - ۲$، $۲x$ و $x^۲ + ۴$، به‌ترتیب سه جمله‌ی اوّل از دنباله‌ی هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله‌ی اوّل این دنباله، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱۷}{۱۶}$　۲) $\frac{۱۲۵}{۱۶}$　۳) $\frac{۶۳}{۴}$　۴) $\frac{۱۲۷}{۸}$

۱۲۷. نمودار تابع $y = |\frac{۱}{۲}x| - ۲$ را، ۴ واحد به‌طرف xهای منفی و یک واحد به‌طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) $-۳/۵$　۲) -۳　۳) $-۲/۵$　۴) -۲

۱۲۸. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟



۱) ۲　۲) ۲/۵　۳) ۳　۴) ۳/۵

۱۲۹. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A \times B$ ماتریس واحد باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس B، کدام است؟

۱) ۱　۲) ۱/۵　۳) ۲　۴) ۲/۵

۱۳۰. در یک شرکت دارویی جدول توزیع کارکنان را با نمودار دایره‌ای نشان می‌دهیم. زاویه‌ی مربوط به کارکنان ارشد، چند درجه است؟

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	ارشد	دکترا
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰	۳۰

۱) ۸۴°　۲) ۹۲°　۳) ۹۶°　۴) ۱۰۵°

۱۳۱. در ۲۵ داده آماری میانگین و انحراف معیار به‌ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، کدام است؟

۱) ۱۴/۷۲　۲) ۱۴/۸۱　۳) ۱۵/۳۳　۴) ۱۶/۶۶

۱۳۲. ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. به‌تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$　۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$　۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$　۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۱۳۳. اگر $\cos(x + \frac{\pi}{۳}) + \cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار $\cos ۲x$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۹}$　۲) $-\frac{۱}{۹}$　۳) $\frac{۱}{۹}$　۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۳۴. حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\left(\frac{۳}{۲x^۲+۵x+۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}\right)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۱۳۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{۱-\tan^۲ x}{\cos ۲x} & ; \ ۰\le x<\frac{\pi}{۴}\\ a\cos ۳x & ; \ \frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ ، به‌ازای کدام مقدار a ، در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) -۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۱۳۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه‌ی $x=۴$ تا $x=۱۲$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه‌ی $x=۴$ ، چه‌قدر بیش‌تر است؟

۱) $\frac{۷}{۵۴۰}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۴۰}$ ۳) $\frac{۷}{۲۷۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۷۰}$

۱۳۷. مشتق تابع $y=۲\sin^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})$ ، به‌ازای $x=\frac{\pi}{۳}$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

۱۳۸. احتمال انتقال نوعی بیماری مسری به افراد مستعد برابر ۰/۲ است. اگر ۵ نفر مستعد، با فردی که حامل این بیماری است ملاقات کنند، با کدام احتمال ۳ نفر آنان مبتلا می‌شوند؟

۱) ۰/۰۲۵۶ ۲) ۰/۰۵۱۲ ۳) ۰/۱۰۲۴ ۴) ۰/۲۰۴۸

۱۳۹. به‌ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$ و -۱

۱۴۰. اگر نمودار تابع $f(x)=a(b)^x-۱$ ، از دو نقطه‌ی $A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $B(۱,۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۴۱. از تساوی $\log_x(x^۲+۴)=۱+\log_x ۵$ ، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۲ ، کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۴۲. در معادله‌ی مثلثاتی $\sin ۲x.(\sin x+\cos x)=\cos ۲x.(\cos x-\sin x)$ ، مجموع تمام جواب‌ها در بازه‌ی $[۰,\pi]$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۱۴۳. در تابع ضمنی $۴\sqrt{xy}+\frac{۱}{y}-۲x=۱$ ، تابع y برحسب متغیر x منظور شده است. معادله‌ی خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی $(۴,۱)$ ، کدام است؟

۱) $y+۲x=۹$ ۲) $۲y-x=-۲$ ۳) $۳y+x=۷$ ۴) $۳y-x=-۱$

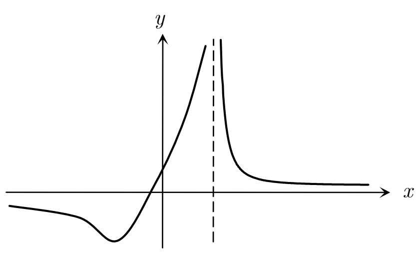
۱۴۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin^۲ x-\cos ۲x & ; \ ۰<x\le\frac{\pi}{۴}\\ a\tan x+b\sin ۲x & ; \ \frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۴}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۴۵. در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^۴+۸x^۳-۱۸x^۲$ ، نزولی و تقعر نمودار آن، رو به بالا است؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(۱,۴)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۰,۳)$

۱۴۶. شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{x+a}{x^۲+bx+۴}$ است. مقادیر a و b ، چگونه است؟



۱) $b=۴\ ,\ a<۰$ ۲) $b=-۴\ ,\ a<۰$ ۳) $b=۴\ ,\ a>۰$ ۴) $b=-۴\ ,\ a>۰$

۱۴۷. به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - ۱ \\ ۳x + (m - ۲)y = ۴ - ۲m \end{cases}$، دارای بی‌شمار جواب است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار m

۱۴۸. شعاع دایره گذرا بر سه نقطه‌ی $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۱,-۲)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳}$

۱۴۹. در هذلولی به‌معادله‌ی $۳x^۲ - ۴y^۲ - ۶x - ۹ = ۰$، طول وتری از آن، گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۵۰. مقدار انتگرال معین $\int_{-۱}^{۳} (x + [x])dx$، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶ ۴) ۶/۵

۱۵۱. اگر $\int \frac{(۱ + \sqrt{x})^۳ - ۱}{x} dx = ۳\sqrt{x}.f(x) + c$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}x + ۳\sqrt{x} + ۲$ ۲) $\frac{۲}{۳}x + \sqrt{x} + ۶$ ۳) $\frac{۲}{۹}x + ۳\sqrt{x} + ۶$ ۴) $\frac{۲}{۹}x + \sqrt{x} + ۲$

۱۵۲. در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} = ۱۰۸^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به‌اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۵۴

۱۵۳. طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به‌ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) $۲۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲۴ + ۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$

۱۵۴. زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۶ , ۵ , ۱ می‌باشند. کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگ‌ترین ضلع آن است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۵۵. مکعبی به‌طول یال ۲ واحد، در داخل کوچک‌ترین کره ممکن جای گرفته است. مساحت این کره کدام است؟

۱) ۸π ۲) ۹π ۳) ۱۲π ۴) ۱۸π

پاسخ تشریحی سؤالات ریاضی آزمون سراسری سال ۱۳۹۳ (رشته‌ی علوم تجربی)

۱۲۶. گزینه‌ی (۴).

چون اعداد $x^۲-۲$ ، $۲x$ و $x^۲+۴$ ، به‌ترتیب سه جمله‌ی اوّل از یک دنباله‌ی هندسی می‌باشند، پس واسطه‌ی هندسی بین این اعداد برقرار است.

$$(۲x)^۲=(x^۲+۴).(x^۲-۲)\Rightarrow ۴x^۲=x^۴+۲x^۲-۸\Rightarrow x^۴-۲x^۲-۸=۰$$

$$\Rightarrow (x^۲-۴).(x^۲+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}x^۲-۴=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=-۲,۲\\ x^۲+۲=۰\end{cases}$$

با قرار دادن هریک از مقادیر $x=-۲$ و $x=۲$ ، به‌جای x ، سه جمله‌ی اوّل این دنباله به‌صورت زیر در می آیند.

$$x=-۲\Rightarrow ۸,-۴,۲ \qquad ; \qquad x=۲\Rightarrow ۸,۴,۲$$

چون این دنباله، نزولی است پس جواب $x=-۲$ غیرقابل‌قبول و تنها جواب $x=۲$ قابل‌قبول است. بنابراین، مجموع هفت جمله‌ی اوّل این دنباله برابر است با:

$$۸,۴,۲,\ldots\Rightarrow a=۸\ ;\ q=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_۷=a\times\frac{۱-q^۷}{۱-q}=۸\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^۷}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲^۴\times\frac{۲^۷-۱}{۲^۷}=\frac{۱۲۸-۱}{۸}=\frac{۱۲۷}{۸}$$

۱۲۷. گزینه‌ی (۲).

اگر نمودار تابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را، ۴ واحد به‌طرف x های منفی و یک واحد به‌طرف y های مثبت انتقال دهیم، ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر درمی آید.

$$y=|\frac{۱}{۲}x|-۲\Rightarrow y'=|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۲+۱=|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۱$$

در نتیجه، محل تلاقی این دو نمودار برابر است با:

$$|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۱=|\frac{۱}{۲}x|-۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}|x+۴|=\frac{۱}{۲}|x|-۱\Rightarrow |x+۴|=|x|-۲\Rightarrow |x+۴|^۲=(|x|-۲)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۸x+۱۶=x^۲-۴|x|+۴\Rightarrow |x|=-۲x-۳\Rightarrow x=\pm(-۲x-۳)$$

$$x=+(-۲x-۳)\Rightarrow x=-۲x-۳\Rightarrow ۳x=-۳\Rightarrow x=-۱$$

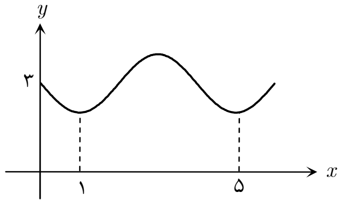
$$x=-(-۲x-۳)\Rightarrow x=۲x+۳\Rightarrow x=-۳$$

اگر جواب $x=-۱$ را در معادله‌ی $|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۱=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود که:

$$|\frac{۱}{۲}(-۱+۴)|-۱=|\frac{۱}{۲}\times(-۱)|-۲\Rightarrow \frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}-۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲} \qquad \text{(غیرقابل‌قبول)}$$

بنابراین، جواب $x=-۱$ غیرقابل‌قبول و تنها جواب $x=-۳$ قابل‌قبول است.

۱۲۸. گزینه‌ی (۲).



دوره‌ی تناوب تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{|b|}$$

هم‌چنین، دوره‌ی تناوب نمودار ارائه شده برابر $T=۵-۱=۴$ است. پس:

$$\frac{۲}{|b|}=۴\Rightarrow |b|=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$

چون نمودار تابع در یک همسایگی صفر نزولی می‌باشد، پس تنها جواب $b=-\frac{۱}{۲}$ قابل‌قبول است. (توجه داشته باشید که نمودار تابع $\sin x$ در یک همسایگی صفر صعودی و نمودار تابع $\sin(-x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی صفر نزولی می‌باشد). از طرفی چون مقدار تابع در نقطه‌ای به‌طول $x=۰$ برابر ۳ است، پس:

$$y_{(۰)}=۳\Rightarrow a+\sin(-\frac{\pi}{۲}\times ۰)=۳\Rightarrow a=۳$$

بنابراین، ضابطه‌ی تعریف تابع به‌صورت $y=۳+\sin(-\frac{\pi}{۲}x)=۳-\sin(\frac{\pi}{۲}x)$ در می‌آید. لذا مقدار y در نقطه‌ی $x=\frac{۲۵}{۳}$، برابر است با:

$$x=\frac{۲۵}{۳}\Rightarrow y_{(\frac{۲۵}{۳})}=۳-\sin(\frac{\pi}{۲}\times\frac{۲۵}{۳})=۳-\sin(\frac{۲۵\pi}{۶})=۳-\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۶})=۳-\sin\frac{\pi}{۶}=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۱۲۹. گزینه‌ی (۳).

اگر $A\times B=I$، آن‌گاه $B=A^{-۱}$. در نتیجه،

$$A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۷\end{bmatrix}\Rightarrow B=A^{-۱}=\frac{۱}{۲\times ۷-۳\times ۴}\begin{bmatrix}۷&-۳\\-۴&۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۷&-۳\\-۴&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۷}{۲}&-\frac{۳}{۲}\\-۲&۱\end{bmatrix}$$

$$B \text{ مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس} =\frac{۷}{۲}+(-\frac{۳}{۲})=\frac{۴}{۲}=۲$$

۱۳۰. گزینه‌ی (۳).

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	ارشد	دکترا
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰	۳۰

$$N=F_۱+F_۲+F_۳+F_۴+F_۵=۳۰+۹۰+۱۸۰+۱۲۰+۳۰=۴۵۰$$

$$\text{زاویه‌ی مربوط به کارکنان ارشد}=\alpha_۴=\frac{F_۴}{N}\times ۳۶۰^\circ=\frac{۱۲}{۴۵}\times ۳۶۰^\circ=۹۶^\circ$$

۱۳۱. گزینه‌ی (۴).

$$X: x_۱,\dots,x_{۲۱},۵۰,۴۵,۱۵,۱۰ \qquad ; \qquad X': x_۱,\dots,x_{۲۱}$$

$$\bar{X}=۳۰\Rightarrow\frac{x_۱+\dots+x_{۲۱}+۵۰+۴۵+۱۵+۱۰}{۲۵}=۳۰\Rightarrow\frac{x_۱+\dots+x_{۲۱}+۱۲۰}{۲۵}=۳۰$$

$$\Rightarrow x_۱,\dots,x_{۲۱}+۱۲۰=۷۵۰\Rightarrow x_۱,\dots,x_{۲۱}=۶۳۰\Rightarrow\bar{X}'=\frac{x_۱+\dots+x_{۲۱}}{۲۱}=\frac{۶۳۰}{۲۱}=۳۰$$

چون $\sigma_X=۸$، پس $\sigma_X^۲=۶۴$؛ و در نتیجه،

$$\frac{(x_۱-۳۰)^۲+\dots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲+(۵۰-۳۰)^۲+(۴۵-۳۰)^۲+(۱۵-۳۰)^۲+(۱۰-۳۰)^۲}{۲۵}=۶۴$$

$$\Rightarrow\frac{(x_۱-۳۰)^۲+\dots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲+۴۰۰+۲۲۵+۲۲۵+۴۰۰}{۲۵}=۶۴$$

$$\Rightarrow(x_۱-۳۰)^۲+\dots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲+۱۲۵۰=۱۶۰۰\Rightarrow(x_۱-۳۰)^۲+\dots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲=۳۵۰$$

$$\sigma_{X'}^۲=\frac{(x_۱-\bar{X}')^۲+\dots+(x_{۲۱}-\bar{X}')^۲}{۲۱}=\frac{(x_۱-۳۰)^۲+\dots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲}{۲۱}=\frac{۳۵۰}{۲۱}=۱۶/۶۶$$

۱۳۲. گزینه‌ی (۱).

$$P(\text{۲ مهره از ۴ مهره سفید})=P(\text{ظرف اول و ۲ مهره از ۴ مهره سفید})+P(\text{ظرف دوم و ۲ مهره از ۴ مهره سفید})$$
$$+P(\text{ظرف سوم و ۲ مهره از ۴ مهره سفید})$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۲۰+۱۵+۱۵}{۱۲۶}=\frac{۲۵}{۶۳}$$

۱۳۳. گزینه‌ی (۲).

با توجه به روابط

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta \qquad ; \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$$

و رابطه‌ی $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ داریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3}\Rightarrow(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)+(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \cos x=\frac{2}{3}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{4}{9}\Rightarrow \cos 2x=2\cos^2 x-1=\frac{8}{9}-1=-\frac{1}{9}$$

۱۳۴. گزینه‌ی (۲).

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{3}{2x^2+5x+2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{3}{2x^2+5x+2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{3}{(x+2).(2x+1)}-\frac{4}{(x+2).(x-2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{3(x-2)-4(2x+1)}{(x+2).(2x+1).(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{-5x-10}{(x+2).(2x+1).(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{-5(x+2)}{(x+2).(2x+1).(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{-5}{(2x+1).(x-2)}=-\frac{5}{12}$$

۱۳۵. گزینه‌ی (۱).

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{-2\tan x\times(1+\tan^2 x)}{-2\sin 2x}=\frac{-4}{-2}=2$$
$$f(\frac{\pi}{4})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}a\cos 3x=a\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

شرط پیوستگی: $f(\frac{\pi}{4})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}f(x)\Rightarrow-\frac{a\sqrt{2}}{2}=2\Rightarrow a\sqrt{2}=-4\Rightarrow a=-2\sqrt{2}$

۱۳۶. گزینه‌ی (۲).

$$f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\Rightarrow f(4)=\frac{1}{\sqrt{2\times4+1}}=\frac{1}{3}\qquad;\qquad f(12)=\frac{1}{\sqrt{2\times12+1}}=\frac{1}{5}$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه‌ی $x=4$ تا $x=12$ $=\bar{f}=\frac{f(12)-f(4)}{12-4}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=-\frac{1}{60}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{2\sqrt{(2x+1)^3}}=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$$

آهنگ لحظه‌ای تابع در نقطه‌ی $x=4$ $=f'(4)=-\frac{1}{\sqrt{(2\times4+1)^3}}=-\frac{1}{27}$

$$\bar{f}-f'(4)=-\frac{1}{60}-(-\frac{1}{27})=\frac{1}{27}-\frac{1}{60}=\frac{60-27}{1620}=\frac{33}{1620}=\frac{11}{540}$$

۱۳۷. گزینه‌ی (۳).

$$y=2\sin^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\Rightarrow y'=2\times2\times(-\frac{1}{4})\times\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\times\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})=-\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\times\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$$
$$y'_{(\frac{\pi}{3})}=-\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{3})\times\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{4}$$

۱۳۸. گزینه‌ی (۲).

احتمال انتقال بیماری مسری دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=5$ و $p=0/2=\frac{2}{10}$ است و تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است.

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\binom{5}{x}(\frac{2}{10})^x(\frac{8}{10})^{5-x}\qquad;\qquad x=0,1,\ldots,5$$

در نتیجه، احتمال این‌که دقیقاً سه نفر به این بیماری مبتلا شوند، برابر است با:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}(\frac{2}{10})^3(\frac{8}{10})^2=10\times\frac{8}{10^3}\times\frac{64}{10^2}=\frac{512}{10^4}=0/0512$$

۱۳۹. گزینه‌ی (۱).

شرط آن‌که معادله‌ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، آن است که $\Delta>0$. بنابراین همواره باید داشته باشیم:

$$\Delta>0\Rightarrow(m+3)^2-20m>0\Rightarrow m^2+6m+9-20m>0\Rightarrow m^2-14m+9>0\qquad(*)$$

فرض کنید α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ باشند، در این‌صورت:

$$mx^۲-(m+۳)x+۵=۰ \Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{m+۳}{m} \quad ; \quad \alpha\times\beta=\frac{c}{a}=\frac{۵}{m}$$

اگر مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۶ باشد، باید داشته باشیم $\alpha^۲+\beta^۲=۶$. در نتیجه،

$$\alpha^۲+\beta^۲=۶ \Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲+۲\alpha\beta=۶+۲\alpha\beta \Rightarrow (\alpha+\beta)^۲=۶+۲\alpha\beta \Rightarrow (\frac{m+۳}{m})^۲=۶+۲\times\frac{۵}{m}$$

$$\Rightarrow (m+۳)^۲=۶m^۲+۱۰m \Rightarrow m^۲+۶m+۹=۶m^۲+۱۰m$$

$$\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰ \Rightarrow m=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۴۵}}{۵} \Rightarrow m=\frac{-۲\pm۷}{۵}=-\frac{۹}{۵},۱$$

اگر جواب‌های $m=۱$ و $m=-\frac{۹}{۵}$ را در رابطه‌ی $(*)$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود که جواب $m=۱$ در رابطه‌ی $(*)$ صدق نمی‌کند، لذا جواب $m=۱$ غیرقابل‌قبول است و تنها جواب $m=-\frac{۹}{۵}$ قابل‌قبول می‌باشد.

۱۴۰. گزینه‌ی (۳).

$$A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\in f \Rightarrow f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a\times(b)^{-\frac{۱}{۲}}-۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sqrt{b}=\frac{۲}{۳}a \Rightarrow b=\frac{۴}{۹}a^۲$$

$$b=\frac{۴}{۹}a^۲ \Rightarrow f(x)=a\times(b)^x-۱=a\times(\frac{۴}{۹}a^۲)^x-۱$$

$$B(۱,۱۱)\in f \Rightarrow f(۱)=۱۱ \Rightarrow a\times(\frac{۴}{۹}a^۲)^۱-۱=۱۱ \Rightarrow \frac{۴}{۹}a^۳=۱۲ \Rightarrow ۴a^۳=۱۰۸ \Rightarrow a^۳=۲۷ \Rightarrow a=۳$$

$$a=۳ \Rightarrow f(x)=۳\times(\frac{۴}{۹}\times۳^۲)^x-۱=۳\times۴^x-۱ \Rightarrow f(-۱)=۳\times۴^{-۱}-۱=\frac{۳}{۴}-۱=-\frac{۱}{۴}$$

۱۴۱. گزینه‌ی (۴).

با توجه به رابطه‌ی $\log_x(x^۲+۴)=۱+\log_x ۵$ نتیجه می‌شود که x نمی‌تواند برابر یک باشد (زیر مبنا نمی‌تواند برابر یک باشد).

$$\log_x(x^۲+۴)=۱+\log_x ۵ \Rightarrow \log_x(x^۲+۴)=\log_x x+\log_x ۵ \Rightarrow \log_x(x^۲+۴)=\log_x ۵x$$

$$\Rightarrow x^۲+۴=۵x \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰ \Rightarrow (x-۱).(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۱,۴$$

که جواب $x=۱$ غیرقابل‌قبول و تنها جواب $x=۴$ قابل‌قبول است.

$$\log_۲ x=\log_۲ ۴=\log_۲ ۲^۲=۲\times\log_۲ ۲=۲\times۱=۲$$

۱۴۲. گزینه‌ی (۲).

با توجه به رابطه‌های $\cos ۳x=\cos ۲x.\cos x-\sin ۲x.\sin x$ و $\cos ۳x=\sin ۲x.\cos x+\cos ۲x.\sin x$ داریم:

$$\sin ۲x.(\sin x+\cos x)=\cos ۲x.(\cos x-\sin x)$$

$$\Rightarrow \sin ۲x.\sin x+\sin ۲x.\cos x=\cos ۲x.\cos x-\cos ۲x.\sin x$$

$$\Rightarrow \sin ۲x.\cos x+\cos ۲x.\sin x=\cos ۲x.\cos x-\sin ۲x.\sin x$$

$$\Rightarrow \sin ۳x=\cos ۳x \Rightarrow \frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}=۱ \Rightarrow \tan ۳x=۱ \Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲}$$

با مقداردهی به k، $(k=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots)$، جواب‌هایی که در بازه‌ی $[۰,\pi]$ قرار دارند، عبارت‌اند از:

$$x_۱=\frac{\pi}{۱۲} \quad ; \quad x_۲=\frac{۵\pi}{۱۲} \quad ; \quad x_۳=\frac{۹\pi}{۱۲}$$

در نتیجه، مجموع تمام جواب‌هایی که در بازه‌ی $[۰,\pi]$ قرار دارند، برابر است با:

$$x_۱+x_۲+x_۳=\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}+\frac{۹\pi}{۱۲}=\frac{۱۵\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۴}$$

۱۴۳. گزینه‌ی (۴).

$$۴\sqrt{xy}+\frac{۱}{y}-۲x=۱ \Rightarrow f'_x=\frac{۲\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-۲ \quad ; \quad f'_y=\frac{۲\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\frac{۱}{y^۲}=\frac{۲y^۲\sqrt{x}-\sqrt{y}}{y^۲\sqrt{y}}$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-f'_x\times\frac{۱}{f'_y}=-(\frac{۲\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-۲)\times\frac{y^۲\sqrt{y}}{۲y^۲\sqrt{x}-\sqrt{y}} \Rightarrow m=y'_{(۴,۱)}=-(\frac{۲\sqrt{۱}}{\sqrt{۴}}-۲)\times\frac{۱^۲\times\sqrt{۱}}{۲\times۱^۲\sqrt{۴}-\sqrt{۱}}=\frac{۱}{۳}$$

معادله‌ی خط مماس: $y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۳}(x-۴) \Rightarrow ۳y-x=-۱$

۱۴۴. گزینه‌ی (۱).

شرط اولیه برای این‌که مشتق تابع در یک نقطه موجود باشد، آن است که در آن نقطه پیوسته باشد. پس:

$$f(\frac{\pi}{۴}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} (\sin^۲ x - \cos ۲x) = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} (a\tan x + b\sin ۲x) = a + b$$

شرط پیوستگی: $f(\frac{\pi}{۴}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x) \Rightarrow a + b = \frac{۱}{۲}$

شرط ثانویه، برای این‌که مشتق تابع در یک نقطه موجود باشد، آن است که مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه وجود داشته و باهم برابر باشند. پس:

$$f'(x) = \begin{cases} ۲\sin x\cos x + ۲\sin ۲x & ; \quad ۰ < x < \frac{\pi}{۴} \\ a(۱+\tan^۲ x) + ۲b\cos ۲x & ; \quad \frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$f'_-(\frac{\pi}{۴}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} (۲\sin x\cos x + ۲\sin ۲x) = ۳$$

$$f'_+(\frac{\pi}{۴}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} (a(۱+\tan^۲ x) + ۲b\cos ۲x) = ۲a$$

شرط مشتق‌پذیری: $f'_+(\frac{\pi}{۴}) = f'_-(\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow ۲a = ۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲} \quad ; \quad \frac{۳}{۲} + b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = -۱$

۱۴۵. گزینه‌ی (۱).

$$f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ - ۱۸x^۲ \Rightarrow f'(x) = -۴x^۳ + ۲۴x^۲ - ۳۶x \quad ; \quad f''(x) = -۱۲x^۲ + ۴۸x - ۳۶$$

$$f'(x) \overset{set}{=} ۰ \Rightarrow -۴x^۳ + ۲۴x^۲ - ۳۶x = ۰ \Rightarrow -۴x.(x-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۳$$

$$f'(x) \overset{set}{=} ۰ \Rightarrow -۱۲x^۲ + ۴۸x - ۳۶ = ۰ \Rightarrow -۱۲.(x^۲ - ۴x + ۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱, ۳$$

جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است.

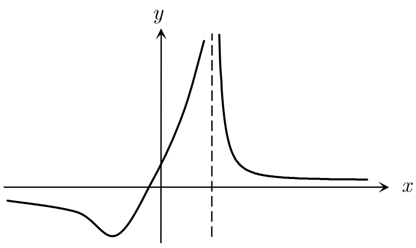
x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$ صعودی	max	$\searrow$ نزولی		$\searrow$ نزولی	

با توجه به جدول تعیین علامت تابع f'، نتیجه می‌شود که تابع f در بازه‌ی $(-\infty, ۰)$ صعودی و در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ نزولی است. هم‌چنین، جدول تعیین علامت تابع f'' به‌صورت زیر است.

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$		$\cap$ محدب	عطف	$\cup$ مقعر	عطف	$\cap$ محدب	

با توجه به جدول تعیین علامت تابع f''، نتیجه می‌شود که تابع f در بازه‌های $(-\infty, ۱)$ و $(۳, +\infty)$ محدب و در بازه‌ی $(۱, ۳)$ مقعر است. بنابراین، تابع f در بازه‌ی $(۱, ۳)$ نزولی و جهت تقعر آن رو به بالا است.

۱۴۶. گزینه‌ی (۴).



با توجه به نمودار تابع مشاهده می‌کنید که نمودار تابع دارای یک مجانب قائم با انفصال مضاعف است. پس مخرج کسر $y = \frac{x+a}{x^۲+bx+۴}$ دارای ریشه‌ی مضاعف است.

$$x^۲ + bx + ۴ = ۰ \quad ; \quad \Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \pm ۴$$

چون مجانب قائم منحنی تابع در سمت راست محور yها قرار دارد، پس $b = ۴$ غیرقابل‌قبول است؛ زیرا اگر $b = ۴$ باشد، آن‌گاه:

جواب $b = ۴$ غیرقابل‌قبول است. $\Leftarrow$ مجانب قائم $\quad b = ۴ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

بنابراین، تنها جواب $b = -۴$ قابل‌قبول است؛ زیرا در این‌صورت نتیجه می‌شود که:

جواب $b = -۴$ قابل‌قبول است. $\Leftarrow$ مجانب قائم $\quad b = -۴ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

در نتیجه، ضابطه‌ی تابع به‌صورت $y = \dfrac{x+a}{(x-۲)^۲}$ درمی‌آید. هم‌چنین، با توجه به نمودار تابع، چون به‌ازای $x = ۰$، نمودار تابع بالای محور xها قرار دارد، پس به‌ازای $x = ۰$ باید داشته باشیم $y > ۰$. بنابراین،

$$y_{(۰)} > ۰ \Rightarrow \frac{۰+a}{(۰-۲)^۲} > ۰ \Rightarrow \frac{a}{۴} > ۰ \Rightarrow a > ۰$$

۱۴۷. گزینه‌ی (۲).

شرط آن‌که دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+y=m-۱ \\ ۳x+(m-۲)y=۴-۲m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، آن است که دو خط

$$mx+y=m-۱ \text{ و } ۳x+(m-۲)y=۴-۲m$$

برهم منطبق باشند. لذا:

$$\begin{cases} mx+y=m-۱ \\ ۳x+(m-۲)y=۴-۲m \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{۳} = \frac{۱}{m-۲} = \frac{m-۱}{۴-۲m}$$

$$\frac{m}{۳} = \frac{۱}{m-۲} \Rightarrow m.(m-۲) = ۳ \Rightarrow m^۲ - ۲m - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (m+۱).(m-۳) = ۰ \Rightarrow m = -۱, ۳$$

اما اگر $m = ۳$، آن‌گاه

$$m = ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۳} = \frac{۱}{۳-۲} \neq \frac{۳-۱}{۴-۲\times۳}$$

پس جواب $m = ۳$ غیرقابل‌قبول و تنها جواب $m = -۱$ قابل‌قبول است.

۱۴۸. گزینه‌ی (۱).

درحالت‌کلی معادله یک دایره به‌مرکز (α, β) و به‌شعاع r به‌صورت $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$ می‌باشد. چون سه نقطه $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۱,-۲)$، روی دایره قرار دارند، پس در معادله‌ی دایره صدق می‌کنند.

$$(۰,۰) \Rightarrow (۰-\alpha)^۲ + (۰-\beta)^۲ = r^۲ \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ = r^۲$$

$$(۲,۱) \Rightarrow (۲-\alpha)^۲ + (۱-\beta)^۲ = r^۲ \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ - ۴\alpha - ۲\beta + ۵ = r^۲$$

$$(۱,-۲) \Rightarrow (۱-\alpha)^۲ + (-۲-\beta)^۲ = r^۲ \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ - ۲\alpha + ۴\beta + ۵ = r^۲$$

$$\begin{cases} r^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ \\ r^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - ۴\alpha - ۲\beta + ۵ \end{cases} \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - ۴\alpha - ۲\beta + ۵ \Rightarrow ۴\alpha + ۲\beta = ۵$$

$$\begin{cases} r^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ \\ r^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - ۲\alpha + ۴\beta + ۵ \end{cases} \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - ۲\alpha + ۴\beta + ۵ \Rightarrow ۲\alpha - ۴\beta = ۵$$

$$\begin{cases} ۴\alpha + ۲\beta = ۵ \\ ۲\alpha - ۴\beta = ۵ \end{cases} \Rightarrow^{\times ۲} \begin{cases} ۸\alpha + ۴\beta = ۱۰ \\ ۲\alpha - ۴\beta = ۵ \end{cases}$$

$$۱۰\alpha = ۱۵ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad ۲ \times \frac{۳}{۲} - ۴\beta = ۵ \Rightarrow \beta = -\frac{۱}{۲}$$

$$\alpha = \frac{۳}{۲} \quad ; \quad \beta = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow r^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ = (\frac{۳}{۲})^۲ + (-\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۹}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۰}{۴} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

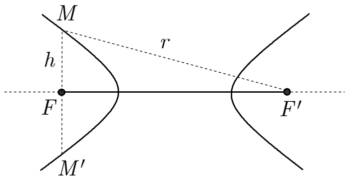
۱۴۹. گزینه‌ی (۳).

$$۳x^۲ - ۴y^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x - ۴y^۲ = ۹ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۳ - ۴y^۲ = ۹ + ۳$$

$$\Rightarrow ۳(x-۱)^۲ - ۴y^۲ = ۱۲ \Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۳} = ۱۲ \Rightarrow a^۲ = ۴ \, , \, b^۲ = ۳$$

$$c^۲ = b^۲ + a^۲ = ۳ + ۴ = ۷$$

اگر وتری گذرا بر کانون را بر محور کانونی عمود کنیم و محل تلاقی این عمود با هذلولی را به کانون دیگر هذلولی وصل کنیم، یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌شود که در آن با توجه به رابطه‌ی فیثاغورث داریم:



$$(MF')^2=(MF)^2+(FF')^2 \Rightarrow r^2=h^2+(FF')^2$$

می‌دانیم که در هر هذلولی، فاصله‌ی دو کانون هذلولی برابر $2c$ است، پس $FF'=2c$ ؛ و در نتیجه،

$$r^2=h^2+(FF')^2 \Rightarrow r^2=h^2+4c^2 \qquad (*)$$

هم‌چنین، می‌دانیم که تفاضل فواصل هر نقطه روی هذلولی از دو کانون هذلولی مقدار ثابتی است و برابر $2a$ می‌باشد. در نتیجه،

$$MF'-MF=2a \Rightarrow r-h=2a \Rightarrow r-h=4 \Rightarrow r=h+4 \qquad \text{(توجه داشته باشید که } a=2\text{)}$$

بنابراین، اگر $r=h+4$ را در رابطه‌ی $(*)$ قرار دهیم، آن‌گاه با توجه به این‌که $c^2=7$ است، خواهیم داشت:

$$r^2=h^2+4c^2 \Rightarrow (h+4)^2=h^2+4\times 7$$
$$\Rightarrow h^2+8h+16=h^2+28 \Rightarrow 8h=12 \Rightarrow h=\frac{3}{2} \Rightarrow MM'=3$$

۱۵۰. گزینه‌ی (۳).

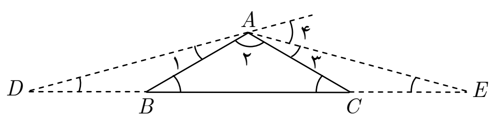
$$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \quad ; \quad 1\le x<2 \Rightarrow [x]=1$$
$$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \quad ; \quad 2\le x<3 \Rightarrow [x]=2$$

$$\int_{-1}^{3}(x+[x])dx=\int_{-1}^{0}(x+[x])dx+\int_{0}^{1}(x+[x])dx+\int_{1}^{2}(x+[x])dx+\int_{2}^{3}(x+[x])dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x-1)dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}(x+1)dx+\int_{2}^{3}(x+2)dx$$
$$=\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_{1}^{2}+\frac{1}{2}(x+2)^2\Big|_{2}^{3}$$
$$=\frac{1}{2}(1-4)+\frac{1}{2}(1-0)+\frac{1}{2}(9-4)+\frac{1}{2}(25-16)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=6$$

۱۵۱. گزینه‌ی (۴).

$$\int\frac{(1+\sqrt{x})^3-1}{x}dx=3\sqrt{x}.f(x)+c \Rightarrow \int\frac{1+3\sqrt{x}+3x+\sqrt{x^3}-1}{x}dx=3\sqrt{x}.f(x)+c$$
$$\Rightarrow \int\frac{3\sqrt{x}+3x+\sqrt{x^3}}{x}dx=3\sqrt{x}.f(x)+c$$
$$\Rightarrow \int(3x^{-\frac{1}{2}}+3+x^{\frac{1}{2}})dx=3\sqrt{x}.f(x)+c$$
$$\Rightarrow 3\times 2x^{\frac{1}{2}}+3x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c=3\sqrt{x}.f(x)+c$$
$$\Rightarrow 3\times x^{\frac{1}{2}}(2+x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{9}x)=3\sqrt{x}.f(x)$$
$$\Rightarrow f(x)=2+\sqrt{x}+\frac{2}{9}x$$

۱۵۲. گزینه‌ی (۳).



چون $\hat{A}_2=108^\circ$، پس در مثلث ABC، $\hat{A}_2 > A\hat{B}C+A\hat{C}B$. از طرفی چون $A\hat{B}C$ یک زاویه‌ی خارجی برای مثلث ADB و $A\hat{C}B$ نیز یک زاویه‌ی خارجی برای مثلث ACE است، پس

$$\hat{D}<A\hat{B}C \quad ; \quad \hat{E}<A\hat{C}B \Rightarrow \hat{D}+\hat{E}<A\hat{B}C+A\hat{C}B$$

چون $A\hat{B}C + A\hat{C}B < \hat{A}_2$، پس

$$\hat{D} + \hat{E} < A\hat{B}C + A\hat{C}B < \hat{A}_2 < \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE، زاویه‌ی خارجی رأس A، یعنی $\hat{A}_4$ است. از طرفی:

$BA = BD \Rightarrow$ مثلث ABD متساوی‌الساقین است. $\Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_1$

$AC = CE \Rightarrow$ مثلث ACE متساوی‌الساقین است. $\Rightarrow \hat{E} = \hat{A}_3$

و زاویه‌ی $\hat{A}_4$ یک زاویه‌ی خارجی برای مثلث ADE، است. پس:

$$\hat{A}_4 = \hat{B} + \hat{D}$$

چون مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر ۱۸۰ درجه است. پس برای مثلث ADE داریم:

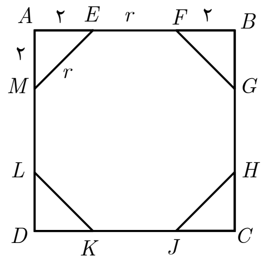
$\hat{D} + \hat{E} + D\hat{A}E = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} + \hat{E} + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ (چون $D\hat{A}E = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3$)

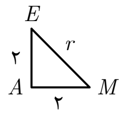
$\Rightarrow 2\hat{D} + 2\hat{E} + \hat{A}_2 = 180^\circ$ (چون $\hat{D} = \hat{A}_1$ و $\hat{E} = \hat{A}_3$)

$\Rightarrow 2\hat{D} + 2\hat{E} + 108^\circ = 180^\circ$ (چون $\hat{A}_2 = 108^\circ$)

$\Rightarrow 2\hat{D} + 2\hat{E} = 72^\circ \Rightarrow \hat{D} + \hat{E} = 36^\circ \Rightarrow \hat{A}_4 = 36^\circ$

۱۵۳. گزینه‌ی (۴).





$r^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$

طول ضلع مربع $ABCD$ = محیط مثلث AEM = $P_{AEM} = 2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$

مساحت مربع $ABCD$ = $S_{ABCD} = (4 + 2\sqrt{2})^2 = 16 + 8 + 16\sqrt{2} = 24 + 16\sqrt{2}$

مساحت مثلث AEM = $S_{AEM} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

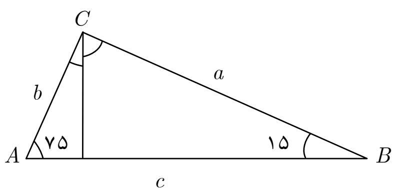
مساحت هشت ضلعی منتظم $EFGHJKLM$ = (مساحت مربع $ABCD$) $- 4 \times$ (مساحت مثلث AEM)

$$= S_{ABCD} - 4S_{AEM} = 24 + 16\sqrt{2} - 4 \times 2 = 16 + 16\sqrt{2}$$

۱۵۴. گزینه‌ی (۱).

چون $5 + 1 = 6$، پس مثلث مورد نظر یک مثلث قائم‌الزاویه است، که اندازه‌ی هر یک از زوایای آن برابر است با:

$$6x + x + 5x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15 \Rightarrow C = 6x = 90^\circ \quad ; \quad A = 5x = 75^\circ \quad ; \quad B = 15^\circ$$



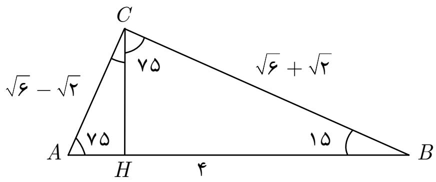
چون

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \times \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

پس بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که اضلاع مثلث ABC متناسب با اعداد 4 , $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ باشد.

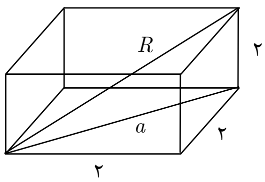
دراین‌صورت نتیجه می‌شود که $c=۴$ ، $b=\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$ و $a=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$. چون در مثلث‌های قائم‌الزاویه، کوچک‌ترین ارتفاع مثلث، همان ارتفاع وارد بر وتر است. پس کوچک‌ترین ارتفاع مثلث برابر است با:



$$HC=(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})\cos ۷۵^\circ=(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۶-۲}{۴}=۱$$

۱۵۵. گزینه‌ی (۳).

اگر مکعبی به‌طول یال ۲ واحد، در داخل کوچک‌ترین کره ممکن جای گرفته باشد، آن‌گاه هر هشت رأس مکعب روی محیط کره قرار خواهند گرفت. در نتیجه، شعاع کره‌ای که این مکعب را دربردارد، برابر نصف قطر مکعب خواهد بود. بنابراین،



$$a^۲=۲^۲+۲^۲=۸\Rightarrow a=۲\sqrt{۲}$$

$$R^۲=۲^۲+a^۲=۴+۸=۱۲\Rightarrow R=۲\sqrt{۳}\Rightarrow \text{شعاع کره}=r=\frac{R}{۲}=\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت کره}=S=۴\pi r^۲=۴\pi\times(\sqrt{۳})^۲=۱۲\pi$$