فهرست مطالب

خلاصه فصل اول

۱.۱) صورت‌های مبهم $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$

قضیه‌ی کوشی:

اگر توابع f و g در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و در فاصله‌ی باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد و اگر به ازای همه‌ی مقادیر x در بازه‌ی (a,b)، $g'(x)\neq 0$ آنگاه حداقل یک عدد همانند c در بازه‌ی (a,b) وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

دستور هوپیتال

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند و $g'(x)\neq 0$ باشد، در صورتی که جواب حد $\frac{f(x)}{g(x)}$ بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآید در اینصورت می‌توان از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کرد.

قاعده‌ی هوپیتال به این صورت است که از صورت و مخرج بصورت جداگانه مشتق گرفته و سپس حد $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را بررسی می‌کنیم.

۲.۱) صورت‌های مبهم دیگر

علاوه بر $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$، صورت‌های مبهم دیگری وجود دارند که عبارتند از: $\infty\times 0$، $\infty-\infty$، 0^0، ∞^0 و 1^∞.

در اینگونه مسائل، با روش‌های مناسب سعی می‌کنیم تا به یکی از حالت‌های $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده و از روش هوپیتال یا روش‌های دیگر استفاده کنیم.

۳.۱) انتگرال‌های ناسره (با حدود نامتناهی)

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,\infty)$ پیوسته و نامنفی باشد. مساحت ناحیه‌ی بین منحنی $y=f(x)$ و محور xها در بازه‌ی $[a,\infty)$ برابر است با:

$$a=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

ع f در بازه‌ی $[a,\infty)$ پیوسته باشد. در اینصورت انتگرال ناسره $\int_a^\infty f(x)\,dx$ به صورت ریف می‌شود:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

د فوق وجود داشته باشد، انتگرال ناسره را همگرا و در غیر اینصورت آن را واگرا یم.

تابع f در بازه‌ی $(-\infty, b]$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

انتگرال‌های ناسره (با انتگرال بی‌کران)

ع f در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. در اینصورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

د فوق وجود داشته باشد، انتگرال ناسره‌ی $\int_a^b f(x)\,dx$ را همگرا و در غیراینصورت واگرا گویند.

در بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته و $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ باشد در اینصورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

ع f به ازای عدادی چون c در بازه‌ی باز (a,b) دارای ناپیوستگی نامتناهی بوده ولی در نقاط $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت، تعریف می‌کنیم که:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

تگرال ناسره تنها وقتی همگراست که هر دو انتگرال طرف راست همگرا باشند.

۵.۱) فرمول تیلور

ضیه:

ـگر f یک تابع باشد به طوری که مشتق‌های اول تا nام آن در x=a وجود داشته باشند، در ـنصورت چند جمله‌ای:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nامین چند جمله‌ای تیلور f حول a می‌نامیم.

ـته: اگر $a=0$ را در فرمول قرار دهیم قضیه‌ی تیلور به قضیه‌ی مک لورن تبدیل می‌شود.

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ـضیه‌ی تیلور:

ـگر f یک تابع و n عددی طبیعی باشد بطوریکه: $f^{(n+1)}$ در بازه‌ی I وجود داشته باشد. اگر a و دو عدد متفاوت در I باشند، آنگاه عددی چون Z بین a و b وجود دارد به طوری که:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

ازای $n=0$، فرمول بالا به صورت $f(b)=f(a)=f'(z)(b-a)$ تبدیل می‌شود.

خلاصه فصل دوم

دنباله نامتناهی:

رض کنیم a_n یک دنباله و f تابعی باشد، به طوری که بازای هر $n \geq m$، $f(n) = a_n$ اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)$ آنگاه (a_n) همگراست و $\lim_{x\to\infty} a_n = L$ اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ آنگاه (a_n) واگراست و

$\lim_{n\to\infty} a_n =$ بنابراین $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$

گر $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ و g تابعی باشد که در $x = L$ پیوسته است، آنگاه $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(L)$

الهٔ ... $(r^n) = r, r^2, r^3, \dots$ را یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت r می‌گوییم.

الهٔ هندسی (r^n) به ازای $|r| > 1$ و $r = -1$ واگراست

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 1 & r = 1 \\ 0 & |r| < 1 \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

نبالهٔ (a_n) را کراندار می‌گوئیم اگر عددی چون M وجود داشته باشد بطوری که به ازای

$|a_n| \leq M$

:

گر (a_n) همگرا باشد، آنگاه (a_n) کراندار است.

گر (a_n) کراندار نباشد، آنگاه (a_n) واگراست.

:

ٔ (a_n) را یکنوا گوییم هرگاه یکی از دو حالت زیر باشد:

) به ازای هر n، $a_{n+1} \geq a_n$ (دنبالهٔ یکنوای غیر کاهشی)

به ازای هر n، $a_{n+1} \leq a_n$ (دنبالهٔ یکنوای غیر افزایشی)

دنبالهٔ کراندار و یکنوا همگراست.

سری نامتناهی:

بارت به صورت $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ را یک سری نامتناهی گوئیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

ر سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ یا وجود نداشته باشد، آنگاه سری $\sum a_n$ واگراست.

ری $\sum \frac{1}{n}$ را سری همساز می‌گویند و واگراست.

ر سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ را که در آن a و r اعداد حقیقی ستند و $a\neq 0$، یک سری هندسی می‌نامیم. a را جملهٔ اول و را قدر نسبت این سری هندسی می‌گوئیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} |r|<1 & \text{سری همگرا} \\ |r|\geq 1 & \text{سری وگرا} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

ر سری $\sum a_n$ واگرا و سری $\sum b_n$ همگرا باشد در این صورت

ف) $\sum a_n + \sum b_n$ واگراست

ب) اگر c عددی ناصفر باشد، سری $\sum ca_n$ نیز واگراست.

۳.۲ سری‌های با جملات نامنفی:

اگر $\sum a_n$ یک سری با جملات نامنفی و S_n مجموع جزئی nم آن باشد، در این صورت $\sum a_n$ مگراست اگر و فقط اگر دنبالهٔ (S_n) کراندار باشد.

آزمون انتگرال

ر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری و f یک تابع باشد که به ازای $x \geq 1$ نامنفی، پیوسته و کاهشی است و به ای $n \geq 1$، $f(n) = a_n$ در این صورت:

ف) $\sum a_n$ همگراست اگر انتگرال ناسرهٔ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد و

ب) $\sum a_n$ واگراست اگر $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ واگراست.

ضیهٔ مهم

ری $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$.

آزمون مقایسه

رض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری با جملات نامنفی باشند در این صورت:

ف) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد و به ازای هر $n \geq 1$، $a_n \leq b_n$ آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست و

$\sum a_n \leq \sum b_n$

اگر $\sum b_n$ واگرا باشد و به ازای هر $n \geq 1$ و $b_n \leq a_n$، آنگاه $\sum a_n$ نیز واگراست.

مون مقایسه حدی

ں کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری باشند به طوری که به ازای هر n، $a_n \geq 0$ و $b_n > 0$ در این ت:

) $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ (در واقع $L \neq 0$)، آنگاه یا هر دو سری همگرا یا هر دو واگرا هستند.

اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ و $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست.

اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ و $\sum b_n$ وگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ وگراست.

سری‌های متناوب:

مون سری‌های متناوب

ں کنیم (a_n) یک دنبالهٔ مثبت و غیر افزایشی باشد، یعنی به ازای هر k، $a_k \geq a_{k+1}$ به ی که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، در این صورت سری‌های متناوب زیر همگرا هستند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

:

ں کنیم سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ در شرایط آزمون سری متناوب صدق می‌کند. در سورت خطای حاصل از تقریب مجموع این سری همگرا با مجموع جزئی nم آن یعنی متر از a_{n+1} است.

همگرایی مطلق و مشروط

سری $\sum |a_n|$ همگرا باشد، می‌گوئیم که سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

سری $\sum a_n$ همگرا ولی $\sum |a_n|$ واگرا باشد (یعنی سری همگرای مطلق نباشد) آنگاه م که سری $\sum a_n$ همگرای مشروط است.

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه همگراست و $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$

:

ں کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری باشد در این صورت:

الف) آزمون مقایسه: اگر به ازای هر $n \geq 1$، $|a_n| \leq |b_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) آزمون مقایسه حدی: اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = L > 0$ و $\sum |b_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

*** آزمون نسبت**

فرض کنیم جمله‌های سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ غیر صفر باشند در این صورت:

الف) اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ آنگاه سری داده شده، همگرای مطلق است.

ب) اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ یا $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$، سری داده شده واگراست.

پ) اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$، نتیجه‌ای در مورد همگرایی یا واگرایی این سری نمی‌توان به دست آورد. یعنی این سری می‌تواند همگرا یا واگرا باشد.

*** آزمون ریشه**

فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جمله‌های ناصفر باشد. در این صورت:

الف) اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$، سری داده شده همگرای مطلق است.

ب) اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ یا $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$، سری داده شده واگراست.

پ) اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$، هیچ نتیجه‌ای در مورد همگرایی یا واگرایی این سری به دست نمی‌آید. یعنی این سری می‌تواند همگرا یا واگرا باشد.

* فرض کنیم (a_n) یک دنباله باشد. اگر

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1 \quad \text{یا} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$$

آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

خلاصه فصل سوم

۱) سریهای توانی:

یف

سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a^n x^n + \dots$ را یک سری توانی به مرکز ۰ می‌گوییم، اگر c عدد حقیقی باشد، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2$ را یک سری توانی به مرکز c می‌نامیم.

ه: برای سادگی امر، حتی وقتی x=c، فرض می‌کنیم که $(x-c)^0 = 1$

یه:

) اگر سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای عدد ناصفر $x=a_1$ همگرا باشد، آنگاه به ازای هر مقدار x که $|x| < |x_1|$ همگرا (ی مطلق) است.

اگر سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای عدد ناصفر $x=x_2$ واگرا باشد، آنگاه به ازای هر مقدار x که $|x| > |x_2|$ واگراست.

یه:

$\sum a_n x^n$ یک سری توانی باشد، آنگاه دقیقاً یکی از حالتهای زیر رخ می‌دهد.

) این سری تنها به ازای $x = 0$ همگراست.

این سری به ازای هر مقدار x همگرا (ی مطلق) است.

عدد مثبت r وجود دارد به طوری که سری فوق همگرای مطلق است اگر $|x| < r$ و واگراست اگر $|x| > r$.

به جای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ را در نظر بگیریم، آنگاه با قرار ن x-c به جای x در حالتهای (الف) و (ج) قضیه قبل، این احکام به صورت زیر تبدیل شوند:

) این سری تنها به ازای x=c همگراست.

عدد مثبت r وجود دارد به طوری که این سری همگرای مطلق است اگر $|x-c| < r$ و واگراست اگر $|x-c| > r$.

ریف:

د r مذکور در قضیه قبل و در تذکر زیر آن را شعاع همگرائی سری توانی می‌گوئیم. اگر الت (الف) رخ دهد، $r = 0$ و اگر حالت (ب) صادق باشد، شعاع همگرایی را $r = \infty$ ریف می‌کنیم. مجموعهٔ همهٔ مقادیر x راکه به ازای آنها سری توانی داده شده همگراست. ره همگرائی آن سری می‌گوئیم.

ته: سری $\sum_{n=1}^{\infty}$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگراست. (به ازای $p = 1$ این سری سری همساز می‌گویند.)

۲.) مشتقگیری و انتگرالگیری از سریهای توانی

ضیه مشتق‌گیری سریهای توانی

ر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرائی $r > 0$ باشد آنگاه:

ف) شعاع همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$، که حاصل از مشتقگیری جمله به جملهٔ سری داده شده است، برابر با r است.

ب) به ازای هر مقدار x در بازه $(-r,r)$

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n)$$

گر چه قضیه مشتقگیری سریهای توانی بیان می‌کند که شعاعهای همگرائی دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ یکسانند، ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که بازه‌های همگرائی آنها نیز کی است. به عنوان بازه همگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ برابر است با $[-1,1)$، در حالی که بازه همگرائی سری مشتق آن یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ برابر با $(-1,1)$ است.

ذکر: اگرچه قضیه مشتقگیری بیان می‌کند که مشتق سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، با شعاع همگرائی ناصفر، وجود دارد ولی چون سری مشتق شده خود یک سری توانی با همان شعاع همگرائی است، از این سری نیز می‌توان مشتق گرفت و درنتیجه سری داده شده دوباره مشتقپذیر است. با تکرار این روند نتیجه می‌گیریم که همه مشتقهای یک سری توانی با شعاع همگرائی $r \geq 0$ در بازه $(-r,r)$ وجود دارند.

قضیه انتگرالگیری سریهای توانی

اگر شعاع همگرائی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر با $r > 0$ باشد، آنگاه؛

) شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$، حاصل از انتگرالگیری جمله به جمله از سری شده، برابر با r است.

به ازای هر مقدار x در بازه (-r,r)، داریم:

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^x a_n t^n dt\right]$$

) سری تیلور

ابع f را بتوان به صورت سری $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نمایش داد، به این نمایش، نمایش سری لورن تابع f گویند.

ابع f را بتوان به صورت سری $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ نمایش داد، به این نمایش، نمایش ی تیلور تابع f گویند.

:ه

همه مشتقهای f در بازه بازی شامل c چون I وجود داشته باشند، آنگاه این توابع را وان به ازای مقادیر x در I توسط سری تیلور $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ نمایش داد اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} = 0$$

ر آن z عددی بین c و x است.

) سری دو جمله‌ای

ه دو جمله‌ای

k یک عدد حقیقی باشد، آنگاه اگر $|x| < r$،

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^n$$

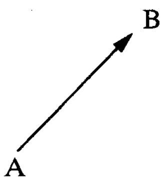
: چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ به ازای هر x همگراست، پس به ازای هر x، $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0$ به ین ترتیب چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n!}$ به ازای هر x همگراست، پس به ازای هر x،

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-c)^n}{n!}\right|$$

خلاصه فصل چهارم

) بردار و هندسه تحلیلی:

بردار به طور هندسی پاره خطی جهت‌دار است.



ردار را با $\overline{AB}$ نمایش می‌دهیم، نقطه‌ی A را مبدأ و نقطه‌ی B را انتهای بردار B می‌نامیم.
پاره خط AB را اندازه‌ی بردازه بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم و با $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ نمایش می‌دهیم. جهت
خط AB را جهت یا سوی بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم. دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را برابر می‌گوییم
ندازه و جهت آنها یکی باشد.
$\overrightarrow{AC}$ مجموع دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ می‌باشد.

ب:

دار (جبری) در صفحه مختصات یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی است. x و y را
،های بردار (x,y) می‌نامیم.

:

می‌کنیم V مجموعه‌ی بردارهای واقع بر یک صفحه باشد جمع برداری روی مجموعه
ای ویژگی‌های زیر است. به ازای هر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

$\vec{a}+\vec{\circ}=\vec{a}$ که در آن $\vec{\circ}=(\circ,\circ)$

$$\vec{a}+(\overrightarrow{-a})=\vec{\circ}$$

قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در V و α و β دو اسکالر باشند. آنگاه

الف) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

ب) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

پ) $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$

ت) $1\vec{a}=\vec{a}$

ث) $0\vec{a}=\vec{0}=\vec{a}0$

قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در V باشند آنگاه تفاضل $\vec{a}-\vec{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

قضیه:

اندازه بردار $\vec{a}=(a_1,a_2)$ برابر است با $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

تعریف:

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را موازی می‌گوییم اگر اسکالر α وجود داشته باشد بطوری که:

$$\vec{b}=\alpha\vec{a}$$

قضیه:

اگر $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد، آنگاه $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\vec{a}$ بردار واحد هم جهت با $\vec{a}$ است.

۲.۴) ضرب عددی:

تعریف:

فرض می‌کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. حاصلضرب عددی، داخلی یا نقطه‌ای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با $\vec{a}.\vec{b}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

:

کنیم $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار و α یک اسکالر باشد. در این صورت

$$\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^{2}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$$

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$$

$$(\alpha\vec{a}).\vec{b}=\alpha(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(\alpha\vec{b})$$

$$\vec{0}.\vec{a}=$$

:

زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد آنگاه

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

:

دار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود بر هم هستند اگر و فقط اگر

$$\vec{a}.\vec{b}=0$$

ف:

های α، β و γ در بازه $[0,\pi]$، به ترتیب بین بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روی محورهای ات، و بردار ناصفر β را زاویه‌های هادی β می‌نامیم.

ف:

β ،α و γ زاویه‌های هادی $\vec{a}$ باشند، آنگاه $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوس‌های هادی $\vec{a}$ میم.

ف:

کنیم $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد، تصویر برداری $\vec{b}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با:

$$pr_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^{2}}\vec{a}$$

۳.) ضرب برداری:

ریف: فرض کنیم $\vec{a}=(a_{۱},a_{۲},a_{۳})$ و $\vec{b}=(b_{۱},b_{۲},b_{۳})$ دو بردار باشند. حاصلضرب داری $\vec{a}$ در $\vec{b}$ برداری است به نمایش $\vec{a}\times\vec{b}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_{۲}b_{۳}-a_{۳}b_{۲},a_{۳}b_{۱}-a_{۱}b_{۳},a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱})$$

میه:

ر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و α یک اسکالر باشد، آنگاه

ـ) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{۰}$

) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

میه:

ض کنیم $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند. در این صورت

ـ) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$

) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

میه:

ر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشند، آنگاه

ـ) $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ ، $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰$

نتیجه اگر $\vec{a}\times\vec{b}\neq۰$ آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر دو بر دار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

) اگر θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد $(۰\le\theta\le\pi)$ آنگاه:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

نتیجه دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=۰$

۴.) خط در فضا:

خط L در فضا (یا صفحه) توسط دو نقطه یا یک نقطه و بردار موازی با L مشخص می‌شود.

دله:

$$\vec{p}=\vec{p}_{\circ}+t\vec{a}$$

عادله برداری خط می‌گویند که در آن $\vec{a}$ برداری موازی خط و $\vec{p}_{\circ}$ یک نقطه از خط باشد. این معادله برداری معادل سه معادله عددی می‌باشد که به معادلات پارامتری خط وفند.

$$\begin{cases} x=x_{\circ}+ta_{1} \\ y=y_{\circ}+ta_{2} \\ z=z_{\circ}+ta_{3} \end{cases}$$

حذف t در معادلات پارامتری خط l معادلات متقارن یا دکارتی به صورت زیر به دست آیند.

$$\frac{x-x_{\circ}}{a_{1}}=\frac{y-y_{\circ}}{a_{2}}=\frac{z-z_{\circ}}{a_{3}}$$

معادلات متقارن خط اگر $a_{1}=\circ$ ولی a_{2} و a_{3} مخالف صفر باشند در این صورت خط l زی با صفحه yz است. و معادلات متقارن آن عبارتند از:

$$x=x_{\circ} \quad , \quad \frac{y-y_{\circ}}{a_{2}}=\frac{z-z_{\circ}}{a_{3}}$$

$a_{1}=a_{2}=\circ$ ولی $a_{3}\neq\circ$ در این صورت خط l موازی محور z است و معادلات پارامتری عبارتند از:

$$x=x_{\circ} \;,\; y=y_{\circ} \;,\; z=z_{\circ}+ta_{3}$$

نتیجه معادلات متقارن آن عبارتند از:

$$x=x_{\circ} \;, y=y_{\circ}$$

ت‌های دیگر شبیه به این دو حالت هستند.

له نقطه از خط

له نقطه p_{1} از خط l عبارتست از:

$$d=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{p_{\circ}p_{1}}|}{|\vec{a}|}$$

در آن $p_{\circ}$ نقطه‌ای روی خط و $\vec{a}$ بردار موازی خط می‌باشد.

۵.۱) صفحه در فضا

ادله صفحه عمود بر بردار $\vec{N}=(a,b,c)$ و گذرنده از نقطه‌ی $p_{\circ}(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ عبارتست از:

$$ax+by+cz=d$$

ه در آن $d=ax_{\circ}+by_{\circ}+cz_{\circ}$

یا به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$a(x-x_{\circ})+b(y-y_{\circ})+c(z-z_{\circ})=0$$

ریف:

. صفحه با بردارهای قائم $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ را موازی گوئیم اگر $\vec{N}_1$ موازی با $\vec{N}_2$ و عمود گوییم ر $\vec{N}_1$ عمود بر $\vec{N}_2$ باشد.

صله نقطه‌ی $p_{\circ}(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ عبارتست از:

$$h=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+cz_{\circ}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

خلاصه فصل پنجم

بردار و ماتریس:

ـ: هر nـتایی $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ را یک بردار (سطری) و هر x_i را یک مولفهٔ آن می‌نامیم.

ـ: فرض کنیم $u=(a_1,\ldots,a_n)$, $v=(b_1,\ldots,b_n)$ دو بردار n مولفه‌ای (مرتبهٔ n) و α یک لر (عدد حقیقی) باشد مجموع و مضرب اسکالر بردارها به صورت زیر تعریف وند:

$$u+v=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$$

$$\alpha u=(\alpha a_1,\alpha a_2,\ldots,\alpha a_n)$$

:

کنیم u و v و w سه بردار مرتبهٔ n و α و β دو اسکالر باشند. در این صورت:

قانون تعویض‌پذیری جمع: $u+v=v+u$

انون شرکت‌پذیری جمع: $u+(v+w)=(u+v)+w$

ضو خنثی جمع: بردار $\theta=(0,\ldots,0)$ به نام بردار ۰ مرتبهٔ n وجود دارد که به ازای هر مرتبهٔ n چون u

$$u+\theta=u$$

تناظر با بردار u یک بردار به نمایش $-u$ و به نام قرینه u وجود دارد به طوری که

$$u+(-u)=\theta$$

$$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha$$

$$(\alpha+\beta)u=\alpha u+$$

$$(\alpha\beta)u=\alpha(\beta$$

$$1u=$$

ـ: طول یا اندازه بردار $u=(a_1,\ldots,a_n)$ برابر است با

$$|u|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$$

۲.۵) ماتریس

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی به صورت

$$\begin{matrix} {}_{۱۲} & \cdots & a_{۱j} & \cdots & a_{۱n} \\ {}_{۲۲} & \cdots & a_{۲j} & \cdots & a_{۲n} \\ & & \vdots & & \vdots \\ {}_{i۲} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \vdots \\ {}_{m۲} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\Bigg]$$

را یک ماتریس m در n (m سطری و n ستونی) می‌نامیم. هر a_{ij} یک درایه یا عنصر این ماتریس نامیده می‌شود.

تعریف: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دو ماتریس هم اندازه و α یک عدد حقیقی باشد. در این صورت مجموع و مضرب اسکالر ماتریسها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

$\alpha A=(\alpha a_{ij})_{m\times n}$

قضیه:

فرض کنیم A، B و C سه ماتریس $m\times n$ و α و β دو اسکالر باشند در این صورت:

الف) $A+B=B+A$

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$

ج) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

د) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

تعریف: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times p}$ و $B=(b_{ij})_{p\times n}$ دو ماتریس باشند. حاصلضرب A در B ماتریس $m\times n$ و $AB=c=(c_{ij})_{m\times n}$ است به طوری که به ازای هر $i=۱,۲,\ldots,m$ و $j=۱,۲,\ldots,n$

$$c_{ij}=\sum_{k=۱}^{p}a_{ik}b_{kj}$$
$$=a_{i۱}b_{i۱}+a_{i۲}b_{۲j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}$$

قضیه:

فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یک ماتریس $m\times n$ باشد. در این صورت $AI_n=A=I_mA$

:

کنیم $A=(a_{ij})_{m\times p}$، $B=(b_{ij})_{p\times q}$ و $C=(c_{ij})_{q\times n}$. در این صورت $A(BC)=(AB)C$

ف: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times n}$. در این صورت ترانهاده A یک ماتریس $n\times m$ به نمایش
ست که عنصر (i , j) آن برابر با عنصر (j , i)ام ماتریس A است به عبارت
$A^T=(b_{ij})_{n\times m}$، که در آن به ازای هر i و j $b_{ij}=a_{ji}$

:

کنیم A و B دو ماتریس $m\times n$ و α یک اسکالر باشد. در این صورت:
$(A^T)^T=A$ ترانهادهٔ یک ماتریس مساوی خودش است.
$(\alpha A)^T=\alpha A^T$
$(A+B)^T=A^T+B^T$

:

A و B دو ماتریس مربعی باشند آنگاه $(AB)^T=B^TA^T$

ف: ماتریس مربعی A را متقارن گوئیم اگر $A=A^T$

) دترمینان

ف: اگر A یک ماتریس ۲×۲ به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد آنگاه دترمینان A را عدد
ی ad-bc تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

ف: برای هر a_{ij} در ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$، همسازه a_{ij} برابر است با عدد

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

ف: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{n\times n}$ در این صورت به ازای هر $i=1,\dots,n$ و $j=1,\dots,n$
ینان A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det A=|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}$$

$$\det A=|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}$$

قضیه:

۱) اگر ماتریس A شامل یک سطر (یا ستون) صفر باشد، آنگاه $|A| = ۰$

۲) اگر تمام عناصر یک سطر (یا ستون) ماتریس A در عددی ضرب شود، مقدار دترمینان این ماتریس در آن عدد ضرب می‌شود.

۳) اگر دو سطر (یا ستون) یک ماتریس را با هم عوض کنیم، علامت مقدار دترمینان تغییر می‌کند.

۴) اگر دو سطر (یا ستون) ماتریسی یکسان باشند، مقدار دترمینان آن ماتریس صفر است.

۵) اگر مضرب اسکالری از یک سطر (یا ستون) را با سطر (یا ستون) دیگری جمع کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

۶) اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند، آنگاه $|AB| = |A|\,|B|$

۷) اگر A یک ماتریس قطری باشد، دترمینان A برابر با حاصلضرب عناصر قطری آن است.

۸) $|A| = |A^T|$

۹) $|I| = ۱$

۴.۵) وارون ماتریس

تعریف: ماتریس مربعی A را وارون‌پذیر (یا نامنفرد) گوئیم اگر ماتریس مانند B وجود داشته باشد به طوری که $AB = I = BA$

قضیه: اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ وارون‌پذیر باشند آنگاه:

الف) ماتریس AB وارون‌پذیر است و $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$

ب) $(A^{-۱})^{-۱} = A$

ج) ماتریس A^T وارون‌پذیر است و $(A^T)^{-۱} = (A^{-۱})^T$

وارون ماتریس‌ها را به دو روش تحویل سطری و روش الحاقی می‌توان محاسبه کرد.

محاسبه وارون ماتریس به روش تحویل سطری:

ماتریس مرکب را تشکیل می‌دهیم:

$$A_M = \left[\begin{array}{ccc|cccc} a_{۱۱} & \dots & a_{۱n} & ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & \dots & a_{nn} & ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{array}\right]$$

$a_{11}=$ بود، سطر اول A_M را با سطر iام که $a_{i1}\neq 0$ عوض می‌کنیم. پس می‌توانیم فرض که $a_{11}\neq 0$. سطر اول A_M را در $\frac{1}{a_{11}}$ ضرب می‌کنیم. حال با استفاده از سطر اول، عناصر اول A_M بجز عنصر اول را به صفر تبدیل می‌کنیم. یعنی مضاربی از سطر اول را به های دیگر اضافه یا کم می‌کنیم. به همین ترتیب ستون دوم ماتریس A_M را توسط سطر ی به جزء سطر اول، پاک می‌کنیم. این روند را تا جائی ادامه می‌دهیم که A_M به صورت I] در آید.

ن صورت $B=A^{-1}$. اگر در مرحله‌ای از این روند یک سطر صفر در نیمه سمت چپ س مرکب به دست آید، ماتریس A وارون‌پذیر نیست.

سبه وارون ماتریس به روش الحاقی:

ـ: ماتریس الحاقی ماتریس مربعی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را با adjA نشان می‌دهیم و آن را به ت $\text{adj}A=(A_{ij})^T$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر adjA ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های ت.

:

A یک ماتریس n×n باشد آنگاه

$$A(\text{adj}A)=(\text{adj}\,A)A=(\det A)I_n$$

جه اگر $\det A\neq 0$ آنگاه A^{-1} وجود دارد و

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj}\,A)$$

) دستگاه معادلات خطی

ـ: هر معادله به صورت $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$ با مجهولهای $x_1,x_2,\dots,x_n$ را معادلهٔ n مجهولی می‌نامیم. هر nتائی $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ از اعداد حقیقی که در این معادله ق کند، یک جواب آن نامیده می‌شود.

ف: مجموعه‌ای از معادلات خطی چون

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=b_m
\end{aligned}$$

را یک دستگاه m معادله خطی n مجهولی می‌نامیم. هر nتائی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از اعداد حقیقی که در هر یک از این معادلات صدق کند، یک جواب این دستگاه می‌باشد.

روشهای حل دستگاه معادلات خطی:

۱ـ روش حذفی گاوس ۲ـ دستور کرامر ۳ـ نمایش ماتریسی و استفاده از ماتریس وارون

روش حذفی گاوس:

ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times n}$، ماتریس ضرایب دستگاه می‌باشد. با به کار بردن اعمال سطری مقدماتی روی A_M، ستونهای ماتریس A را تا جائی که ممکن باشد پاک می‌کنیم. وقتی همه سطرهای A به‌کار رفتند یا سطری به صورت $(0, \dots, 0 \mid C)$ به دست آمد که در آن $C \neq 0$ این روند را متوقف می‌کنیم. اگر جوابهائی برای این دستگاه وجود داشته باشد، همگی به دست می‌آیند. اگر سطری به صورت $(0, 0, \dots, 0 \mid C)$ به دست آید که $C \neq 0$، آنگاه این دستگاه هیچ جوابی ندارد.

$$A_M = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

دستور کرامر:

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ماتریس ضرایب این دستگاه باشد. به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ فرض کنید Bi ماتریس حاصل از جایگزین کردن ستون iام ماتریس A توسط ستون

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

باشد. اگر $|A| \neq 0$، آنگاه دستگاه فوق دارای جواب منحصر به فرد زیر است

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|B_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

دستور کرامر برای حل دستگاه معادله خطی n معادله n مجهول به کار می‌رود.

نمایش ماتریسی دستگاه و استفاده از ماتریس وارون:

دستگاه معادلات خطی

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

توان به صورت معادله ماتریسی $AX=B$ نمایش داد که در آن

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \quad , \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

یک ماتریس $n\times n$ وارونپذیر باشد آنگاه

$$X=A^{-1}B$$

پایه و بعد

ف: می‌گوئیم که مجموعه $\{u_1,u_2,\dots,u_k\}$ از اعضای فضای برداری R^n دارای ل خطی است اگر هیچ مجموعه‌ای از اعداد $a_1,a_2,\dots,a_k$ بجز $a_1=a_2=\dots=a_k=0$ نداشته باشد به طوری که

$$a_1u_1+a_2u_2+\dots+a_ku_k=(0,\dots,0)$$

رت دیگر، مجموعه $\{u_1,\dots,u_k\}$ دارای استقلال خطی است اگر و تنها اگر جواب $x_1u_1+x_2u_2+\dots+x_ku_k=(0,\dots,0)$ برابر با $x_1=x_2=0=x_k=0$ باشد در غیر این ت مجموعه فوق دارای وابستگی خطی می‌باشد.

: هر مجموعهٔ n عضوی در R^n که دارای استقلال خطی باشد، یک پایه و n را بعد بردای R^n می‌گوئیم.

$A=\{u_1,\dots,u_n\}$ پایه‌ای برای R^n باشد، آنگاه متناظر با هر بردار u در R^n اسکالرهای ر به فردی چون $a_1,a_2,\dots,a_n$ وجود دارند که

$$u=a_1u_1+a_2u_2+\dots+a_nu_n$$

تبدیل خطی و بردار ویژه

: فرض کنیم V و W دو فضای برداری باشند تابع $T:V\to W$ یک تبدیل خطی است اگر

به ازای هر دو بردار u و v در V، $T(u+v)=T(u)+T(v)$

به ازای هر بردار u و v در V و هر اسکالر α، $T(\alpha u)=\alpha T(u)$

قضیه:

برای هر تبدیل خطی $T:R^n \to R^m$ یک ماتریس $m\times n$ چون A وجود دارد به طوری که به ازای هر بردار X در R^n، $T(X) = AX$. ستونهای این ماتریس به ترتیب عبارتند از

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right), \ldots, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

A را ماتریس نمایشگر T (نسبت به پایه‌های متعارف) می‌نامیم.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنید T تبدیل خطی از R^n به روی R^n باشد. اگر برای اسکالری چون λ بردار ناصفر X وجود داشته باشد به طوری

$$T(X) = \lambda X$$

آنگاه λ را یک مقدار ویژه T و X را یک بردار ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامیم.

خلاصه فصل ششم

۱) حد، مشتق و انتگرال:

ریف: هر تابع را که دامنهٔ آن زیر مجموعه‌ای از R و برد آن زیر مجموعه‌ای از فضای داری R^n باشد یک تابع برداری می‌نامیم. به عنوان مثال:

$$\vec{F}(t)=(1-t,2t,3)=(1-t)\vec{i}+2t\vec{j}+3\vec{k}$$

ک تابع برداری می‌باشد. متناظر با هر تابع برداری $\vec{F}$ سه تابع حقیقی $f_1(t)$، $f_2(t)$ و $f_3(t)$ به م مولفه‌های $\vec{F}$ وجود دارند.

$$\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$$

. صورتی که دامنه تابع برداری مشخص نباشد، دامنه آن مجموعهٔ همه اعداد حقیقی t ست که به ازای آنها فرمول داده شده برای تابع برداری با معنی باشد.

ر به ازای هر t، p(x,y,z) را نقطهٔ انتهایی بردار $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ در فضا در نظر یریم، آنگاه وقتی t در دامنهٔ F تغییر می‌کند، این نقطه بر روی یک منحنی با معادلات امتری زیر حرکت می‌کند که به آن نگاره تابع برداری $\vec{F}(t)$ می‌گوییم.

$$x=f_1(t)\ ,\ y=f_2(t)\ ,\ z=f_3(t)$$

ریف: فرض کنیم $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ یک تابع برداری باشد. در این صورت $\lim\limits_{t\to a}\vec{F}(t)=(\lim\limits_{t\to a}f_1(t),\lim\limits_{t\to a}f_2(t),\lim\limits_{t\to a}f_3(t$ مشروط بر این که حدهای f_1 و f_2 و f_3 تی t به a میل می‌کند، وجود داشته باشند.

میه: فرض کنیم $\vec{F}$ و $\vec{G}$ دو تابع برداری و f یک تابع حقیقی باشد. اگر $\lim\limits_{t\to a}\vec{F}(t)$ و $\lim\limits_{t\to a}\vec{G}(t)$ و $\lim\limits_{t\to a}f(t)$ وجود داشته باشند.

ب) $$\lim_{t\to a}(\vec{F}(t)+\vec{G}(t))=\lim_{t\to a}\vec{F}(t)+\lim_{t\to a}\vec{G}(t)$$

() $$\lim_{t\to a}(\vec{F}(t)-\vec{G}(t))=\lim_{t\to a}\vec{F}(t)-\lim_{t\to a}\vec{G}(t)$$

$$\lim_{t\to a} f(t)\,\vec{F}(t)=\lim_{t\to a} f(t)\,\lim_{t\to a}\vec{F}(t)$$

$$\lim_{t\to a}\left[\vec{F}(t).\vec{G}(t)\right]=\lim_{t\to a}\vec{F}(t).\lim_{t\to a}\vec{G}(t)$$

$$\lim_{t\to a}\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]=\lim_{t\to a}\vec{F}(t)\times\lim_{t\to a}\vec{G}(t)$$

ف: ۱) تابع برداری $\vec{F}$ را در a پیوسته گوییم اگر

) $\vec{F}(a)$ معین باشد.

) $\lim_{t\to a}\vec{F}(t)$ وجود داشته باشد.

$\lim_{t\to a}\vec{F}(t)=\vec{F}(a)$

ابع برداری $\vec{F}$ را در بازهٔ I پیوسته می‌گوییم اگر در هر $a\in I$ پیوسته باشد.

ف: فرض کنیم $\vec{F}$ یک تابع برداری و a یک عدد حقیقی باشد. در این صورت مشتق $\vec{F}$ برابر است با:

$$\left.\frac{d\vec{F}(t)}{dt}\right|_{t=a}=\vec{F}'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(a+h)-\vec{F}(a)}{h}$$

ه: اگر $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ آنگاه:

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=(f'_1(t),f'_2(t),f'_3(t))$$

ه: اگر توابع برداری $\vec{F}$ ، $\vec{G}$ و تابع حقیقی f در بازه I مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

)

$$\frac{d\,[\vec{F}(t)+\vec{G}(t)]}{dt}=\frac{d\vec{F}(t)}{dt}+\frac{d\vec{G}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\,[\vec{F}(t)-\vec{G}(t)]}{dt}=\frac{d\vec{F}(t)}{dt}-\frac{d\vec{G}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\,[f(t)\;\vec{F}(t)]}{dt}=\frac{d\vec{F}(t)}{dt}\;\vec{F}(t)+f(t)\frac{d\vec{F}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\,[\vec{F}(t).\vec{G}(t)]}{dt}=\frac{d\vec{F}(t)}{dt}.\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\frac{d\vec{G}(t)}{dt}$$

(: $\dfrac{d\vec{F}(u)}{dt}=\dfrac{du}{dt}\,\dfrac{d\vec{F}(u)}{du}$ که در آن $u=f(t)$

ریف: اگر $\vec{F}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ آنگاه:

$$\int_a^b \vec{F}(t)\,dt=\left(\int_a^b f_1(t)\,dt\right)\vec{i}+\left(\int_a^b f_2(t)\,dt\right)\vec{j}+\left(\int_a^b f_3(t)\,dt\right)\vec{k}$$

ضیه: اگر توابع برداری $\vec{F}$ و $\vec{G}$ در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و α یک اسکالر $\vec{C}$ یک بردار باشد، گاه:

ف) $\int_a^b \left[F(t)+G(t)\right]dt=\int_a^b \vec{F}(t)\,dt+\int_a^b \vec{G}(t)\,dt$

ب) $\int_a^b \alpha\vec{F}(t)\,dt=\alpha\int_a^b \vec{F}(t)\,dt$

($\int_a^b \vec{C}\cdot\vec{F}(t)\,dt=\vec{C}\int_a^b \vec{F}(t)\,dt$

ریف: انتگرال نامعین تابع برداری $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ به صورت زیر تعریف

ی‌شود:

$$\int \vec{F}(t)\,dt=\left[\int f_1(t)\,dt\right]\vec{i}+\left[\int f_2(t)\,dt\right]\vec{j}+\left[\int f_3(t)\,dt\right]\vec{k}+\vec{C}$$

ه در آن $\vec{C}$ هر عضو دلخواه R^3 است.

.۲) سرعت و شتاب:

دار موضع: $\vec{R}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

رعت: $\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}+\dfrac{dz}{dt}\vec{k}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

تاب: $\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=\vec{R}''(t)=x''\vec{i}+y''\vec{j}+z''\vec{k}$

.۳) مماس و قائم بر منحنی:

ریف: بردار مماس بر منحنی هموار C را با $\vec{T}(t)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف

ود:

$$\vec{T}(t)=\frac{R'(t)}{\left|R'(t)\right|}=\frac{d\vec{R}/dt}{\left|d\vec{R}/dt\right|}$$

ـ: بردار قائم بر منحنی هموار C را با $\vec{N}(t)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف

ود:

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left|T'(t)\right|}=\frac{d\vec{T}/dt}{\left|d\vec{T}/dt\right|}$$

دار شتاب یعنی $\vec{A}(t)$ را به دو مولفه در جهت‌های بردارهای مماس و قائم $\vec{T}$ و $\vec{N}$

کنیم، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{A}(t)=A_T(t)\,\vec{T}(t)+A_N(t)\,\vec{N}(t)$$

آن:

$$A_T(t)=\frac{d}{dt}\left|\vec{V}(t)\right|,\quad A_N(t)=\left|\vec{V}(t)\right|\left|\vec{T}'(t)\right|$$

است که:

$$\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{(A_N(t))^{۲}+(A_T(t))^{۲}}$$

خمیدگی (انحنا):

ـ: اگر $\vec{T}(t)$ بردار وحد مماس بر منحنی C در نقطه p و s نمایش طول قوس باشد،

خمیدگی c در p توسط فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$k=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

ـهایی برای محاسبه خمیدگی

ض کنیم که جسمی بر منحنی C که توسط $\vec{R}(t)$ داده شده است حرکت می‌کند در

ورت:

$$k=\frac{\left|\vec{V}\times\vec{A}\right|}{\left|\vec{V}\right|^{۳}}$$

آن $\vec{V}=\vec{R}'(t)$ و $\vec{A}=\vec{V}'$ می‌باشند.

۲ـ فرض کنیم که جسمی بر منحنی C در صفحه xy که توسط معادلات پارامتری $y = g(t)$ و $x = f(t)$ داده شده است حرکت می‌کند. آنگاه:

$$k = \frac{\left| f'(g)\, g''(t) - g'(t)\, f''(t) \right|}{\left[(f'(t))^{2} + (g'(t))^{2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

۳ـ فرض کنید منحنی C توسط معادله دکارتی $y=g(x)$ داده شده باشد. آنگاه:

$$k = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^{2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

خلاصه فصل هفتم

۱ توابع چند متغیره:

یف: تابع f که دامنهٔ آن زیر مجموعه‌ای از R^n و برد آن مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد ک تابع (حقیقی) n متغیره می‌گوییم.

یف: اگر f و g دو تابع با دو متغیر باشند آنگاه

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$$

$$(f-g)(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$$

$$(f.g)(x,y)=f(x,y).g(x,y)$$

$$(\frac{f}{g})(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

ه: اگر f یک تابع سه متغیره (دو متغیره) باشد، آنگاه به ازای هر عدد C، مجموعه همه ـا (x,y,z) $((x,y))$ را بطوری که $f(x,y,z)=c$ $(f(x,y)=c)$ یک سطح تراز f می‌نامیم.

۲) حد و پیوستگی:

یف: فرض کنیم تابع f در درون دایره‌ای به مرکز (a,b) بجز احتمالاً در (a,b)، معین است ین صورت عدد L را حد f در (a,b) می‌گوییم اگر متناظر با هر $\epsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود داشته ـد به طوری که اگر $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ آنگاه $|f(x,y)-L|<\epsilon$ می‌توان نشان داد که د L در صورت وجود منحصر به فرد است و درنتیجه آن را به صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

ن دهیم.

یه:

س کنیم $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ در این صورت

$$\lim_{(a,y)\to(a,b)} f(a,y)=L \quad , \quad \lim_{(x,b)\to(a,b)} f(x,b)=L$$

یه:

حد تابع f وقتی (x,y) بر روی منحنی متمایز به (a,b) نزدیک می‌شود متفاوت باشد آنگاه

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود ندارد درنتیجه

$$\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right] \neq \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$$

قضیه:

اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ وجود داشته باشد آنگاه

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)+\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f-g)(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)-\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x-y)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (fg)(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\ .\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$

$$\lim(\frac{f}{g})(x,y)=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\neq 0$$

قضیه:

فرض کنیم $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$ و تابع یک متغیرهٔ g در L پیوسته باشد در این صورت:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y))=g(L)$$

تعریف: می‌گوییم تابع دو متغیره f در (a,b) پیوسته است اگر هر سه شرط زیر برقرار باشند:

الف) f(a,b) وجود داشته باشد.

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد.

ج) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$

نکته: برای محاسبه $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ اگر حداقل دو مسیر دلخواه گذرا از نقطه (a,b) موجود باشد که حد تابع f(x,y) در نقطه (a,b) بر روی آنها یکسان نباشد $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود نیست.

نکته: اگر f یک تابع سه متغیره و g تابعی یک متغیره باشد به طوری که f در (a,b,c) پیوسته و g در f(a,b,c) پیوسته باشد آنگاه gof در (a,b,c) پیوسته است.

مشتق جزئی

ـ: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد اگر

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

داشته باشد می‌گوییم که مشتق جزئی f نسبت به x وجود دارد.

این حد را مشتق جزئی f نسبت به x در نقطهٔ (x,y) می‌نامیم و آن را با نمادهای $f_x(x,y)$ $\frac{\partial f(x}{\partial}$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب مشتق جزئی f نسبت به y در نقطهٔ (x,y) برابر با:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

طی که این حد وجود داشته باشد.

کنیم f یک تابع با دو متغیر x و y باشد به طوری که f_{xy} و f_{yx} در (a,b) پیوسته باشند در ورت:

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

مو تابع دو متغیره

کنیم $z=f(x,y)$, f_x, f_y در همسایگی نقطهٔ (x,y) پیوسته باشند فرض کنیم

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

به ازای نموهای Δx و Δy باشد در این صورت

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

آن $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1=0$ و $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_2=0$

ـ: تابع دو متغیرهٔ f در نقطهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است اگر همسایگی D از (a,b) و توابع دو ε_1 و ε_2 وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر (x,y) در D

$$f(x,y)-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\varepsilon_1(x-a)+\varepsilon_2(y-b)$$

قضیه:

اگر تابع دو متغیره f در (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در (a,b) پیوسته است.

نکته: $df=f_x(x,y,z)dx+f_y(x,y,z)dy+f_z(x,y,z)dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$

۵.۷ قاعده زنجیره‌ای

صورتهای قاعدهٔ زنجیره‌ای برای تابع با دو متغیر

الف) فرض کنیم $z=f(x,y)$، $x=g_1(t)$ و $y=g_2(t)$ در این صورت $z=f(g_1(t),g_2(t))$ و

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ب) فرض کنیم $z=f(x,y)$ و $x=g_1(u,v)$ و $x=g_2(u,v)$ در این صورت $z=f(g_1(u,v))$ و $g_2(u,v)$

و

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

نکته: $f'(x)=\frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

۶.۷ مشتق سوئی و گرادیان

تعریف: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y و $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ برداری واحد باشد مشتق سوئی f در نقطهٔ (x,y) و در جهت u را با $D_uf(x,y)$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$D_uf(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha_1,y+ha_2)-f(x,y)}{h}$$

قضیه:

اگر f در (x,y) مشتق‌پذیر و $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ برداری واحد باشد آنگاه

$$D_uf(x,y)=f_x(x,y)a_1+f_y(x,y)a_2$$

تعریف: بردار $f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$ را گرادیان تابع دو متغیرهٔ f در نقطهٔ (x,y) می‌نامیم و

$$\text{grad}f(x,y)=\nabla f(x,y)=f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$$

قضیه:

مقدار ماکسیمم $D_uf(x,y)$ در نقطهٔ (x,y) برابر است با $|\nabla f(x,y)|$ و در جهت بردار $\nabla f(x,y)$ به دست می‌آید.

صفحهٔ مماس

کنیم منحنی هموار C نمودار معادلهٔ $F(x,y)=0$ باشد اگر F در نقطهٔ $P(x_0,y_0)$ واقع بر C مشتق‌پذیر باشد و $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$ آنگاه بردار $\nabla f(x_0,y_0)$ در نقطهٔ P بر منحنی عمود

: فرض کنیم تابع F در نقطهٔ $P(x_0,y_0,z_0)$ واقع بر سطح S به معادلهٔ $F(x,y,z)=0$ ق‌پذیر باشد صفحه مماس بر S در نقطهٔ P صفحه‌ای است که از P می‌گذرد و $\nabla F(x_0,y$ بردار نرمال آن است.

اگر تابع F در نقطهٔ $P(x_0,y_0,z_0)$ واقع بر سطح S به معادله $F(x,y,z)=0$ مشتق‌پذیر باشد صفحه مماس بر S در نقطهٔ P به صورت زیر است:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x,y,z)(z-z_0)=0$$

دو سطح $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ در نقطه P دارای صفحه مماس مشترک‌اند هرگاه های عمود بر دو سطح در نقطه P با هم موازی باشند یعنی $(K\in R)\nabla F(P)=K\nabla G(P)$

ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره

: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y و R زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ f باشد در این ت:

) $f(x_0,y_0)$ مقدار ماکسیمم (مطلق) f در R است اگر به ازای هر (x,y) در R

$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$

$f(x_0,y_0)$ مقدار مینیمم (مطلق) F در R است اگر به ازای هر (x,y) در R

$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$

ر R برابر با دامنهٔ f باشد آنگاه $f(x_0,y_0)$ مذکور در (الف) و (ب) را به ترتیب مقدار یمم و مقدار مینیمم f می‌گوییم.

: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد در این صورت

f در (x_0,y_0) دارای ماکسیمم نسبی است اگر دایرهٔ C به مرکز (x_0,y_0) در دامنهٔ f وجود باشد به طوری که به ازای هر (x,y) در درون C، $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$

ب) f در (x_0,y_0) دارای مینیمم نسبی است اگر دایرهٔ C به مرکز (x_0,y_0) در دامنهٔ f وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر (x,y) در درون C، $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$

قضیه:

فرض کنیم f در (x_0,y_0) ماکسیمم یا مینیمم نسبی دارد اگر مشتقهای جزئی f در (x_0,y_0) وجود داشته باشد آنگاه $f_x(x_0,y_0)=0 \quad , \quad f_y(x_0,y_0)=0$

آزمون مشتق دوم:

فرض کنیم f تابعی با دو متغیر x و y باشد و $f_x(x_0,y_0)=0=f_y(x_0,y_0)$

فرض کنیم مشتقهای جزئی f درون دایره‌ای به مرکز (x_0,y_0) پیوسته باشند و

$$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\left[f_{xy}(x,y)\right]^2$$

در این صورت:

الف) اگر $D(x_0,y_0)>0$ و $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ آنگاه f در (x_0,y_0) ماکسیمم نسبی دارد.

ب) اگر $D(x_0,y_0)>0$ و $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ آنگاه f در (x_0,y_0) مینیمم نسبی دارد.

ج) اگر $D(x_0,y_0)<0$ آنگاه f در (x_0,y_0) یک نقطهٔ زین اسبی دارد.

د) اگر $D(x_0,y_0)=0$، نتیجه‌ای از این آزمون به دست نمی‌آید.

نکته: اگر $x^m y^n z^p ...=k$ که k یک مقدار ثابت است آنگاه $x+y+z+...$ زمانی مینیمم است که $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=...$

۹.۷ مضرب لاگرانژ

روش لاگرانژ برای توابع دو متغیره

برای یافتن اکسترممهای نسبی تابع دو متغیره $f(x,y)$ با شرط $g(x,y)=0$ تابع لاگرانژ را به صورت $F(x,y,\lambda)=f(x,y)\,,\lambda g(x,y)$ تعریف کرده و نقاط اکسترمم f با حل دستگاه سه معادله سه مجهول زیر بدست می‌آید.

$F_x=0 \quad , \quad F_Y=0 \quad , \quad F_\lambda=0$

نکته: برای تعیین ماکسیمم یا مینیمم (مطلق) تابع چند متغیره f تحت قید g ابتدا نقاط اکسترمم را بدست آورده سپس مقدار آنها را تحت تابع f بدست می‌آوریم. کمترین و بیشترین مقدار f به ترتیب مینیمم و ماکسیمم (مطلق) f تحت قید g می‌باشند.

خلاصه فصل هشتم

‌گرالهای چندگانه

) انتگرال دوگانه

:ه

f روی R پیوسته و نامنفی باشد، آنگاه حجم زیر ناحیهٔ محدود به f و ناحیهٔ R برابر است

$$V=\iint_R f(x,y)dA$$

:ه

ناحیه بسته و محدود R اجتماع دو ناحیهٔ بسته و ومحدود R_1 و R_2 باشد، به طوری که در نقاط مرزی مشترک باشند، آنگاه

$$\iint_R f(x,y)dA=\iint_{R_1} f(x,y)dA+\iint_{R_2} f(x,y)dA$$

:ه

f(x,y) و g(x,y) روی ناحیهٔ بسته و محدود R پیوسته باشند آنگاه

$$\iint_R f(x,y)+g(x,y)]dA=\iint_R f(x,y)dA+\iint_R g(x,y)dA$$

:ه

نتگرال دوگانه f(x,y) روی R وجود داشته باشد و c عددی حقیقی باشد، آنگاه

$$\iint_R cf(x,y)dA=c\iint_R f(x,y)dA$$

سبه انتگرال دوگانه:

) اگر f روی ناحیه R_1 پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_{R_1} f(x,y)dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

اگر f روی ناحیه R_2 پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_{R_2} f(x,y)dA=\int_c^d\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy$$

ر آن R_1 و R_2 به صورت زیر می‌باشند:

$R_1 = \{(x,y) \mid a \le x \le b \ , \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

$R_2 = \{(x,y) \mid h_1(y) \le x \le h_2(y) \ , \ c \le y \le d\}$

۲.۸) انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

در مختصات قطبی متغیرهای انتگرال‌گیری r و θ می‌باشند. لذا انتگرال دوگانه در مختصات قطبی به صورت زیر می‌باشد

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\, r dr d\theta \qquad \begin{cases}\alpha \le \theta \le \beta \\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\end{cases}$$

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_{a}^{b}\int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta) r d\theta dr \qquad \begin{cases}h_1(r) \le \theta \le h_2(r) \\ a \le r \le b\end{cases}$$

برای تبدیل یک انتگرال مکرر در مختصات دکارتی به یک انتگرال مکرر در مختصات قطبی ابتدا به جای x و y، به ترتیب $rCos\theta$ و $rSin\theta$ قرار می‌دهیم. سپس به جای $dydx$ (یا $dxdy$) عبارت $rdrd\theta$ (یا $rd\theta dr$) قرار می‌دهیم.

۳.۸) مساحت رویه

فرمول مساحت رویه: فرض کنیم S مساحت قسمتی از رویهٔ $Z=f(x,y)$ است که روی ناحیهٔ محدود و بستهٔ R واقع است. اگر f_x و f_y در R پیوسته باشند آنگاه:

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left[f_x(x,y)\right]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2}\, dA$$

مساحت رویه دوار:

فرض کنیم $y=f(x)$ در $[a,b]$ نامنفی باشد و نمودار آن حول محور x دوران کند. داریم:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{\left[f'(x)\right]^2 + 1}\, dx$$

۴.۸) انتگرال سه‌گانه

انتگرال سه‌گانه در مورد توابع سه متغیرهٔ حقیقی تعریف می‌شود. فرض کنیم R ناحیه بسته و محدودی در صفحه xy و $D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in R, F_1(x,y) \le z \le F_2(x,y)\}$ ناحیه‌ای در فضا باشد به طوری که مشتقهای اول F_1 و F_2 روی R پیوسته باشند. آنگاه:

$$\iiint_D f(x,y,z)dv = \iint_R \left[\int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] = dA$$

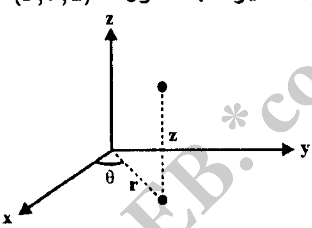
جسم محدود به نمودارهای توابع پیوستهٔ دو متغیرهٔ F_1 و F_2 روی ناحیه R در صفحه

د آنگاه حجم D برابر است با:

$$V = \iiint_D 1\,dV$$

انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

تگاه مختصات استوانه‌ای متغیرها به صورت (r,θ,z) تعریف می‌شوند.



ی تبدیل مختصات دکارتی (x,y,z) به مختصات استوانه‌ای، از فرمولهای

x^2+y , $\tan\theta=\frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم.

س، برای تبدیل مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) به مختصات دکارتی، فرمولهای

$x=$ و $y=r\sin\theta$ را به کار می‌بریم.

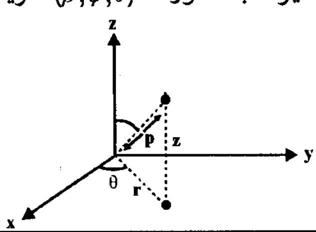
ل سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

$$\iiint_D f(r,\theta,z)dV = \iint_R \left[\int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)dz\right] dA$$

$$D=\{(r,\theta,z) \mid (r,\theta)\in R \;,\; F_1(r,\theta)\le z\le F_2(r,\theta)\}$$

انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی

تگاه مختصات کروی متغیرها به صورت (ρ,ϕ,θ) تعریف می‌شوند.



رابطه بین مختصات دکارتی (x,y,z)، مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) و مختصات کروی توسط فرمولهای زیر داده می‌شود.

$$x=r\cos\theta=\rho\sin\phi\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta=\rho\sin\phi\sin\theta$$

$$z=\rho\cos\phi$$

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2$$

قضیه:

فرض کنیم $h_1(\theta)$، $h_2(\theta)$، $F_1(\phi,\theta)$ و $F_2(\phi,\theta)$ توابعی پیوسته و D مجموعهٔ تمام نقاط (ρ,ϕ,θ) باشد، به طوری که $\alpha\le\theta\le\beta$ و $0\le h_1(\theta)\le\phi\le h_2(\theta)\le\pi$ ، $F_1(\phi,\theta)\le\rho\le F_2(\phi,\theta)$ و $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$ اگر f در D پیوسته باشد آنگاه

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{F_1(\phi,\theta)}^{F_2(\phi,\theta)} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi).\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

۷.۸) کاربردهای فیزیکی

جرم یک ورق مسطحه: اگر یک صفحه نازک به نام ورق مسطحه توسط ناحیه R محدود شده باشد چگالی هر نقطه (x,y) در R را با $\rho(x,y)$ نشان دهیم، آنگاه جرم این ورق مسطحه توسط رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$m=\iint_R \rho(x,y)\,dA$$

جرم یک جسم فضایی: اگر یک جسم فضائی به ناحیه D محدود شده باشد و چگالی هر نقطه (x,y,z) در D را با $\rho(x,y,z)$ نشان دهیم آنگاه جرم این جسم فضائی توسط رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$m=\iiint_D \rho(x,y,z)\,dV$$

گشتاور اول و مرکز جرم ورق مسطحه:

گشتاور اول نسبت به محور x به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M_x=\iint_R y\rho(x,y)dA$$

ور اول نسبت به محور y به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$M_y=\iint_R x\rho(x,y)dA$$

کز جرم ورق مسطحه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m} \quad , \quad \bar{x}=\frac{M_y}{m}$$

ور دوم (یا ماند) ورق مسطحه:

ور دوم حول محور x برابر است با:

$$I_x=\iint_R y^2\rho(x,y)dA$$

ور دوم حول محور y برابر است با:

$$I_y=\iint_R x^2\rho(x,y)dA$$

ور نسبت به مبدأ مختصات یا گشتاور قطبی برابر است با:

$$I_o=\iint_R (x^2+y^2)\rho(x,y)dA=I_x+I_y$$

ور اول و مرکز جرم یک جسم فضائی:

چگالی هر نقطهٔ یک جسم محدود به ناحیه فضائی D، $\rho(x,y,z)$ باشد در این صورت ورهای اول این جسم حول صفحه‌های xy، xz و yz به ترتیب برابرند با:

$$M_{xy}=\iiint_D z\rho(x,y,z)dV$$

$$M_{xz}=\iiint_D y\rho(x,y,z)dV$$

$$M_{yz}=\iiint_D x\rho(x,y,z)dV$$

ات مرکز جرم این جسم عبارتست از:

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m} \quad , \quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{m} \quad , \quad \bar{z}=\frac{M_{yx}}{m}$$

ور ماند یک جسم فضائی:

رهای دوم یک جسم محدود به ناحیه فضایی D حول محورهای x، y و z به ترتیب ند از:

$$I_x = \iiint_D (y^2 + x^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

خلاصه فصل نهم

ثی در آنالیز برداری

) میدان برداری

$D\subset R^3$، آنگاه هر تابع $\vec{F}:D\to R^3$ را یک میدان برداری با دامنه‌ی D گویند.

ان F:

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\vec{k}$$

∇ = $\vec{F}$، آنگاه $\vec{F}$ را یک میدان برداری پایستار و f را تابع پتانسیل $\vec{F}$ می‌نامیم.

ی یک میدان برداری:

کنیم $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ یک میدان برداری باشد به طوری که $\frac{\partial M}{\partial x}$، $\frac{\partial N}{\partial y}$، $\frac{\partial P}{\partial z}$ وجود
ته باشند. در اینصورت واگرایی $\vec{F}$ به نمایش $\operatorname{div}\vec{F}$ یا $\nabla.\vec{F}$ تابعی با
ف زیر است:

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\nabla.\vec{F}(x,y,z)$$
$$=\frac{\partial M}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial N}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)$$

ی یک میدان برداری:

کنیم $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ یک میدان برداری است به طوری که مشتقهای جزئی
، N و P وجود دارند. در این صورت، چرخه‌ی $\vec{F}$ به نمایش $\operatorname{curL}\vec{F}$ یا
، یک میدان برداری با تعریف زیر است:

$$\operatorname{curL}\vec{F}(x,y,z)=\nabla\times\vec{F}(x,y,z)$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

احتی $\operatorname{curL}\vec{F}$ را به صورت زیر هم تعریف می‌کنیم:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ M&N&P\end{vmatrix}$$

:Lap f

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

تابعی را که در معادلهٔ:

$$\nabla^2 f=\operatorname{Lap} f=0$$

به نام معادله لاپلاس، صدق کند همساز (هارمونیک) می‌گوئیم.

قضیه:

اگر $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ یک میدان برداری پایستار باشد، (یعنی اگر تابع f با مشتقهای جزئی پیوسته وجود داشته باشد به طوری که $\vec{F}=\operatorname{grad} f$) آنگاه:

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z}$$

اگر دامنهٔ $\vec{F}$ تمام فضا باشد، عکس این حکم نیز صادق است.

۹-۲) انتگرال خط

$$W=\int_C \vec{F}.\vec{dr}$$

این انتگرال را انتگرال خط $\vec{F}$ روی C می‌گویند.

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr}=\int_a^b [M(f(t),g(t),h(t))\frac{dx}{dt}+N(f(t),g(t),h(t))\frac{dy}{dt}$$
$$+P(f(t),g(t),h(t))\frac{dz}{dt}]dt$$

۹-۳) قضیهٔ اساسی انتگرال خط

قضیه:

فرض کنیم C یک منحنی جهت‌دار هموار یا قطعه‌ای هموار با نقطهٔ ابتدایی (x_0,y_0,z_0) و نقطهٔ انتهایی (x_1,y_1,z_1) باشد. فرض کنیم میدان برداری $\vec{F}$ روی C پیوسته باشد و $\vec{F}=\operatorname{grad} f=\nabla f$، که در آن f روی C مشتق‌پذیر است در اینصورت:

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr}=\int_C \nabla f.\vec{dr}=f(x_1,y_1,z_1)-f(x_0,y_0,z_0)$$

بطور کلی اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته با دامنهٔ D باشد، بطوری که برای هر دو منحنی جهت‌دار C_1 و C_2 در D، با ابتدا و انتهای یکسان

$$\int_{C_1} \vec{F}.\vec{dr}=\int_{C_2} \vec{F}.\vec{dr}$$

ی‌گوئیم که $\int_C \vec{F}.\vec{dr}$ مستقل از مسیر است.

، قضیهٔ اساسی انتگرال خط بیان می‌کند که:

پایستار باشد، آنگاه $\int_C \vec{F}.\vec{dr}$ مستقل از مسیر است.

قضیهٔ گرین

کنیم ناحیهٔ R در صفحهٔ xy توسط منحنی جهت‌دار قطعه‌ای هموار، ساده و بستهٔ C
. شده و M و N دو تابع دو متغیره با مشتقات جزئی پیوسته باشند. در این صورت:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

آشنایی با انتگرال سطح

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_R g(x,y,f(x,y))$$

$$= \sqrt{[fx(x,y)]^{۲} + [fy(x,y)]^{۲} + ۱}\ \ dA$$

ستوکس:

نیم S رویه‌ای با بردار واحد قائم $\vec{n}$ باشد که توسط منحنی قطعه‌ای هموار C محدود
ست. اگر میدان بردای $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ و مشتقات جزئی مؤلفه‌های آن روی S
باشند، آنگاه:

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr} = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz = \iint_S (\mathrm{curL}\,\vec{F}).\vec{n}.dS$$