

به نام خدا

# KONKUR.IN



**Forum.konkur.in**

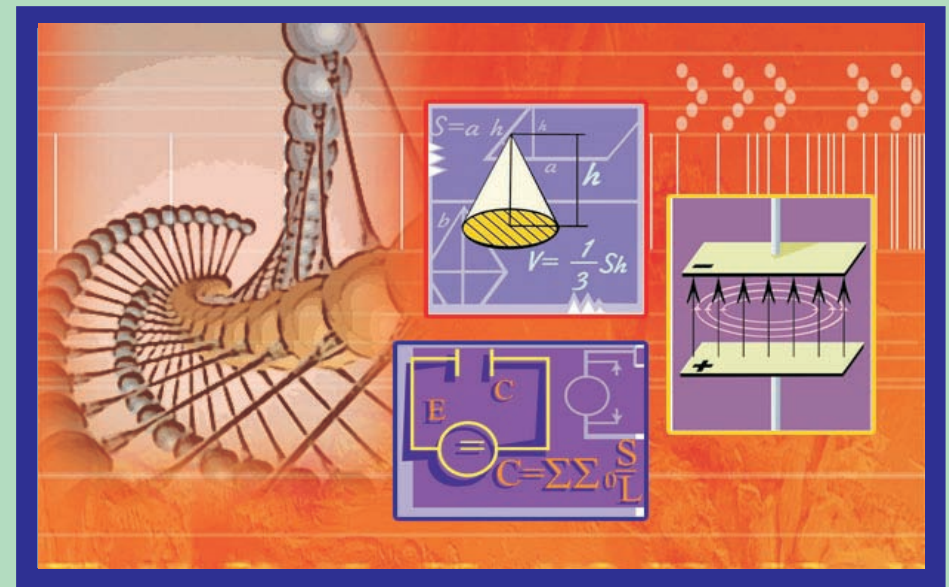
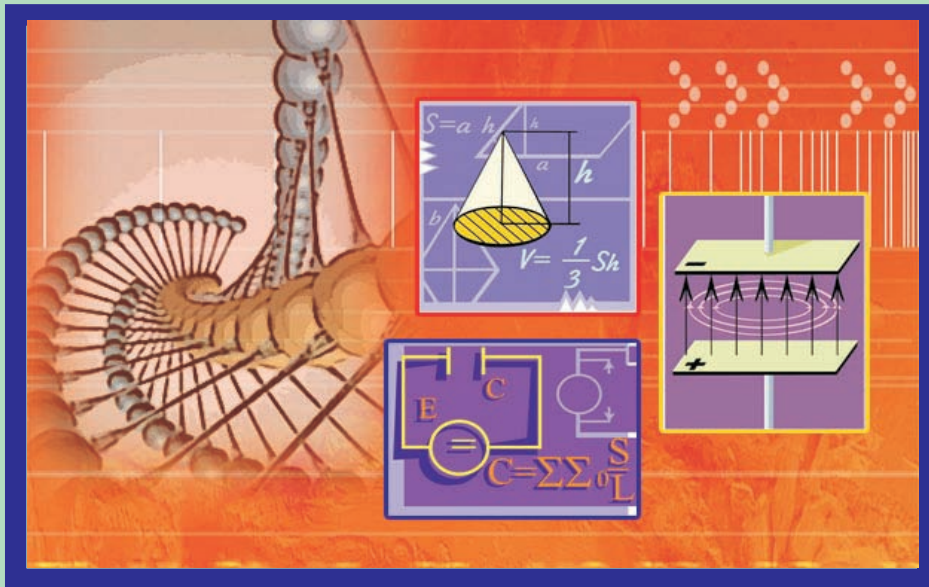
**Club.konkur.in**

**Shop.konkur.in**



# راهنمای حل مسائل الکترومغناطیس ۱

دکتر سعید محمدی



دانشگاه پیام نور ۱۴۶۸  
گروه فیزیک (۱/۶۵)





دانشگاه پیام نور

## راهنمای حل مسائل الکترومغناطیس ۱

( رشته های فیزیک هسته ای، حالت جامد، و اتمی و مولکولی )

دکتر سعید محمدی



بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتابهای دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف به صورت درسنامه، آزمایشی، قطعی، متون آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شود. کتاب **درسنامه (د)** نخستین ثمره کوششهای علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصلهای مصوب تهیه می‌شود و پس از داوری علمی در گروههای آموزشی چاپ می‌شود. با دریافت بازخوردها و تجدید نظر صاحب اثر و اصلاح کتاب، **درسنامه به صورت آزمایشی (آ)** چاپ می‌شود. با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدید نظر می‌کند و کتاب به صورت **قطعی (ق)** چاپ می‌شود. در صورت ضرورت، در کتابهای چاپ قطعی نیز می‌تواند تجدیدنظرهای اساسی به عمل آید.

**متون آزمایشگاهی (م)** متونی است که دانشجویان با استفاده از آن و راهنمایی مربیان کارهای عملی آزمایشگاهی را انجام می‌دهند. **کتابهای فرادرسی (ف)** و **کمک‌درسی (ک)** به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه می‌شوند. کتابهای فرادرسی با تأیید معاونت پژوهشی و کتابهای کمک‌درسی با تأیید شورای انتشارات تهیه می‌شوند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی



## فهرست

هفت	پیشگفتار
۱	راهنمای حل مسائل فصل اول. آنالیز برداری
۱	۱-۱ خلاصه مطالب
۳	۲-۱ مثال‌های حل شده
۷	۳-۱ پاسخ سؤالات
۲۱	راهنمای حل مسائل فصل دوم. میدان‌های الکترواستاتیک در خلاء
۲۱	۱-۲ خلاصه مطالب
۲۵	۲-۲ مثال‌های حل شده
۳۴	۳-۲ پاسخ سؤالات
۴۱	راهنمای حل مسائل فصل سوم. میدان‌های الکتریکی در مواد
۴۱	۳-۱ خلاصه مطالب
۴۳	۳-۲ مثال‌های حل شده
۴۶	۳-۳ پاسخ سؤالات
۵۷	راهنمای حل مسائل فصل چهارم. حل مسائل الکترواستاتیک
۵۷	۱-۴ خلاصه مطالب
۵۸	۲-۴ مثال‌های حل شده



۶۱	۳-۴ پاسخ سؤالات
۷۳	راهنمای حل مسائل فصل پنجم. میدان‌های مغناطواستاتیک
۷۳	۱-۵ خلاصه مطالب
۷۵	۲-۵ مثال‌های حل شده
۸۴	۳-۵ پاسخ سؤالات
۹۵	راهنمای حل مسائل فصل ششم. نیروها، مواد و ابزار مغناطیسی
۹۵	۱-۶ خلاصه مطالب
۹۸	۲-۶ مثال‌های حل شده
۱۰۴	۳-۶ پاسخ سؤالات
۱۱۳	راهنمای حل مسائل به کمک متمتیکا
۱۱۳	مقدمه
۱۲۲	حل مسائل به کمک نرم افزار متمتیکا

## پیشگفتار

درس الکترومغناطیس به نظر اغلب دانشجویان فیزیک، مشکل‌ترین درس دوره کارشناسی است. متأسفانه اغلب کتاب‌هایی که در این زمینه به زبان فارسی نوشته و یا ترجمه شده‌اند به مفاهیم کل پرداخته و دانشجو در پایان کاربردی برای آنها نمی‌بیند. مؤلف این کتاب طی سالیان درازی که به تدریس این درس در دوره کارشناسی مشغول بوده است به این نیاز دانشجویان پی برده و سعی کرده است کتابی را تدوین کند که خلاء بین مفاهیم نظری و کاربردی را تا حد امکان پر کند.

همانطور در فهرست دیده می‌شود این کتاب در شش فصل و تعدادی پیوست تنظیم شده است. مهمترین نکاتی که در این کتاب به عنوان یک منبع خودآموز در نظر گرفته شده است عبارتند از:

۱- هر فصل شامل تعداد زیادی مثال‌های حل شده هم به صورت تحلیلی و هم به صورت عددی است. برای اینکه دانشجو بتواند شبیه این مثال‌ها را خودش هم حل کند تعدادی خودآزمایی با جواب در هر فصل آورده شده‌اند.

۲- در پایان هر فصل تعدادی سؤالات چند گزینه‌ای با جواب برای درک بهتر مفاهیم متن آورده شده‌اند.

۳- پاسخ تمام مسائل پایانی هر فصل همراه با مثال‌های حل شده دیگر و نیز مروری بر مطالب هر فصل به صورت یک CD جداگانه به دانشجو داده خواهد شد تا خودآموز بودن کتاب را تکمیل کند. بهتر است دانشجو ابتدا پاسخ سؤالات مروری و مسائل را به دست آورده و سپس آنها را با جواب‌های داده شده مقایسه کند.

۴- در این کتاب برای اولین بار تعدادی از مسائل مهم الکترومغناطیس با استفاده از نرم افزار ممتیکا حل شده‌اند. نحوه حل این مسائل و فایل مربوط به آنها نیز در CD فوق داده خواهد شد. چنانچه دانشجو با نرم افزار ممتیکا آشنا باشد می‌تواند با اندکی تغییر در فایل هر مسأله، جواب‌های دیگری از آن را پیدا کرده و یا به بیند. یادآوری می‌گردد که استفاده از نرم افزار ممتیکا فقط برای درک بهتر مفاهیم است و یاد گرفتن آن جزء الزامات امتحانی درس الکترومغناطیس نمی‌باشد.

در خاتمه از شورای محترم تخصصی گروه فیزیک دانشگاه پیام نور به خاطر تصویب این متن به عنوان یک کتاب درسی، از جناب آقای دکتر جمیل آریایی به خاطر راهنمایی در حل مسائل به کمک نرم افزار ممتیکا، از جناب آقای دکتر پرویز الهی به خاطر ویرایش علمی کتاب، از سرکار خانم پروا مرادی صالح به خاطر تایپ و آماده سازی متن و از کلیه همکاران گروه تدوین و انتشارات دانشگاه پیام نور تشکر و قدردانی می‌نمایم.  
این کتاب را تقدیم می‌کنم به همسر و فرزندم؛ به خاطر صبر و حمایتشان.

دکتر سعید محمدی

دانشیار فیزیک هسته‌ای دانشگاه پیام نور

بهمن ۱۳۸۶

## راهنمای حل مسائل فصل اول

### آنالیز برداری

#### ۱-۱ خلاصه مطالب

۱- نقطه  $P$  به ترتیب به صورت  $P(x, y, z)$ ,  $P(\rho, \varphi, z)$  و  $P(r, \theta, \varphi)$  در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی بیان می‌شود. یک میدان برداری  $\vec{A}$  به صورت  $(A_x, A_y, A_z)$  یا  $A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$  در دستگاه دکارتی، به صورت  $(A_\rho, A_\varphi, A_z)$  یا  $A_\rho \hat{a}_\rho + A_\varphi \hat{a}_\varphi + A_z \hat{a}_z$  در دستگاه استوانه‌ای و به صورت  $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$  یا  $A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\varphi \hat{a}_\varphi$  در دستگاه کروی نمایش داده می‌شود. تبدیلات نقطه‌ای یا برداری را می‌توان از یک دستگاه به دستگاه دیگری انجام داد.

۲- جابه‌جایی‌های دیفرانسیل در دستگاه‌های دکارتی، استوانه‌ای و کروی به ترتیب عبارتند از

$$d\vec{l} = dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z$$

$$d\vec{l} = d\rho \hat{a}_\rho + \rho d\varphi \hat{a}_\varphi + dz \hat{a}_z$$

$$d\vec{l} = dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{a}_\varphi$$

$d\vec{l}$  همیشه در جهت مثبت در نظر گرفته می‌شود.

۳- سطوح عمود دیفرانسیل در سه دستگاه به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= dydz \hat{a}_x & ds &= \rho d\phi dz \hat{a}_\rho & ds &= r^\gamma \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r \\ &= dx dz \hat{a}_y & &= d\rho dz \hat{a}_\phi & &= r \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_\theta \\ &= dx dy \hat{a}_z & &= \rho d\rho d\phi \hat{a}_z & &= r dr d\theta \hat{a}_\phi \end{aligned}$$

$d\vec{s}$  بسته به سطح مورد نظر می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

۴- حجم‌های دیفرانسیلی در سه دستگاه عبارتند از

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz \\ dV &= \rho d\rho d\phi dz \\ dV &= r^\gamma \sin\theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

۵- انتگرال خطی بردار  $\vec{A}$  در امتداد مسیر  $L$  برابر است با  $\int_L \vec{A} \cdot d\vec{s}$ ، اگر مسیر بسته باشد، انتگرال خطی تبدیل به گردش  $\vec{A}$  پیرامون  $L$  می‌شود، یعنی  $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$ .

۶- شار یا انتگرال سطحی بردار  $\vec{A}$  از میان سطح  $S$  به صورت  $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$  تعریف می‌شود، وقتی که سطح  $S$  بسته باشد، انتگرال سطحی تبدیل به شار خروجی خالص  $A$  از میان  $S$  می‌شود، یعنی  $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{l}$ .

۷- انتگرال حجمی کمیت نرده‌ای  $\rho_v$  روی حجم  $V$  به صورت  $\int_V \rho_v dv$  تعریف می‌شود.

۸- مشتق‌گیری برداری با استفاده از عملگر دیفرانسیلی برداری  $\vec{\nabla}$  انجام می‌شود، شیب میدان نرده‌ای  $V$  توسط  $\vec{\nabla}V$ ، و اگرایی میدان برداری  $\vec{A}$  توسط  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ، تاو  $\vec{A}$  توسط  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  و لاپلاسیان  $V$  توسط  $\nabla^2 V$  بیان می‌شوند.

آنالیز برداری ۳

۹- قضیه واگرایی،  $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$ ، انتگرال سطحی روی یک سطح بسته را به انتگرال حجمی مربوط می‌سازد.

۱۰- قضیه استوکس،  $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$ ، انتگرال خطی روی یک مسیر بسته را به انتگرال سطحی مرتبط می‌کند.

۱۱- اگر معادله لاپلاس،  $\nabla^2 V = 0$ ، توسط میدان نرده‌ای  $V$  در یک ناحیه معین صدق کند، گفته می‌شود  $V$  در آن ناحیه هماهنگ است.

۱۲- یک میدان برداری سیملوله‌ای است اگر  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  باشد، و غیرچرخشی یا پایستار است اگر  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ .

۱۳- روابط برداری  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$  و  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$  در الکترومغناطیس خیلی مفید هستند. سایر روابط برداری در پیوست الف داده شده‌اند.

۲-۱ مثال‌های حل شده

مثال (۱-۱): بردار  $\vec{B} = \frac{1}{r} \hat{a}_r + r \cos \theta \hat{a}_\theta + \hat{a}_\phi$  را برحسب مختصات دکارتی و استوانه‌ای بیان کنید. مقادیر  $(0, \epsilon, -3)$   $\vec{B}$  و  $(-\frac{\pi}{4}, 2, 5)$   $\vec{B}$  را به دست آورید.  
جواب: با استفاده از معادله (۱-۱۹)

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ r \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$B_x = \frac{I_0}{r} \sin \theta \cos \varphi + r \cos^2 \theta \cos \varphi - \sin \varphi$$

$$B_y = \frac{I_0}{r} \sin \theta \sin \varphi + r \cos^2 \theta \sin \varphi + \cos \varphi$$

$$B_z = \frac{I_0}{r} \cos \theta - r \cos \theta \sin \theta$$

$$\text{اما } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

در نتیجه

$$\sin \theta = \frac{\rho}{r} = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در روابط مربوط به  $B_z, B_y, B_x$  داریم

$$B_x = \frac{I_0 x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x z^2}{\left[ (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) \right]^{1/2}} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$B_y = \frac{I_0 y}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y z^2}{\left[ (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) \right]^{1/2}} + \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$B_z = \frac{I_0 z}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z(x^2 + y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

بردار  $\vec{B}$  برابر است با

۵ آنالیز برداری

$$\vec{B} = B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z$$

با توجه به این که در نقطه  $(-3, 4, 0)$ ،  $B_x = -3$ ،  $B_y = 4$  و  $B_z = 0$  است. داریم

$$B_x = -\frac{3 \cdot 0}{25} + 0 - \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$B_y = \frac{4 \cdot 0}{25} + 0 - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$B_z = 0 - 0 = 0$$

$$\vec{B} = -\frac{4}{5} \hat{a}_x - \frac{3}{5} \hat{a}_y$$

برای تبدیل از مختصات کروی به مختصات استوانه‌ای، طبق رابطه (۱-۲۵) داریم

$$\begin{bmatrix} B_\rho \\ B_\phi \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{r} \\ r \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$B_\rho = \frac{10}{r} \sin \theta + r \cos^2 \theta$$

$$B_\phi = 1$$

$$B_z = \frac{10}{r} \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta$$

اما  $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ ،  $\theta = \tan^{-1} \frac{\rho}{z}$  در نتیجه



$$\sin \theta = \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}, \quad \cos \theta = \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$B_\rho = \frac{1 \cdot \rho}{\rho^2 + z^2} + (\rho^2 + z^2)^{1/2} \cdot \frac{z^2}{\rho^2 + z^2}$$

$$B_z = \frac{1 \cdot z}{\rho^2 + z^2} - (\rho^2 + z^2)^{1/2} \cdot \frac{\rho z}{\rho^2 + z^2}$$

بنابراین

$$\vec{B} = \left( \frac{1 \cdot \rho}{\rho^2 + z^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \right) \hat{a}_\rho + \hat{a}_\phi + \left( \frac{1 \cdot z}{\rho^2 + z^2} - \frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \right) \hat{a}_z$$

در نقطه  $\vec{B} \left( 5, \frac{\pi}{4}, -2 \right)$ ,  $\rho = 5$ ,  $\phi = \frac{\pi}{4}$  و  $z = -2$  می‌باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \left( \frac{5 \cdot 5}{29} + \frac{4}{\sqrt{29}} \right) \hat{a}_\rho + \hat{a}_\phi + \left( \frac{-2 \cdot 5}{29} + \frac{1 \cdot 5}{\sqrt{29}} \right) \hat{a}_z \\ &= 2/467 \hat{a}_\rho + \hat{a}_\phi + 1/167 \hat{a}_z \end{aligned}$$

توجه کنید در هر نقطه

$$|\vec{B}(x, y, z)| = |\vec{B}(\rho, \phi, z)| = |\vec{B}(r, \theta, \phi)|$$

مثال (۱-۲): شیب میدان‌های نرده‌ای زیر را در دستگاه‌های مختصاتی مربوط به دست آورید.

الف)  $V = e^{-z} \sin 2x \cosh y$

ب)  $U = \rho^2 z \cos \phi$

$$W = 10r \sin^2 \theta \cos \varphi \quad (\text{ج})$$

(جواب: الف)

$$\bar{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z$$

$$= 2e^{-z} \cos 2x \cosh y \hat{a}_x + e^{-z} \sin 2x \sinh y \hat{a}_y - e^{-z} \sin 2x \cosh y \hat{a}_z$$

(ب)

$$\bar{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{a}_z$$

$$= 2\rho z \cos 2\varphi \hat{a}_\rho - 2\rho z \sin 2\varphi \hat{a}_\varphi + \rho^2 \cos 2\varphi \hat{a}_z$$

(ج)

$$\bar{\nabla} W = \frac{\partial W}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi$$

$$= 10 \sin^2 \theta \cos \varphi \hat{a}_r + 10 \sin 2\theta \cos \varphi \hat{a}_\theta - 10 \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_\varphi$$

### ۳-۱ پاسخ سؤالات

۱- الف) رابطه بین مختصات استوانه‌ای و مختصات دکارتی برابر است با

$$\begin{bmatrix} H_\rho \\ H_\varphi \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & \cdot \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy^2z \\ x^2yz \\ xyz^2 \end{bmatrix}$$

مؤلفه‌های H در مختصات استوانه‌ای عبارتند از

$$H_\rho = xy^2z \cos \varphi + x^2yz \sin \varphi$$

$$H_\varphi = -xy^2z \sin \varphi + x^2yz \cos \varphi$$

$$H_z = xyz^2$$

با قرار دادن مقادیر  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $x = \rho \cos \varphi$  در روابط فوق داریم

$$H_\rho = \rho^2 z \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \rho^2 z \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{1}{\gamma} \rho^2 z \sin^2 \varphi$$

$$H_\varphi = -\rho^2 z \cos \varphi \sin^2 \varphi + \rho^2 z \cos \varphi \sin^2 \varphi = \rho^2 z \cos \varphi \sin^2 \varphi \cos 2\varphi$$

$$H_z = \rho^2 z^2 \sin 2\varphi \cos \varphi$$

همین‌طور رابطه بین مختصات کروی و دکارتی برابر است با

$$\begin{bmatrix} H_r \\ H_\theta \\ H_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy^2z \\ x^2yz \\ xyz^2 \end{bmatrix}$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

مؤلفه‌های  $H$  در مختصات کروی عبارتند از

$$H_r = r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \cos^2 \theta \right)$$

$$H_\theta = r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( \sin \theta \cos \theta r^2 \sin 2\varphi - \cos \varphi \sin \theta \right)$$

$$H_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( \sin \theta \cos 2\varphi \right)$$

ب) در نقطه  $(5, -4, 3)$ ، مختصات استوانه‌ای عبارتند از

$$r = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6.4, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \varphi = -\frac{4}{5}, \cos \varphi = \frac{3}{5}$$

$$\vec{H} = -1.7/4.8 \hat{a}_r + 4.1/5.8 \hat{a}_\theta + 1.4 \hat{a}_\varphi$$

$$\vec{G} = \frac{x \cos \varphi}{\rho} \hat{a}_x + \frac{yz}{\rho^2} \hat{a}_y + \left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right) \hat{a}_z \quad -2$$

کافی است در رابطه فوق، به جای  $x, y, z, \rho$  بر حسب مختصات کروی  $(r, \theta, \varphi)$  قرار دهیم.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)^{1/2} = r \sin \theta$$

بردار  $\vec{G}$  برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \frac{r \sin \theta \cos^2 \varphi}{r \sin \theta} \hat{a}_x + \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \hat{a}_y + \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \hat{a}_z \\ &= \cos^2 \varphi \hat{a}_x + \cot \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \sin^2 \varphi \hat{a}_z \end{aligned}$$

اما رابطه بین مختصات کروی و دکارتی برابر است با

$$\begin{bmatrix} G_r \\ G_\theta \\ G_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \\ r \cot \theta \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

از رابطه فوق می‌توان مؤلفه‌های بردار  $G$  را در مختصات کروی به دست آورد.

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int (x^2 dx + y^2 dy) \quad -3$$

اما روی مسیر  $L$ ،  $y = x^2$ ،  $dy = 2x dx$ ، با قرار دادن در رابطه فوق

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int (x^2 + 2x^3) dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 + \frac{2x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

۴- طبق شکل ۱-۱، سطح  $S$  را می توان به پنج قسمت  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  تقسیم کرد. با نوشتن  $V$  در مختصات استوانه‌ای

$$V = (x + y)z = \rho z (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

$$\vec{A} = \oint V d\vec{s} = \left( \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} + \int_{S_4} + \int_{S_5} \right)$$

$$V d\vec{s} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 + \vec{A}_5$$

برای  $\vec{A}_1$ ،  $z = 2$ ،  $d\vec{s} = \rho d\varphi d\rho \hat{a}_z$ ، در نتیجه

$$\vec{A}_1 = \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \rho^2 z (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi d\rho \hat{a}_z =$$

$$\left( \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 (\sin \varphi + \cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} \hat{a}_z = \frac{2}{3} (1 - 0 - 0 + 1) \hat{a}_z = \frac{4}{3} \hat{a}_z$$

برای  $\vec{A}_2$ ،  $z = 0$ ،  $d\vec{s} = \rho d\varphi (-\hat{a}_z)$ ، در نتیجه

$$\vec{A}_2 = - \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \rho^2 z (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi d\rho \hat{a}_z = 0$$

برای  $\vec{A}_3$ ،  $\rho = 1$ ،  $d\vec{s} = \rho d\varphi dz \hat{\rho}$ ، در نتیجه

۱۱ آنالیز برداری

$$\overline{A}_r = \int_{z=0}^r \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \rho^2 z (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi dz \hat{a}_\rho = (1)^2 \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^r (\cos \varphi + \sin \varphi) \hat{a}_\rho = \frac{r^2}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi) \hat{a}_\rho$$

برای  $\overline{A}_\varphi$ ،  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ،  $d\vec{s} = \rho dz \hat{a}_\varphi$ ، در نتیجه

$$\overline{A}_\varphi = \int_{\rho=0}^r \int_{z=0}^r \rho z (\cos \varphi + \sin \varphi) d\rho dz \hat{a}_\varphi = \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^r \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^r (\cos \varphi + \sin \varphi) \hat{a}_\varphi = \frac{r^2 z^2}{4} (\cos \varphi + \sin \varphi) \hat{a}_\varphi$$

برای  $\overline{A}_\theta$ ،  $\varphi = 0$ ،  $d\vec{s} = \rho dz (-\hat{a}_\varphi)$ ، در نتیجه

$$\overline{A}_\theta = -\hat{a}_\varphi$$

بنابراین، به طور کلی خواهیم داشت

$$\vec{A} = \frac{r^2}{2} \hat{a}_z + \frac{r^2 z^2}{4} (\cos \varphi + \sin \varphi) \hat{a}_\rho - \hat{a}_\varphi = \frac{r^2}{2} \hat{a}_z + \frac{r^2 z^2}{4} (\cos \varphi + \sin \varphi) \hat{a}_\rho - \hat{a}_\varphi$$

۵- با حل در دستگاه‌های مختصات مناسب، خواهیم داشت

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -y^2 \hat{a}_x + 2z \hat{a}_y - y^2 \hat{a}_z \quad (\text{الف})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\rho^2 - rz^2) \hat{a}_\varphi + \epsilon \rho^2 \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{r} \cot \theta \cot \varphi \hat{a}_r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + \cos \theta \right) \hat{a}_\theta \quad (\text{ج})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{H} = K \vec{\nabla} T \quad -6$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = K \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = K \nabla^2 T$$

چون  $\nabla^2 T = 0$  می‌شود، در نتیجه  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$

۷- الف) با حل در مختصات دکارتی

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\nabla \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla A_z) \\ &= \nabla \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + A_x \frac{\partial \nabla}{\partial x} + A_y \frac{\partial \nabla}{\partial y} + A_z \frac{\partial \nabla}{\partial z} \\ &= \nabla \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \nabla \end{aligned}$$

ب) با قراردادن به جای  $\nabla, \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot (\nabla \vec{A}) = \nabla^2 \vec{A}$$

۸- الف) این مسأله را می‌توان به راحتی در دستگاه مختصات دکارتی اثبات کرد.

$$\vec{\nabla} \times (\nabla \vec{A}) = \frac{\nabla^2 \cos \theta \cos \varphi}{r^2} \hat{a}_r + \frac{\sin \theta \cos \varphi}{r^2} \hat{a}_\theta + \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{a}_\varphi \quad \text{ب)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \nabla U) = \nabla^2 (z^2 - y^2 - x^2) \quad -9$$

$$\vec{\nabla} \ln \rho = \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho \right) \hat{a}_x + \left( \frac{\partial}{\partial y} \ln \rho \right) \hat{a}_y + \left( \frac{\partial}{\partial z} \ln \rho \right) \hat{a}_z = \frac{x}{\rho^2} \hat{a}_x + \frac{y}{\rho^2} \hat{a}_y \quad -10$$

از طرف دیگر

$$\bar{\nabla} \times (\varphi \hat{a}_z) = \bar{\nabla} \times \left( \tan^{-1} \frac{y}{x} \hat{a}_z \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{a}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{a}_y = \frac{x}{\rho^2} \hat{a}_x + \frac{y}{\rho^2} \hat{a}_y$$

که دو طرف با دیگر برابر هستند.

$$\bar{\nabla} \varphi = \frac{1}{r \sin \varphi} \hat{a}_\varphi, \quad \bar{\nabla} \theta = \frac{1}{r} \hat{a}_\theta \quad -11$$

$$\frac{r \bar{\nabla} \theta}{\sin \theta} = \frac{\hat{a}_\theta}{\sin \theta}$$

$$\bar{\nabla} \times \left( \frac{r \bar{\nabla} \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{1}{r} \sin \theta \hat{a}_\theta = \bar{\nabla} \varphi$$

$$\bar{\nabla} \varphi = \bar{\nabla} \times \left( \frac{r \bar{\nabla} \theta}{\sin \theta} \right) \quad \text{بنابراین}$$

۱۲- با حل در دستگاه‌های مختصات مربوطه، خواهیم داشت

$$\bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} = (\gamma xy + z) \hat{a}_x + 3x^2 \hat{a}_y + x \hat{a}_z$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \gamma y \quad (\text{الف})$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \cdot$$

$$\bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} = z \cos \varphi \hat{a}_x + z \sin \varphi \hat{a}_y + \rho \cos \varphi \hat{a}_z$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \cdot \quad (\text{ب})$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \cdot$$



ج) شبیه حالت‌های (الف) و (ب) حل می‌شود.

۱۳- جواب‌ها عبارتند از

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \vec{T} = \gamma yz \hat{a}_x + \gamma xy^{\gamma} \hat{a}_y + \gamma x^{\gamma} yz \hat{a}_z \quad (\text{الف})$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{T} = \varepsilon yz \hat{a}_x + \gamma xy^{\gamma} \hat{a}_y + \varepsilon x^{\gamma} yz \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{T}) = \gamma xyz + \gamma xy^{\gamma} + \gamma x^{\gamma} yz \quad (\text{ج})$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) r^{\gamma} = \gamma r^{\gamma} \quad (\text{د})$$

$$\vec{\nabla} \cdot r^n \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} (x r^n) + \frac{\partial}{\partial y} (y r^n) + \frac{\partial}{\partial z} (z r^n) \quad (\text{الف}-۱۴)$$

$r^n$  برابر است با

$$r^n = (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma}$$

$$\vec{\nabla} \cdot r^n \vec{r} = \gamma x^{\gamma} \left( \frac{n}{\gamma} \right) (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma - 1} + \gamma y^{\gamma} \left( \frac{n}{\gamma} \right) (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma - 1}$$

$$+ \gamma z^{\gamma} \left( \frac{n}{\gamma} \right) (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma - 1} + r^n + r^n + r^n$$

$$= n (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma}) (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma - 1} + \gamma r^n$$

$$= nr^n + \gamma r^n = (n + \gamma) r^n$$

$$\vec{\nabla} \times (r^n \vec{r}) = 0 \quad (\text{ب})$$

۱۵- فرض کنید

$$V = \ln r = \ln \left( \sqrt{x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma}} \right) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r^3} (rx) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{x}{r^5}$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{r^3} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} V = \vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} \hat{a}_x \quad (\text{ب})$$

$$\nabla^2 (\ln r) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\ln r) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 A_r) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r) = \frac{1}{r^2}$$

۱۶- با نوشتن  $\nabla^2 V$  در دستگاه مختصات مربوطه

$$\nabla^2 V_1 = \nabla^2 (x + y + z) \quad (\text{الف})$$

$$-\nabla^2 V_2 = \left( -\frac{r^2 z^2}{\rho} + r\rho \right) \sin^2 \varphi \quad (\text{ب})$$

$$-r + \varepsilon \cos \theta \sin \varphi - \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin^2 \theta} \quad (\text{ج})$$

$$\nabla^2 V = r (y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2) \quad (\text{الف-۱۷})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= \nabla^2 A_x \hat{a}_x + \nabla^2 A_y \hat{a}_y + \nabla^2 A_z \hat{a}_z \quad (\text{ب}) \\ &= ry \hat{a}_x + rz \hat{a}_y - r(y^2 + z^2) \hat{a}_z \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = ry \hat{a}_x + r(x - ryz) \hat{a}_y - ry^2 \hat{a}_z \quad (\text{ج})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{د})$$

با استفاده از نتایج قسمت‌های (ب) و (ج) خواهیم داشت

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \nabla(x - 2yz - 3xz)\hat{a}_y + 2z\hat{a}_z$$

۱۸- با توجه به شکل ۱-۲

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \int_1 + \int_2 + \int_3 \right) \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (\text{الف})$$

برای مسیر ۱

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y, \quad dy = dx, \quad y = x$$

$$\int_1 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1 (x^2 dx - x dx) = -\frac{1}{4}$$

برای مسیر ۲

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y, \quad dy = -dx, \quad y = -x + 2$$

$$\int_2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 (-x^2 + 2x^2 - x + 2) dx = \frac{17}{12}$$

برای مسیر ۳

$$\int_3 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_2^1 x^2 y dx \Big|_{y=0} = 0$$

در نتیجه

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4} + \frac{17}{12} + 0 = \frac{7}{6}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -x^2\hat{a}_x, \quad d\vec{s} = dx dy (-\hat{a}_x) \quad (\text{ب})$$

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = - \iint (-x^2) dx dy = \frac{7}{6}$$

(ج) با توجه به مساوی شدن قسمت‌های الف و ب، قضیه استوکس برقرار است

۱۹- با توجه به شکل ۱-۳

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \left[ \iint_{z=-1} + \iint_{z=1} + \iint_{\rho=2} + \iint_{\rho=0} \right] \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

$$= - \iint \rho^2 \cos^2 \phi d\phi d\rho + \iint \rho^2 \cos^2 \phi d\phi d\rho - \iint \gamma \rho^2 z^2 d\phi dz \Big|_{\rho=2}$$

$$- \iint \gamma \rho^2 z^2 d\phi dz \Big|_{\rho=0} = 0.6\pi = 1.76$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\gamma \rho^2 z^2) = 2z^2$$

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dv = \iiint 2z^2 \rho d\rho d\phi dz = 0.6\pi = 1.76$$

۲۰- چون  $\vec{U} = \vec{W} \times \vec{r}$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{\nabla} \times (\vec{W} \times \vec{r})$ . با استفاده از رابطه

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

خواهیم داشت

$$\vec{\nabla} \times (\vec{W} \times \vec{r}) = \vec{W} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{W} - (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r}$$

$$= 2\vec{W} \Rightarrow \vec{W} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{U}$$

۲۱- با فرض  $\vec{A} = U \vec{\nabla} V$  و اعمال قضیه استوکس

$$\int_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{\nabla} \times (U \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_s (\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s} + \int_s U (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s}$$

اما  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$ ، در نتیجه

$$\int_L \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{V} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \mathbf{U} \times \nabla \mathbf{V}) \cdot d\vec{s}$$

همین طور می توان نوشت

$$\int_L \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{U} \cdot d\vec{l} = - \int_s (\nabla \mathbf{U} \times \nabla \mathbf{V}) \cdot d\vec{s} + \int_s \mathbf{V} (\nabla \times \nabla \mathbf{U}) \cdot d\vec{s}$$

اما  $\nabla \times \nabla \mathbf{U} = 0$ ، در نتیجه

$$\int_L \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{V} \cdot d\vec{l} = - \int_L \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{U} \cdot d\vec{l}$$

۲۲- فرض کنید

$$\vec{A} = r^n \vec{r} = (x^r + y^r + z^r)^{n/r} (x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z)$$

طبق قضیه واگرایی

$$\int_s \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_v \nabla \cdot \vec{A} \, dV$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} (x r^n) + \frac{\partial}{\partial y} (y r^n) + \frac{\partial}{\partial z} (z r^n) = (r + n) r^n$$

در نتیجه

$$\oint_s r^n \vec{r} \cdot d\vec{s} = \int_v (r + n) r^n \, dV \Rightarrow \int_v r^n \, dV = \frac{1}{n+3} \oint_s r^n \vec{r} \cdot d\vec{s}$$

۲۳- اگر بردار  $\vec{T}$  غیر چرخشی باشد، باید  $\nabla \times \vec{T} = 0$ . نتیجه می شود.

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{T}$  در نقطه  $(2, -1, 0)$  برابر  $(-1)$  است.

۲۴- به منظور محاسبه واگرایی و تاو با متمتیکا، ابتدا باید از فرمان زیر استفاده کنیم.

Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

واگرایی و تاو هر دو دارای دو شناسه هستند. اولی میدان برداری و دومی دستگاه مختصاتی است که محاسبات باید در آن انجام شود. مثلاً برای محاسبه واگرایی و تاو بردار  $\vec{A}$  در دستگاه مختصات دکارتی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

Clear [A, x, y, z]; (الف)

$$A [x_, y_, z_] := \{ E \times P [x * y], \sin [x * y], \cos^2 [x * z] \}$$

$$\text{Div} [A [x, y, z], \text{cartesian} [x, y, z]]$$

$$\text{Curl} [A [x, y, z], \text{cartesian} [x, y, z]]$$

(ب) در مختصات استوانه‌ای داریم (در اینجا حروف  $r, F$  به ترتیب برای  $\rho$  و  $\varphi$  به کار رفته‌اند)

Clear [B, x, F, z]

$$B [r_, F_, z_] := \{ r * z^2 * \cos [F], 0, z * \sin^2 [F] \}$$

$$\text{Div} [B [r, F, z], \text{cylindrical} [r, F, z]]$$

$$\text{Curl} [B [r, F, z], \text{cylindrical} [r, F, z]]$$

(ج) و در مختصات کروی داریم (در این جا حروف  $f, q$  به ترتیب برای  $\theta$  و  $\varphi$  به کار رفته‌اند؛ همین‌طور به جای  $C, C_1$  قرار می‌دهیم، چون متمتیکا خطا می‌دهد.

Clear [C, r, q, f]

$$C_{\lambda}[r_-, q_-, f_-] := \left\{ r_* \cos[q], -\sin[q]/r, \nu_* r^{\lambda} \sin^{\lambda}[q] \right\}$$

$$\text{Div} \left[ C_{\lambda}[r, q, f], \text{Spherical}[r, q, f] \right]$$

$$\text{Curl} \left[ C_{\lambda}[r, q, f], \text{Spherical}[r, q, f] \right]$$

۲۵- با استفاده از متمتیکا خواهیم داشت.

$$V_{\lambda} := x^{\lambda} + y^{\lambda} + z^{\lambda}$$

(الف)

$$\text{Laplacian} \left[ V_{\lambda}, \text{cartesian} \right]$$

$$V_{\nu} := r_* z^{\lambda} \sin[\nu f]$$

(ب)

$$\text{Laplacian} \left[ V_{\nu}, \text{Cylindrical}[r, f, z] \right]$$

$$V_{\nu} := r^{\lambda} \left[ 1 + \cos[q] \sin[f] \right]$$

(ج)

$$\text{Laplacian} \left[ V_{\nu}, \text{Spherical}[r, q, f] \right]$$

## راهنمای حل مسائل فصل دوم

### میدان‌های الکترواستاتیک در خلاء

#### ۱-۲ خلاصه مطالب

۱- دو قانون بنیادی میدان‌های الکترواستاتیک، یعنی قانون کولن و قانون گاوس در این فصل مورد بحث قرار گرفتند. طبق قانون نیروی کولن

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon \pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

۲- براساس قانون کولن، شدت میدان الکتریکی  $\vec{E}$  را به عنوان نیروی بر واحد بار تعریف می‌کنیم یعنی

$$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R = \frac{Q\vec{R}}{\epsilon \pi \epsilon_0 R^3} \text{ (فقط بار نقطه‌ای)}$$

۳- برای توزیع بارهای پیوسته، بار کل برابر است با

$$Q = \int \rho_L dl \quad \text{(برای بار خطی)}$$

$$Q = \int \rho_S ds \quad \text{(برای بار سطحی)}$$

$$Q = \int \rho_V dv \quad \text{(برای بار حجمی)}$$



میدان  $\vec{E}$  ناشی از یک توزیع بار پیوسته را می‌توان با قرار دادن  $dQ = \rho_L dl$ ،  $dQ = \rho_s ds$  یا  $dQ = \rho_v dv$  به جای  $Q$  در فرمول بار نقطه‌ای و به ترتیب با انتگرال‌گیری خطی، سطحی یا حجمی به دست آورد.

۴- برای یک بار خطی بینهایت  $\vec{E} = \frac{\rho_L r}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_\rho$  و برای یک ورقه بادار بینهایت  $\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_n$ .

۵- رابطه چگالی شار الکتریکی  $\vec{D}$  با چگالی میدان الکتریکی (در فضای تهی) برابر است با  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ . شار الکتریکی از میان یک سطح  $S$  عبارت است از

$$\bar{\psi} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

۶- طبق قانون گاوس، شار الکتریکی نفوذ کننده به یک سطح بسته برابر است با بار کل احاطه شده، یعنی  $\psi = Q$  (احاطه) از این رو

$$\psi = \int_{\text{احاطه}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q = \int \rho_v dv$$

$$\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} \quad (\text{اولین معادله ماکسول})$$

وقتی که توزیع بار متقارن است، می‌توان یک سطح گاوسی (که  $\vec{D} = D_n \hat{a}_n$  ثابت است) یافت. قانون گاوس در تعیین  $\vec{D}$  مفید است، یعنی

$$D_n = \int_{\text{احاطه}} d\vec{s} = Q$$

$$D_n = \frac{Q_{\text{احاطه}}}{S}$$

۷- کار کل انجام شده یا انرژی پتانسیل الکتریکی برای حرکت یک بار نقطه‌ای  $Q$  از نقطه  $A$  به  $B$  در یک میدان الکتریکی  $E$  برابر است با

$$W = -Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

۸- پتانسیل در  $\vec{r}$  حاصل از بار نقطه‌ای  $Q$  در  $\vec{r}'$  عبارت است از

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + C$$

که ثابت  $C$  در یک نقطه پتانسیل مرجع محاسبه می‌شود. مثلاً  $C = 0$  است اگر  $V(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0$  باشد. برای تعیین پتانسیل حاصل از یک توزیع بار پیوسته، به جای  $Q$  در فرمول بار نقطه‌ای، به ترتیب  $dQ = \rho_L dl$ ،  $dQ = \rho_s ds$  یا  $dQ = \rho_v dv$  قرار داده و انتگرال خطی، سطحی یا حجمی می‌گیریم.

۹- اگر توزیع بار معلوم نباشد اما شدت میدان الکتریکی  $\vec{E}$  داده شده باشد، پتانسیل از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} + C$$

۱۰- اختلاف پتانسیل  $V_{AB}$ ، یعنی پتانسیل در  $B$  نسبت به  $A$  برابر است با

$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{W}{Q} = V_B - V_A$$

۱۱- چون یک میدان الکترواستاتیک پایستار است (کار کل انجام شده در امتداد یک بسته در یک میدان  $\vec{E}$  پایا صفر است)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

یا

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \text{ (دومین معادله ماکسول)}$$

۱۲- اگر پتانسیل معلوم باشد، میدان الکتریکی از رابطه زیر به دست می آید.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

۱۳-  $\vec{D}$  در هر نقطه ای بر خطوط شار الکتریکی مماس است. برای یک سطح (یا خط) هم پتانسیل  $V$  ثابت است. خط هم پتانسیل در هر نقطه بر خط شار الکتریکی عمود است.

۱۴- برای یک دوقطبی الکتریکی واقع در  $\vec{r}'$  با گشتاور دوقطبی  $\vec{P}$ ، پتانسیل در  $\vec{r}$  برابر است با

$$V(\vec{r}) = \frac{P \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\epsilon \pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

۱۵- پتانسیل یک چهارقطبی الکتریکی در  $\vec{r}$  برابر است با

$$V(\vec{r}) = \frac{2QS^2}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^3} \frac{(3 \cos^2 \alpha - 1)}{2}$$

که  $\cos \theta = \hat{z} \cdot \hat{r}$  و  $S$  فاصله بین بارها است.

۱۶- پتانسیل یک توزیع بار را می توان بر حسب چندقطبی ها بسط داد.

۱۷- انرژی الکترواستاتیکی  $n$  بار نقطه ای برابر است با

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k V_k$$

و برای یک توزیع بار حجمی پیوسته

$$W_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \, dv$$

## ۲-۲ مثال‌های حل شده

مثال (۱-۲): بارهای نقطه‌ای  $1mc$  و  $-2mc$  به ترتیب در نقاط  $(3, 2, -1)$  و  $(-1, -1, 4)$  واقع شده‌اند، نیروی الکتریکی وارد بر یک بار  $10nc$  واقع  $(0, 3, 1)$  و شدت میدان الکتریکی در آن نقطه را محاسبه کنید.

جواب:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_{k=1,2} \frac{Q Q_k}{\epsilon \pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R = \sum_{k=1,2} \frac{Q Q_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{\epsilon \pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \\ &= \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{10^{-3} [(0, 3, 1) - (3, 2, -1)]}{|(0, 3, 1) - (3, 2, -1)|^3} - \frac{2 \times 10^{-3} [(0, 3, 1) - (-1, -1, 4)]}{|(0, 3, 1) - (-1, -1, 4)|^3} \right\} \\ &= \frac{10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}{\epsilon \pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi}} \left[ \frac{(-3, 1, 2)}{(9+1+4)^{3/2}} - \frac{2 \times (1, 4, -3)}{(1+16+9)^{3/2}} \right] \\ &= 9 \times 10^{-2} \left[ \frac{(-3, 1, 2)}{14\sqrt{14}} + \frac{(-2, -8, 6)}{26\sqrt{26}} \right] \end{aligned}$$

$$\vec{F} = -7/50.7 \hat{a}_x - 3/81.7 \hat{a}_y + 7/50.6 \hat{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = (-7/50.7, -3/81.7, 7/50.6) \times \frac{10^{-3}}{10 \times 10^{-9}}$$

$$\vec{E} = -70.7 \hat{a}_x - 381.7 \hat{a}_y + 70.6 \hat{a}_z \frac{N}{C}$$

مثال (۲-۲): ورقه محدود  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , واقع در صفحه  $z = 0$  دارای چگالی بار

$$\rho_s = xy \left( x^2 + y^2 + 25 \right)^{3/2} \quad \left( \text{بر حسب } \frac{\text{nc}}{\text{m}^2} \right) \text{ است. پیدا کنید}$$

(الف) بار کل روی ورقه.

(ب) میدان الکتریکی در نقطه  $(0, 0, 5)$ .

(ج) نیروی وارد بر بار  $1 \text{ mc}$  در نقطه  $(0, 0, 5)$ .

$$Q = \int \rho_s \, ds = \int_0^1 \int_0^1 xy \left( x^2 + y^2 + 25 \right)^{3/2} \, dx \, dy \quad (\text{جواب: الف})$$

چون  $x \, dx = \frac{1}{2} d(x^2)$ ، از رابطه فوق نسبت به  $x^2$  انتگرال می‌گیریم (یا با تغییر متغیر  $x^2 = u$ ، در نتیجه  $x \, dx = \frac{du}{2}$ ).

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left( x^2 + y^2 + 25 \right)^{3/2} d(x^2) \, dy \quad (\text{nc}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y \left. \frac{2}{5} \left( x^2 + y^2 + 25 \right)^{5/2} \right|_0^1 \, dy \\ &= \frac{1}{5} \int_0^1 \left[ \left( y^2 + 26 \right)^{5/2} - \left( y^2 + 25 \right)^{5/2} \right] d(y^2) \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{2}{5} \left[ \left( y^2 + 26 \right)^{5/2} - \left( y^2 + 25 \right)^{5/2} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{35} \left[ \left( 27 \right)^{5/2} + \left( 25 \right)^{5/2} - 2 \times \left( 26 \right)^{5/2} \right] = 33.15 \text{ nc} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_s \, ds \, \hat{\mathbf{R}}}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2} = \int \frac{\rho_s \, ds \left( \vec{r} - \vec{r}' \right)}{\epsilon \pi \epsilon_0 \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} \quad (\text{ب})$$

که

$$\vec{r} - \vec{r}' = (0, 0, 5) - (x, y, 0) = (-x, -y, 5)$$

در نتیجه

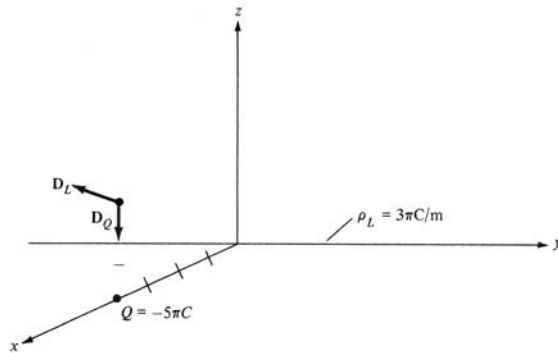
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int \int \frac{10^{-9} xy (x^2 + y^2 + 25)^{3/2} (-x \hat{a}_x - y \hat{a}_y + 5 \hat{a}_z) dx dy}{\epsilon \pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} (x^2 + y^2 + 25)^{3/2}} \\ &= 9 \left[ -\int x^2 dx \int y dy \hat{a}_x - \int x dx \int y^2 dy \hat{a}_y + 5 \int x dx \int y dy \hat{a}_z \right] \\ &= 9 \left( -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{4} \right) = (-1/5, -1/5, 11/25) \left( \frac{V}{m} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} (1/5, 1/5, -11/25) \text{ mN} \quad (\text{ج})$$

مثال (۳-۲): اگر یک بار نقطه‌ای  $5\pi \text{ mc}$  در نقطه  $(3, 0, 4)$  و یک بار خطی  $3\pi \frac{\text{mc}}{\text{m}}$  در امتداد محور  $y$  وجود داشته باشند، میدان  $\vec{D}$  را در نقطه  $(4, 0, 3)$  تعیین کنید.

جواب: فرض کنید که  $\vec{D} = \vec{D}_Q + \vec{D}_L$ ، که  $\vec{D}_Q$  و  $\vec{D}_L$  به ترتیب چگالی‌های شار مربوط به بار نقطه‌ای و بار خطی هستند (شکل ۱-۲).

$$\vec{D}_Q = \epsilon_0 \vec{E} = \frac{Q \hat{a}_R}{\epsilon \pi R^2} = \frac{Q (\vec{r} - \vec{r}')}{\epsilon \pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



شکل ۱-۲. چگالی شار  $\vec{D}$  حاصل از یک بار نقطه‌ای و یک خط باردار بینهایت.

$$\text{که در نتیجه } |\vec{r} - \vec{r}'| = (\xi, 0, 3) - (\xi, 0, 0) = (0, 0, 3)$$

$$\vec{D}_Q = \frac{-5\pi \times 10^{-3} (\xi, 0, 3)}{\epsilon \pi |(\xi, 0, 3)|^2} = -0.138 \hat{a}_z$$

همین‌طور

$$\vec{D}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \hat{a}_\rho$$

در این حالت

$$\hat{a}_\rho = \frac{(\xi, 0, 3) - (\xi, 0, 0)}{|(\xi, 0, 3) - (\xi, 0, 0)|} = \frac{(\xi, 0, 3)}{3}$$

$$\rho = |(\xi, 0, 3) - (\xi, 0, 0)| = 3$$

در نتیجه

$$\vec{D}_L = \frac{3\pi}{2\pi(3)} (\xi \hat{a}_x + 3 \hat{a}_z) = 0.5 \hat{a}_x + 1.5 \hat{a}_z$$

بنابراین

$$\vec{D} = \vec{D}_Q + \vec{D}_L = 0.5 \hat{a}_x + 1.5 \hat{a}_z - 0.138 \hat{a}_z = 0.5 \hat{a}_x + 1.362 \hat{a}_z$$

مثال (۲-۴): بردار  $\vec{D}$  به صورت  $\vec{D} = z \rho \cos^2 \varphi \hat{a}_z$  (برحسب  $\frac{C}{m^2}$ ) داده شده است. چگالی بار در نقطه  $(\rho, \varphi, z)$   $(1, \frac{\pi}{4}, 3)$  و بار کل احاطه شده توسط استوانه‌ای به شعاع ۱ متر و  $2 \leq z \leq 2$  متر محاسبه کنید.

$$\rho_v = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \cos^2 \varphi \quad \text{جواب:}$$

در نقطه  $(\rho, \varphi, z)$   $(1, \frac{\pi}{4}, 3)$ ،  $\rho_v = 1 \times \cos^2(\frac{\pi}{4}) = 0.5 \frac{C}{m^3}$ . بار کل احاطه شده توسط استوانه را به دو روش مختلف می‌توان پیدا کرد.

روش اول: این روش مستقیماً براساس تعریف بار حجمی کل است.

$$\begin{aligned} Q &= \int_v \rho_v \, dv = \int_v \rho \cos^2 \varphi \rho \, d\varphi \, \rho \, dz \\ &= \int_{z=2}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_{\rho=0}^1 \rho^2 \, d\rho = 4\pi \left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

روش دوم: در این روش از قانون گاوس استفاده می‌کنیم؛

$$Q = \psi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \left[ \int_s + \int_t + \int_b \right] \vec{D} \cdot d\vec{s} = \psi_s + \psi_t + \psi_b$$

که  $\psi_s$ ،  $\psi_t$ ،  $\psi_b$  به ترتیب شار عبوری از سطح جانبی، سطح بالایی و سطح پایینی استوانه است (شکل ۱-۲۰ را ببینید). چون  $\vec{D}$  مؤلفه‌ای در امتداد  $\hat{a}_\rho$  ندارد،  $\psi_s = 0$ . برای  $\psi_t$ ،  $d\vec{s} = \rho \, d\varphi \, d\rho \, \hat{a}_z$ ، در نتیجه



$$\begin{aligned}\Psi_t &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} z \rho \cos^2 \varphi \rho \, d\varphi \, d\rho \Big|_{z=2} \\ &= 2 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = 2 \left( \frac{1}{3} \right) \pi = \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

و برای  $\Psi_b$ ،  $d\vec{s} = -\rho \, d\varphi \, d\rho \, \hat{a}_z$ ، در نتیجه

$$\begin{aligned}\Psi_b &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} z \rho \cos^2 \varphi \rho \, d\varphi \, d\rho \Big|_{z=-2} \\ &= -2 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = -\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$Q = \Psi = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

**مثال (۲-۵):** دو بار نقطه‌ای  $5 \mu\text{C}$ ،  $-4 \mu\text{C}$  به ترتیب در مکان‌های  $(3, -1, 2)$  و  $(-2, 4, 0)$  واقع شده‌اند. با فرض پتانسیل صفر در بینهایت، پتانسیل در نقطه  $(1, 0, 1)$  را پیدا کنید.

$Q_2 = 5 \mu\text{C}$ ،  $Q_1 = -4 \mu\text{C}$  **جواب:**

$$V(\vec{r}) = \frac{Q_1}{\epsilon \pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{Q_2}{\epsilon \pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_2|} + c_0$$

اگر  $V(\infty) = 0$  باشد،  $c_0 = 0$ ،

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = |(1, 0, 1) - (2, -1, 3)| = |(-1, 1, -2)| = \sqrt{6}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_2| = |(1, 0, 1) - (0, 4, -2)| = |(1, -4, 3)| = \sqrt{26}$$

در نتیجه

$$V(1,0,1) = \frac{10^{-6}}{\epsilon \pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi}} + \left[ \frac{-4}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{26}} \right]$$

$$= 9 \times 10^3 (-1/633 + 0/9806) = -5/872 \text{ kV}$$

مثال (۶-۲): پتانسیل  $V = \frac{10}{r^2} \sin \theta \cos \phi$  داده شده است.

(الف) چگالی شار الکتریکی  $\vec{D}$  را در  $(2, \frac{\pi}{4}, 0)$  پیدا کنید.

(ب) کار انجام شده در حرکت یک بار  $10 \mu\text{C}$  از نقطه  $A(1, 30^\circ, 120^\circ)$  به نقطه  $B(4, 90^\circ, 60^\circ)$  را حساب کنید.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{(جواب: الف)}$$

اما

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = - \left[ \frac{\partial V}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{a}_\phi \right]$$

$$= \frac{20}{r^3} \sin \theta \cos \phi \hat{a}_r - \frac{10}{r^3} \cos \theta \cos \phi \hat{a}_\theta + \frac{10}{r^3} \sin \phi \hat{a}_\phi$$

در نقطه  $A(2, \frac{\pi}{4}, 0)$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \left( r=2, \theta=\frac{\pi}{4}, \phi=0 \right) = \epsilon_0 \left( \frac{20}{8} \hat{a}_r - 0 \hat{a}_\theta + 0 \hat{a}_\phi \right)$$

$$= 2/5 \epsilon_0 \hat{a}_r \frac{c}{m^2} = 22/1 \hat{a}_r \frac{Pc}{m^2}$$

(ب) کار انجام شده را به دو روش می‌توان به دست آورد، یا از  $\vec{E}$  و یا از  $V$ .  
روش اول (استفاده از  $\vec{E}$ )

$$-\frac{W}{Q} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{یا} \quad W = -Q \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

چون میدان الکترواستاتیک پایستار است، مسیر انتگرال گیری اهمیتی ندارد. از این رو کار انجام شده در حرکت Q از  $A(1, 30^\circ, 120^\circ)$  به  $B(2, 90^\circ, 60^\circ)$  برابر است با حرکت Q از A به  $A'$ ، به اضافه  $A'$  به  $B'$ ، و از  $B'$  به B که

$$A(1, 30^\circ, 120^\circ) \qquad B(2, 90^\circ, 60^\circ)$$

$$\downarrow d\vec{l} = dr \hat{a}_r \qquad \uparrow d\vec{l} = r \sin \theta d\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$A'(1, 30^\circ, 120^\circ) \quad \underline{d\vec{l} = r d\theta \hat{a}_\theta} \quad B'(2, 90^\circ, 60^\circ)$$

یعنی به جای حرکت Q مستقیماً از A به B، بار از  $A \rightarrow A'$ ،  $A' \rightarrow B'$ ،  $B' \rightarrow B$  حرکت داده می شود، در نتیجه در هر زمان فقط یک متغیر تغییر داده می شود. این موضوع محاسبه انتگرال خطی را خیلی ساده تر می کند. در نتیجه

$$\begin{aligned} -\frac{W}{Q} &= -\frac{1}{Q} (W_{AA'} + W_{A'B'} + W_{B'B}) = \left( \int_{AA'} + \int_{A'B'} + \int_{B'B} \right) \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{r=1}^2 \frac{2 \cdot \sin \theta \cos \varphi}{r^3} dr \Big|_{\theta=30^\circ, \varphi=120^\circ} + \int_{\theta=30^\circ}^{90^\circ} \frac{-1 \cdot \cos \theta \cos \varphi}{r^3} r d\theta \Big|_{r=2, \varphi=120^\circ} \\ &\quad + \int_{\varphi=120^\circ}^{60^\circ} \frac{1 \cdot \sin \varphi}{r^3} r \sin \theta d\varphi \Big|_{r=2, \theta=90^\circ} \\ &= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ -\frac{1}{2r^2} \Big|_{r=1}^2 \right] - \frac{1 \cdot (-1)}{16 \cdot 2} \sin \theta \Big|_{30^\circ}^{60^\circ} + \frac{1 \cdot (1)}{16} \left[ -\cos \varphi \Big|_{120^\circ}^{60^\circ} \right] \\ &= \frac{W}{Q} = \frac{-75}{32} + \frac{5}{32} - \frac{10}{16} \Rightarrow W = \frac{45}{16} Q = 28.125 \mu\text{J} \end{aligned}$$

روش دوم (استفاده از  $V$ )

چون  $V$  معلوم است، این روش خیلی آسان است.

$$\begin{aligned}
 W &= -Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q V_{AB} = Q (V_B - V_A) \\
 &= 10 \left( \frac{10}{16} \sin 90^\circ \cos 60^\circ - \frac{10}{1} \sin 30^\circ \cos 120^\circ \right) \times 10^{-6} \\
 &= 10 \left( \frac{10}{32} - \frac{-5}{2} \right) \times 10^{-6} = 28,125 \text{ } \mu\text{J}
 \end{aligned}$$

مثال (۷-۲): سه بار نقطه‌ای  $1\text{nc}$ ،  $-1\text{nc}$  و  $3\text{nc}$  به ترتیب در نقاط  $(0, 0, 0)$ ،  $(0, 0, 1)$  و  $(1, 0, 0)$  واقع شده‌اند، انرژی دستگاه را به دست آورید.

$W = W_1 + W_2 + W_3$  جواب:

$$\begin{aligned}
 &= 0 + Q_2 V_{21} + Q_3 (V_{31} + V_{32}) \\
 &= Q_2 \times \frac{Q_1}{\epsilon \pi \epsilon_0 \left| (1, 0, 0) - (0, 0, 0) \right|} + \frac{Q_1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left[ \frac{Q_1}{\left| (1, 0, 0) - (0, 0, 0) \right|} + \frac{Q_2}{\left| (1, 0, 0) - (0, 0, 1) \right|} \right] \\
 &= \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left( Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + \frac{Q_2 Q_3}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{\epsilon \pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \epsilon_0} \left( -4 - 3 + \frac{12}{\sqrt{2}} \right) \times 10^{18} = 9 \left( \frac{12}{\sqrt{2}} - 7 \right) \text{ nJ} = 13,37 \text{ nJ}
 \end{aligned}$$

یا به صورت دیگر

$$\begin{aligned}
 W_E &= \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\gamma} Q_k V_k = \frac{1}{\gamma} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3) \\
 &= \frac{Q_1}{\gamma} \left[ \frac{Q_2}{\epsilon \pi \epsilon_0 (1)} + \frac{Q_3}{\epsilon \pi \epsilon_0 (1)} \right] + \frac{Q_2}{\gamma} \left[ \frac{Q_1}{\epsilon \pi \epsilon_0 (1)} + \frac{Q_3}{\epsilon \pi \epsilon_0 (\sqrt{\gamma})} \right] \\
 &+ \frac{Q_3}{\gamma} \left[ \frac{Q_1}{\epsilon \pi \epsilon_0 (1)} + \frac{Q_2}{\epsilon \pi \epsilon_0 (\sqrt{\gamma})} \right] \\
 &= \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left( Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + \frac{Q_2 Q_1}{\sqrt{\gamma}} \right) = 9 \left( \frac{12}{\sqrt{\gamma}} - \gamma \right) \text{ nJ} = 13,37 \text{ nJ}
 \end{aligned}$$

۳-۲ پاسخ سؤالات

$$Q = \int \rho_L dl = \int_{\gamma} \rho_L dx = 0,5 \text{ mc} \quad -1$$

$$Q = \int \rho_s ds = \int_{z=0}^{\gamma} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_s r d\phi dz = 1,206 \mu \text{c}$$

$$Q = \int \rho_v dv = \iiint \frac{1}{r \sin \theta} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = 1,5791 \text{ c}$$

$$V = \int \frac{\rho_s ds}{\epsilon \pi \epsilon_0 r}, \quad ds = \rho d\phi d\rho, \quad r = \sqrt{\rho^2 + h^2} \quad -2$$

$$V = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \iint \frac{\rho}{(\rho^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\rho=0}^a \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\gamma \epsilon_0} \ln \frac{a + \sqrt{\rho^2 + h^2}}{h}$$

۳- الف) با توجه به شکل ۱-۲ داریم

$$\vec{D}_R = \int \frac{\rho_L d\vec{R}}{\epsilon \pi R^2}$$

$$\vec{R} = -a \hat{a}_\rho + h \hat{a}_z$$

$$\vec{D}_R = \frac{\rho_L}{\epsilon \pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{a d\phi (-a \hat{a}_\rho + h \hat{a}_z)}{(a^2 + h^2)^{3/2}}$$

به دلیل تقارن، مؤلفه  $\rho$  تغییر می‌کند،

$$\vec{D}_R = \frac{\rho_L (2\pi h) \hat{a}_z}{\epsilon \pi (a^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L a h \hat{a}_z}{2 (a^2 + h^2)^{3/2}}$$

$a=2$ ،  $h=3$  و  $\rho_L = 5 \frac{\mu c}{m}$ ، و چون حلقه در  $x=0$  قرار دارد،  $\hat{a}_x$  به  $\hat{a}_z$  تبدیل می‌شود

$$\vec{D}_R = \frac{2(3)(5)}{2(4+9)^{3/2}} \hat{a}_x = 0.74 \hat{a}_x \frac{\mu c}{m}$$

ب) اندازه  $\vec{D}$  برای دوبار نقطه‌ای برابر است با

$$|\vec{D}_Q| = \frac{1Q}{\epsilon \pi (1.8)^{2/2}}$$

بنابراین

$$|\vec{D}| = |\vec{D}_R| + |\vec{D}_Q| = 0$$

$$0.74 \times 10^{-6} + \frac{1Q}{\epsilon \pi (1.8)^{2/2}} = 0 \Rightarrow Q = -1.02 \times 10^{-6} \mu c$$

$$\vec{D} = \sum \frac{Q_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{\epsilon \pi |(\vec{r} - \vec{r}_k)|^2} = -1.736 \hat{a}_x - 4.97 \hat{a}_y \frac{nc}{m^2} \quad -4$$

۵- الف) در مختصات دکارتی  $\rho_v = \bar{D} \cdot \bar{D} = \lambda y \frac{c}{m^3}$

ب) در مختصات استوانه  $\rho_v = \epsilon z \frac{c}{m^3}$

ج) در مختصات کروی  $\rho_v = 0$

۶- الف)  $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$

ب)  $\rho_v = \bar{\nabla} \cdot \bar{D}$

۷-  $W = \frac{1}{2} \int \bar{D} \cdot \bar{E} dv = \frac{1}{2\epsilon_0} \int |\bar{D}|^2 dv$

۸-  $F = eE$

$$\rho_0 = \frac{e}{\frac{\epsilon}{3} \pi R^3} = \frac{3e}{\epsilon \pi R^3}$$

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_0 & 0 < r < R \\ 0 & \text{هر جای دیگر} \end{cases}$$

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q = \int \rho_v dv = \left( \frac{3e}{\epsilon \pi R^3} \right) \left( \frac{\epsilon}{3} \pi r^3 \right) = D_r (\epsilon \pi r^2)$$

$$E_r = \frac{3er}{12\pi\epsilon_0 R^3} \Rightarrow F = eE = \frac{e^2 r}{\epsilon \pi \epsilon_0 R^3}$$

۹- با استفاده از رابطه  $Q = \int \rho_v dv = \int \bar{D} \cdot d\bar{s}$  داریم

$$Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=1}^2 \int_{z=0}^L (\rho \, d\varphi \, \rho \, dz) = 56\pi L \quad 1 < \rho < 2 \quad \text{برای}$$

$$Q = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = D(2\pi\rho L) \\ = 56\pi L = D(2\pi\rho L) \Rightarrow D = \frac{28}{\rho}$$

۱۰- مسیر را به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$P(1, 2, -1) \quad R(2, -1, 1) \\ \downarrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$P'(2, 2, -1) \rightarrow R'(2, -1, -1)$$

$$-\frac{W}{Q} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow W = 210 \quad Q = 1050 \quad J$$

$$W = qV_{AB} = q(V_B - V_A) = -16 \quad \mu J \quad -11$$

-12

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon \epsilon_0 r^3} \hat{a}_r & r > a \\ \frac{\rho_0 r^2}{\epsilon \epsilon_0 a} \hat{a}_r & r < a \end{cases}$$

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int E dr = \begin{cases} \frac{-\rho_0 r^2}{\epsilon \epsilon_0} + c_1 & r > a \\ \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon \epsilon_0 r} + c_2 & r < a \end{cases}$$

اما  $V(\infty) = 0$  ، در نتیجه  $c_1 = 0$ .



$$V(r=a) = \frac{\rho_0 a^{\gamma}}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{-\rho_0 a^{\gamma}}{12 \epsilon_0} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} + c_1$$

در نتیجه

$$V(r=a) = \frac{\rho_0 a^{\gamma}}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{-\rho_0 a^{\gamma}}{12 \epsilon_0} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} + c_1$$

$$V = \begin{cases} \frac{-\rho_0 r^{\gamma}}{12 \epsilon_0 a} + \frac{\rho_0 a^{\gamma}}{3 \epsilon_0} & r > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon \epsilon_0 r} & r < a \end{cases}$$

۱۳- قابل اثبات است.

(۱۴- الف)

$$Q = \int \rho_v dv = \iiint \rho_0 (a^{\gamma} - r^{\gamma}) r^{\gamma} \sin \theta d\theta d\phi dr = \frac{8\pi a^{\circ}}{15} \rho_0 \quad r < a$$

از طرف دیگر،

$$Q = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 E_r (\epsilon \pi r^{\gamma})$$

$$\epsilon_0 E_r (\epsilon \pi r^{\gamma}) = \frac{8\pi a^{\circ}}{15} \rho_0 \Rightarrow E_r = \frac{2\rho_0 a^{\circ}}{15 \epsilon_0 r^{\gamma}}$$

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{2\rho_0 a^{\circ}}{15 \epsilon_0} \int r^{-\gamma} dr = \frac{2\rho_0 a^{\circ}}{15 \epsilon_0 r} + c_1$$

چون  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ ,  $c_1 = 0$

$$V = \frac{2\rho_0 a^{\circ}}{15 \epsilon_0 r}$$

$$E_r = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2}, \quad V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (\text{ب})$$

$$Q = \int_{\text{کل}} \rho_0 \, dV \quad (\text{ج})$$

$$\vec{P} = \frac{\epsilon}{r} \pi R^2 \sigma_0 \hat{z} \quad -15$$

$$\vec{P} = \int_V \vec{r}' \rho \, dV' \quad -16$$

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2}, \quad \vec{P} - \vec{r} = Qd \sin \theta \sin \phi \quad -17$$

$$V = \frac{Qd \sin \theta \sin \phi}{\epsilon \pi \epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r}, \frac{Qs \cos \theta}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2}, \frac{Qs^2}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^3} \left( \frac{r \cos^2 \theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \quad -18$$

$$W = \frac{1}{\epsilon} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon} \int |\vec{E}|^2 \, dV \quad -19$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

$$W = \frac{Q^2 (\epsilon \pi)^a}{r^2 \pi^2 \epsilon_0} \int_{r^2}^a \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{\epsilon \pi \epsilon_0 a}$$

$$W = \frac{1}{\epsilon} \int |\vec{E}|^2 \, dV = 7.7111 \, \text{nJ} \quad -20$$



## راهنمای حل مسائل فصل سوم

### میدان‌های الکتریکی در مواد

#### ۱-۳ خلاصه مطالب

۱- مواد را می‌توان به عنوان رساناها ( $\epsilon_T \gg 1, \sigma \gg 1$ ) و دی‌الکتریک‌ها ( $\epsilon_T \geq 1, \sigma \ll 1$ ) برحسب خواص الکتریکی  $\sigma$  و  $\epsilon_T$  آنها طبق‌بندی کرد، که  $\sigma$  رسانندگی و  $\epsilon_T$  ثابت دی‌الکتریک یا گذردهی نسبی است.

۲- جریان الکتریکی عبارت است از چگالی جریان الکتریکی از یک سطح، یعنی

$$I = \int \vec{J} \cdot \Delta \vec{S}$$

۳- مقاومت یک رسانا با سطح مقطع یکنواخت برابر با

$$R = \frac{1}{\sigma S}$$

۴- اثر ماکروسکوپی قطبش بر روی یک حجم معین یک ماده الکتریک عبارت است از پوشاندن سطح آن با بار مقید  $Q_b = \oint_s \rho_{ps} ds$  و گذاردن بار مقید  $Q_b = \oint_v \rho_{pv} dv$  در داخل آن، به طوری که

$$\rho_{pv} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad , \quad \rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n$$

۵- در یک ماده دی‌الکتریک، میدان‌های  $\vec{D}$  و  $\vec{E}$  از طریق رابطه  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  با یکدیگر متناسب هستند، که  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  گذردهی محیط است.

۶- پذیرفتاری الکتریکی یک دی‌الکتریک،  $\chi_e$  (یا  $\epsilon_r - 1$ )، حساسیت ماده را به یک میدان الکتریکی اندازه می‌گیرد.

۷- یک ماده دی‌الکتریک خطی است اگر  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  برقرار باشد، یعنی  $\epsilon$  مستقل از  $\vec{E}$  باشد؛ همگن است اگر  $\epsilon$  مستقل از مکان باشد، و همسانگرد است اگر  $\epsilon$  یک اسکالر باشد.

۸- اصل پایستگی بار که اساس قانون جریان کیرشهف است طبق معادله پیوستگی زیر بیان می‌شود.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

۹- زمان واهلش  $T_T = \frac{\epsilon}{\sigma}$  یک ماده عبارت است از زمان لازم برای این که مقدار بار قرار داده شده در داخل آن با ضریب  $\approx 37\%$   $\epsilon^{-1}$  کاهش یابد.

۱۰- شرایط مرزی باید برای یک میدان الکتریکی در دو محیط متفاوت جدا شده توسط یک فصل مشترک برقرار باشند. برای یک فصل مشترک دی‌الکتریک - دی‌الکتریک

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad \text{یا} \quad D_{1n} = D_{2n} \quad \text{اگر} \quad \rho_s = 0$$

چون در داخل رسانا  $\vec{E} = 0$  است.

۱۱- گشتاور دو قطبی یک اتم قطبیده برابر است با  $\vec{P} = Ze \vec{a}$ ، که  $Ze$  بار هسته و  $\vec{a}$  جابه‌جایی مرکز توزیع بار الکترونی از بار هسته است.

میدان‌های الکتریکی در مواد ۴۳

۱۲- قطبش  $\vec{P}$  که بیانگر گشتاور دوقطبی بر واحد حجم دی‌الکتریک است توسط رابطه  $\vec{P} = N \vec{p}$  تعریف می‌شود که  $N$  تعداد اتم بر واحد حجم و  $\vec{p}$  گشتاور دوقطبی یک اتم است.

۱۳- رابطه بین گشتاور دوقطبی یک مولکول منفرد با میدان موضعی برابر است با

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{\text{موضعی}}$$

که ثابت  $\alpha$  قطبش‌پذیری مولکولی نام دارد.

۱۴- پذیرفتاری الکتریکی یک دی‌الکتریک قطبی گازی برابر است با

$$\chi_e = N \left( \alpha + \frac{\rho^2}{3 \epsilon_0 k T} \right)$$

۱۵- پذیرفتاری الکتریکی یک دی‌الکتریک مایع تقریباً برابر است با

$$\chi_e \cong \frac{3 N \alpha}{3 - N \alpha}$$

که به معادله کلاوسیوس - موساتی معروف است.

### ۲-۳ مثال‌های حل شده

مثال (۳-۱): اگر  $\vec{J} = \frac{1}{r^3} (\rho \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta)$  (برحسب  $\frac{A}{m^2}$ )، حساب کنید جریان

عبوری از یک

الف) یک لایه نیم‌کروی به شعاع  $20 \text{ cm}$ .

ب) یک لایه کروی به شعاع  $10 \text{ cm}$ .

جواب:  $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$  که  $d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{a}_r$  در این حالت می‌باشد.

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^2} \cos \theta r^2 \sin \theta d\theta d\phi \Big|_{r=0.7} \quad (\text{الف})$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) \Big|_{r=0.7} = \frac{\xi \pi \sin^2 \theta}{0.7^2} \Big|_0^{\pi/2} = 1.0 \pi = 3.14 \text{ A}$$

ب) در این حالت  $0 \leq \theta \leq \pi$  و  $r = 0.1$  در نتیجه

$$I = \frac{\xi \pi \sin^2 \theta}{0.1^2} \Big|_0^{\pi} = 0$$

یا

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv = 0$$

چون  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ .

مثال (۲-۳): سیمی به قطر ۱mm و رسانندگی  $\frac{S}{m}$  دارای  $5 \times 10^9$  الکترون بر مترمکعب است وقتی که یک میدان الکتریکی  $10 \frac{mV}{m}$  (میلی‌ولت بر متر) اعمال

می‌شود، تعیین کنید

الف) چگالی بار الکترون‌های آزاد

ب) چگالی جریان

ج) جریان در سیم

د) سرعت سوق الکترون‌ها.

جواب: (در این مثال خاص، جریان‌های همرفت و هدایت یکی هستند).

$$\rho_v = ne = 10^{29} (-1.6 \times 10^{-19}) = -1.6 \times 10^{10} \frac{C}{m^3} \quad (\text{الف})$$

$$J = \sigma E = 5 \times 10^7 \times 10 \times 10^{-3} = 500 \frac{kA}{m^2} \quad (\text{ب})$$

$$I = JS = 5 \times 10^0 \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) = \frac{5\pi}{4} \times 10^{-6} \times 10^0 = 0.393 \text{ A} \quad (\text{ج})$$

$$u = \frac{J}{\rho_V} = \frac{5 \times 10^0}{1.76 \times 10^1} = 3.125 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{د})$$

**مثال (۳-۳):** در یک کره دی‌الکتریک ( $\epsilon_r = 5/7$ ) به شعاع  $1.0 \text{ cm}$  بار نقطه‌ای  $2 \text{ pC}$  در مرکز آن قرار داده شده است. حساب کنید  
 الف) چگالی سطحی بار قطبشی روی سطح کره.  
 ب) نیروی وارد بر یک بار نقطه  $-4 \text{ pC}$  واقع بر روی کره.  
**جواب:** الف) با به کار بردن قانون گاوس

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{a}_r$$

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \frac{\chi_e Q}{4\pi\epsilon_r r^2} \hat{a}_r$$

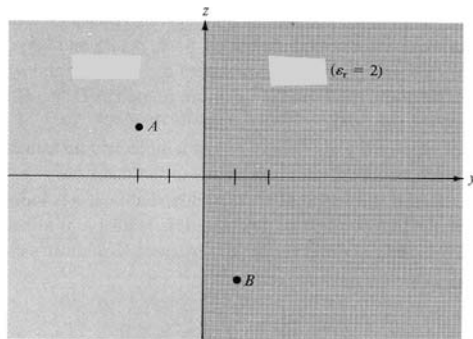
$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_r = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r r^2} = \frac{4/7 \times 2 \times 10^{-12}}{4\pi(5/7) \times 10^0 \times 10^{-4}} = 13/12 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$$

ب) با استفاده از قانون کولن

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{a}_r = \frac{-4 \times 2 \times 10^{-12} \times 10^{-12}}{4\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 5/7 \times 10^0 \times 10^{-4}} \hat{a}_r = -1/273 \hat{a}_r$$

**مثال (۴-۳):** در شکل ۳-۱، ناحیه  $y \leq 0$  از یک رسانای کامل و ناحیه  $y \geq 0$  یک ماده دی‌الکتریک ( $\epsilon_r = 2$ ) است. اگر بار سطحی  $2 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  روی رسانا باشد،  $\vec{E}$  و  $\vec{D}$  را در نقاط الف) (۲ و ۳) و ب) (۵ و ۱ و ۴) تعیین کنید.





شکل ۳-۱. مربوط به مثال ۳-۴.

جواب: الف) نقطه (۲ و -۲ و ۳) در رسانا می‌باشد چون  $y = -2 < 0$  در A

است در نتیجه

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

ب) نقطه (۵ و ۱ و -۴) در ماده دی‌الکتریک می‌باشد چون  $y = 1 > 0$  در B است از این

رو

$$D_n = \rho_s = 2 \frac{nc}{m^2}$$

$$\vec{D} = 2 \hat{a}_y \left( \frac{nc}{m^2} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 2 \times 10^{-9} \times \frac{36\pi}{2} \times 10^9 \hat{a}_y = 36\pi \hat{a}_y = 113.1 \hat{a}_y \left( \frac{V}{m} \right)$$

۳-۳ پاسخ سؤالات

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}, \quad d\vec{s} = r \sin \theta d\phi dr \hat{a}_\theta \quad -1$$

$$I = - \int_{r=0}^{\gamma} \int_{\varphi=0}^{\gamma\pi} r^{\gamma} \sin^{\gamma} \theta d\varphi dr \Big|_{\theta=\gamma^{\circ}} = \left( \sin \gamma^{\circ} \right)^{\gamma} \frac{r^{\xi}}{\xi} \Big|_{\xi}^{\gamma} (\gamma\pi)$$

$$= -\gamma\pi = -\gamma/\gamma\pi^{\gamma} \text{ A}$$

۲- کافی است زمان‌ها را در این معادله قرار دهیم.

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\gamma \times 10^{-\xi} e^{-\gamma t}$$

۳- الف) از رابطه  $\nabla^{\gamma} V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$  در مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم.

$$\vec{J} = \rho_v U \hat{a}_y, I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}, d\vec{s} = dx dz \hat{a}_y \quad (\text{ب})$$

$$R = \frac{1}{\sigma s} = \gamma\gamma/\gamma\sigma \text{ m}\Omega \quad (\text{الف-۴})$$

$$I = \frac{V}{R} = \gamma\gamma\sigma/\gamma \text{ A} \quad (\text{ب})$$

$$P = IV = \gamma\gamma\sigma\gamma \text{ kW} \quad (\text{ج})$$

$$R = \frac{\rho l}{\sigma s} \Rightarrow \rho = \gamma/\gamma\sigma\sigma \times 10^{-\gamma} \quad (\text{الف-۵})$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \gamma/\sigma\sigma \times 10^{\gamma} \frac{\text{S}}{\text{m}} \quad (\text{آلومینیم})$$

$$J = \frac{I}{s} = \sigma/\gamma\sigma \frac{\text{A}}{\text{m}^{\gamma}} \quad (\text{ب})$$

یا

$$J = \sigma E$$

$$R = \frac{l}{\sigma s}, s = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}, l = N^2 \pi R \quad -6$$

$$d = 0.7 \text{ mm}, D = 1.7 \text{ mm}, R = 0.42 \text{ } \Omega$$

$$R = \frac{l}{\sigma s} = \frac{h}{\sigma \pi (b^2 - a^2)} = 4 \text{ m}\Omega \quad -7$$

$$|\rho| = n|\rho| = nQd = \gamma ned = \chi_e \epsilon_0 d \quad -8$$

$$\chi_e = \frac{\gamma ned}{\epsilon_0 E} = 0.00182$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1.00182$$

$$P = \frac{\sum_{i=1}^N q_i d_i}{V} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i}{V} \quad -9$$

$$|P| = \frac{n}{V} |P| = \gamma \gamma \times 10^{-18} \cdot^{-18}$$

$$P = |P| a_x = \gamma \gamma \times 10^{-18} a_x \frac{c}{m^2}$$

$$P = \chi_e \epsilon_0 E \Rightarrow \chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E} = 0.407$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1.407$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dz} \hat{a}_z = 10^3 z \hat{a}_z \quad (10-f)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, \rho_v = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$\chi_e = \epsilon_r - 1, \vec{P} = \chi_e \epsilon_r \vec{E} = \frac{\chi_e \vec{D}}{\epsilon_r}, \rho_{Pv} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (ب)$$

$$\rho_{Pv} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} =$$

$$\rho_{Ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n = 0 \sin \alpha y$$

۱۲- الف) با اعمال قانون کولن

$$E_r = \begin{cases} \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2} & b < r < a \\ \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon r^2} & a < r < b \end{cases}$$

$$\chi_e = \epsilon_r - 1, \bar{P} = \chi_e \epsilon_r \bar{E} = \frac{\chi_e \bar{D}}{\epsilon_r}, \rho_{P_v} = -\nabla \cdot \bar{P}$$

$$F_1 = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2}, \quad F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon \pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad -13$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \epsilon_r = \frac{5}{2} = 2.5 \quad \text{پلی استرین}$$

$$Q = \epsilon \pi r_0^2 \rho_s, \quad r_0 = 1.0 \text{ cm} \quad -14$$

$$Q = \int \bar{D} \cdot d\bar{s} = D_n (\epsilon \pi r^2) \Rightarrow D_n = \frac{Q}{\epsilon \pi r^2} = \epsilon E$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon r^2} a_r$$

$$r = \left[ (x^2 + y^2 + z^2) \right]^{1/2} = 1.3 \text{ cm}$$

$$E = \frac{\epsilon \pi r_0^2 \rho_s}{\epsilon \pi \epsilon r^2} a_r = 1.07/1 a_r \frac{V}{m}$$

$$\bar{a}_r = \frac{1}{1.3} (-0.3 \hat{a}_x + 0.4 \hat{a}_y + 0.9 \hat{a}_z)$$

$$\bar{E} = -0.28/1.3 \hat{a}_x + 0.32/1.3 \hat{a}_y + 0.69/1.3 \hat{a}_z \frac{V}{m}$$

$$\bar{D} = \frac{Q}{\epsilon \pi r^2} \hat{a}_r \Rightarrow \bar{E} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r, \rho = 0, \quad 0 < r < a \quad \text{برای} \quad -15$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{\epsilon \pi r^2} \hat{a}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad a < r < b \quad \text{برای}$$

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{\epsilon \pi r^2} \hat{a}_r$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{\epsilon \pi r^2} \hat{a}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r, \rho = 0 \quad r > b \quad \text{برای}$$

در نتیجه

$$\vec{D} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon r^2} \hat{a}_r \quad r > 0 \quad \text{برای}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & \text{هر جای دیگر} \end{cases}$$

$$\vec{P} = \begin{cases} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{\epsilon \pi r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ \cdot & \text{هر جای دیگر} \end{cases}$$

-۱۶

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_0 & 0 < r < a \\ \cdot & r > a \end{cases}$$

$$\epsilon E_r (\epsilon \pi r^2) = \rho_0 \frac{\epsilon \pi r^2}{3} \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 r}{3 \epsilon} \quad \text{برای } r < a$$

$$V_1 = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\rho_0 r^2}{6 \epsilon} + C_1$$

$$\epsilon_0 E_r (\epsilon \pi r^2) = \rho_0 \frac{\epsilon \pi a^2}{3} \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 a^2}{3 \epsilon_0 r^2} \quad \text{برای } r > a$$

$$V_2 = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\rho_0 a^2}{3 \epsilon_0 r} + C_2$$

با اعمال شرایط مرزی

$$\begin{cases} r \rightarrow \infty, V_r = 0, C_r = 0 \\ r = a \Rightarrow V_1 = V_r \Rightarrow C_1 = \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 \epsilon_r} (\epsilon_r + 1) \end{cases}$$

$$V_r(r=a) = \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}$$

۱۷- چون  $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$ ، باید  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  باشد

(الف)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  امکان پذیر است.

(ب)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$  امکان پذیر نیست.

(ج)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$  امکان پذیر نیست.

(د)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  امکان پذیر است.

(۱۸- الف)

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon & 1 & 1 \\ 1 & \epsilon & 1 \\ 1 & 1 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_x = 50 \epsilon_0 \\ D_y = 50 \epsilon_0 \\ D_z = 20 \epsilon_0 \end{cases}$$

$$\vec{D} = 0,442 \hat{a}_x + 0,442 \hat{a}_y + 0,1768 \hat{a}_z \frac{nc}{m^2}$$

(ب)

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon & 1 & 1 \\ 1 & \epsilon & 1 \\ 1 & 1 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_x = 30 \epsilon_0 \\ D_y = 60 \epsilon_0 \\ D_z = 29 \epsilon_0 \end{cases}$$

$$\vec{D} = 0,2653 \hat{a}_x + 0,5305 \hat{a}_y + 0,7958 \hat{a}_z \frac{nc}{m^2}$$

$$Q = Q_0 e^{-t/T_r} \Rightarrow \frac{1}{3} Q_0 = Q_0 e^{-t/T_r} \Rightarrow -19$$

$$T_r = \frac{t_1}{\ln(r)} = 1.87 \mu s$$

$$T_r = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\sigma} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{\sigma T_r}{\epsilon_0} = 2.058$$

$$\frac{Q}{Q_0} = e^{-t/T_r} = e^{-3.0/1.87} = 0.19233$$

$$T_r = \frac{\epsilon}{\sigma} = 1.17 \mu s \quad -20$$

$$\rho_{v_0} = \frac{Q}{V} = 0.298 \frac{C}{m^3}$$

$$\rho_v = \rho_{v_0} e^{-t/T_r} = 0.1898 \frac{C}{m^3}$$

$$\overline{E}_{rt} = \overline{E}_{lt} = -3.0 \hat{a}_x + 5.0 \hat{a}_y, \quad E_{ln} = 7.0 \hat{a}_z \quad -21$$

$$D_{rn} = D_{ln} \Rightarrow \epsilon_r E_{rn} = \epsilon_1 E_{ln}$$

$$\overline{E}_{rn} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} \overline{E}_{ln} = 1.375 \hat{a}_z$$

$$\overline{E}_r = -3.0 \hat{a}_x + 5.0 \hat{a}_y + 1.375 \hat{a}_z$$

$$\overline{D}_r = \epsilon_0 \epsilon_r \overline{E}_r = -1.71 \hat{a}_x + 1.768 \hat{a}_y + 1.0547 \hat{a}_z$$

$$\overline{P}_r = \epsilon_0 \chi_{er} \overline{E}_r = 0.7958 \hat{a}_x + 1.3276 \hat{a}_y + 1.161 \hat{a}_z$$

$$\overline{E}_r \cdot \hat{a}_z = E_1 \cos \theta_n \Rightarrow \cos \theta_n = \frac{7.0}{\left[ (3.0)^2 + (5.0)^2 + (7.0)^2 \right]^{1/2}} = 0.7683$$

$$\theta_n = 39.79^\circ$$

$$\overline{P}_1 = \epsilon_0 \chi_{e1} \overline{E}_1 = 0.1768 \hat{a}_x - 0.1071 \hat{a}_y + 0.2122 \hat{a}_z \quad -22$$

$$\overline{E}_{\perp n} = -\gamma \hat{a}_x, \overline{E}_{\perp t} = \overline{E}_{\perp t} = 1 \cdot \hat{a}_x + 12 \hat{a}_z$$

$$D_{\perp n} = D_{\perp n} \Rightarrow \epsilon_r E_{\perp n} = \epsilon_1 E_{\perp n}$$

$$E_{\perp n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} E_{\perp n} = -\epsilon \hat{a}_y$$

$$\overline{E}_r = 1 \cdot \hat{a}_x - \epsilon \hat{a}_y + 12 \hat{a}_z$$

$$\tan \theta_r = \frac{E_{rt}}{E_{rn}} = 3/9.0.5 \Rightarrow \theta_r = 70/12^\circ$$

$$\omega_E = \frac{1}{\gamma} \overline{D} \cdot \overline{E} = \frac{1}{\gamma} \epsilon |E|^2$$

$$\omega_{E_1} = \frac{1}{\gamma} \epsilon_1 |E_1|^2 = 0.2219 \frac{nJ}{m^3}$$

$$\omega_{E_r} = \frac{1}{\gamma} \epsilon_r |E_r|^2 = 0.3208 \frac{nJ}{m^3}$$

$$\overline{P}_1 = \epsilon_0 \chi_{e1} \overline{E}_1 = 26/5 \hat{a}_\rho + 66/31 \hat{a}_\phi - 53/5 \hat{a}_z \quad -23$$

$$\rho_{PV_1} = -\overline{\nabla} \cdot \overline{P}_1 = -\frac{26/53}{\rho}$$

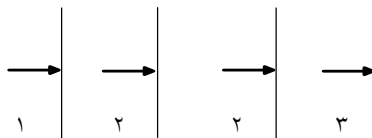
$$\overline{E}_{\perp t} = \overline{E}_{\perp t} = 5 \hat{a}_\phi - \epsilon \hat{a}_z$$

$$D_{\perp n} = D_{\perp n} \Rightarrow E_{\perp n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} E_{\perp n} = 0$$

$$\overline{E}_r = 5 \hat{a}_\rho + 5 \hat{a}_\phi - \epsilon \hat{a}_z$$

$$\overline{D}_r = \epsilon_1 \epsilon_1 \overline{E} = 110/5 \hat{a}_\rho + 110/5 \hat{a}_\phi - 88/42 \hat{a}_z$$

(۲۴- الف)





$$E_{1n} = 2000$$

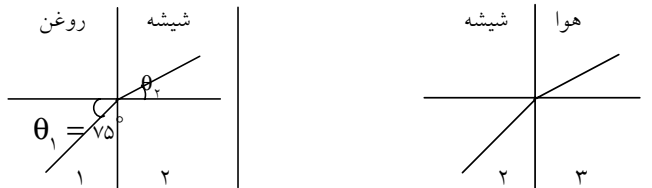
$$E_{1t} = 0 = E_{r1t} = E_{r2t}$$

$$D_{1n} = D_{r1n} = D_{r2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_r E_{r1n} = \epsilon_r E_{r2n}$$

$$E_{r1n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} E_{1n} = 705/9, \theta_r = 0^\circ$$

$$E_{r2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} E_{1n} = 7000, \theta_r = 0^\circ$$

(ب)



$$E_{1n} = 2000 \cos 75^\circ = 517/73$$

$$E_{1t} = 2000 \sin 75^\circ = E_{r1t}$$

$$= E_{r2n} = 1931/85$$

$$E_{r1n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} E_{1n} = 182/7$$

$$E_{r2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} E_{1n} = 1552/89$$

$$E_r = \left[ E_{r1n}^2 + E_{r1t}^2 \right]^{1/2} = 1940/5, \theta_r = \tan^{-1} \frac{E_{r1t}}{E_{r1n}} = 84/7^\circ$$

$$E_r = \left[ E_{r2n}^2 + E_{r2t}^2 \right]^{1/2} = 2478/7, \theta_r = \tan^{-1} \frac{E_{r2t}}{E_{r2n}} = 51/2^\circ$$

$$D_n = \rho_s = \frac{Q}{\epsilon \pi a^2} = \frac{1200}{\pi}$$

$$|\bar{D}| = 381/97 \frac{nc}{m^2}$$

(۲۵- الف)

(ب) با استفاده از قانون گاوس:

$$D_r(\epsilon \pi r^2) = Q \Rightarrow D_r = \frac{Q}{\epsilon \pi r^2}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{\epsilon \pi r^2} \hat{a}_r = \frac{0.955}{r^2} \hat{a}_r$$

$$W = \frac{1}{2\epsilon_0} \int |D|^2 dV = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 4\pi r^2} \iiint \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$= \frac{Q^2}{32\epsilon_0 \pi^2} \epsilon \pi \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 a} = 12.96 \mu\text{J}$$

$$\frac{E}{E} \approx \frac{E_{\text{موضعی}}}{E} \quad -26$$

توجه کنید که رابطه کلاسیوس - موساتی برای یک سیال قطبی مانند آب درست نمی‌باشد. در آب، گشتاورهای دو قطبی مولکول‌های مجاور هم با یکدیگر برهمکنش قوی دارند که حدس نظری میدان موضعی متوسط را بسیار مشکل می‌کند.

۲۷- نیروی بین دو دو قطبی به صورت  $\frac{1}{r^4}$  تغییر می‌کند. انرژی پتانسیل دو دو قطبی برابر  $0.14 \text{ eV}$  - است.



## راهنمای حل مسائل فصل چهارم

### حل مسائل الکترواستاتیک

#### ۴-۱ خلاصه مطالب

۱- مسائل مقدار مرزی آنهایی هستند که پتانسیل در مرزهای ناحیه‌ای مشخص شده است و باید پتانسیل را در داخل ناحیه به دست آورد. این مسائل را می‌توان با استفاده از معادله پواسون اگر  $\rho_v = 0$  باشد، حل کرد.

۲- در یک ناحیه ناهمگن، معادله پواسون عبارت است از  $\nabla \cdot \epsilon \nabla V = -\rho_v$  برای یک ناحیه همگن،  $\epsilon$  مستقل از متغیرهای فضایی است و معادله پواسون تبدیل به  $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$  می‌شود. در یک ناحیه بار آزاد ( $\rho_v = 0$ )، معادله پواسون، تبدیل به معادله لاپلاس  $\nabla^2 V = 0$  می‌شود.

۳- معادله دیفرانسیل حاصل از معادله پواسون یا معادله لاپلاس را می‌توان با دو بار انتگرال‌گیری حل کرد اگر  $V$  بستگی به یک متغیر داشته باشد، یا با روش جداسازی متغیرها حل نمود اگر  $V$  تابعی از بیش از یک متغیر باشد، سپس با اعمال شرایط مرزی مشخص شده جواب یکتایی به دست می‌آید.

۴- طبق قضیه یکتایی، اگر پتانسیل  $V$  در معادله پواسون یا لاپلاس و شرایط مرزی تعیین شده صدق کند،  $V$  تنها جواب ممکن برای آن مسأله خاص است، چرا که فرض شده است فقط و تنها یک جواب وجود داشته باشد.

۵- مسأله یافتن مقاومت  $R$  یک جسم یا ظرفیت  $C$  یک خازن را می‌توان به عنوان یک مسأله مقدار مرزی در نظر گرفت. برای تعیین  $R$ ، ابتدا یک اختلاف پتانسیل  $V_0$  بین پایانه‌های جسم فرض کرده و معادله لاپلاس را حل می‌کنیم، بعد  $I = \int \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s}$  را حل کرده و  $R = \frac{V_0}{I}$  را حل می‌کنیم. همان‌طور، برای تعیین ظرفیت  $C$ ، ابتدا اختلاف پتانسیل  $V_0$  را بین پایانه‌های خازن فرض کرده و معادله لاپلاس را حل می‌کنیم، سپس  $B = \int \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s}$  را حل کرده و  $C = \frac{Q}{V_0}$  را پیدا می‌کنیم.

۶- یک مسأله مقدار مرزی را که در برگیرنده سطوح رسانایی باشد می‌توان به کمک روش تصویری نیز حل نمود. اساس کار این روش به این ترتیب است که پیکربندی بار و صفحه رسانا را می‌توان با خود بار، تصویر آن و یک سطح هم‌پتانسیل جایگزین نمود، یعنی مسأله اولیه توسط یک مسأله تصویری جایگزین می‌شود که با روش‌های بخش ۴-۶ حل می‌شوند.

#### ۴-۲ مثال‌های حل شده

مثال (۴-۱): صفحات رسانای  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ،  $\phi = 0$  توسط لایه عایق بسیار کوچکی مطابق شکل ۴-۱ از هم جدا شده‌اند. اگر  $V(\phi = 0) = 0$ ،  $V(\phi = \frac{\pi}{4}) = 100V$  باشد،  $\vec{E}$  و  $V$  را در ناحیه بین صفحات حساب کنید.

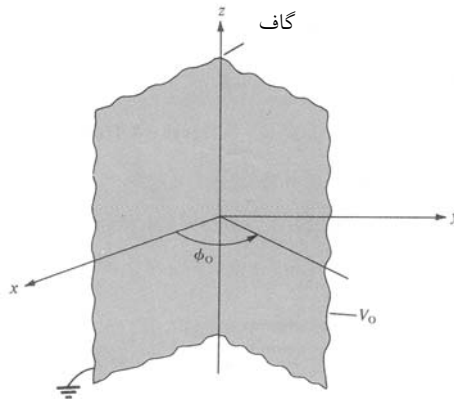
جواب: چون  $V$  بستگی به  $\phi$  دارد، معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای برابر

است با

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

چون  $\rho = 0$  به خاطر لایه عایق صرف‌نظر می‌شود، با ضرب طرفین رابطه فوق در  $\rho^2$

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow V = A\phi + B$$



شکل ۴-۱. پتانسیل  $V(\varphi)$  ناشی از صفحات رسانا.

با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های  $A$ ,  $B$  را تعیین می‌کنیم.  
وقتی  $V=0$ ,  $\phi=0$  است،

$$0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$$

وقتی  $V = V_0$ ,  $\phi = \phi_0$

$$V_0 = A \phi_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\phi_0}$$

میدان  $\vec{E}$  برابر است با

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{a}_\phi = -\frac{V_0}{\rho \phi_0} \hat{a}_\phi$$

با قرار دادن  $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $V_0 = 100$  داریم.

$$V = \frac{600}{\pi} \phi, \vec{E} = -\frac{600}{\pi \rho} \hat{a}_\phi$$

جواب به‌دست‌آمده را می‌توان این‌گونه امتحان کرد.

$$\nabla^2 V = 0, V(\varphi=0) = 0, V\left(\varphi = \frac{\pi}{\epsilon_0}\right) = 100$$

مثال (۲-۴): یک کابل هم‌محور در برگیرنده ماده عایقی با رسانندگی  $\sigma$  است. اگر شعاع سیم مرکزی و روکش به ترتیب  $a$ ،  $b$  باشد، نشان دهید که رسانایی سیم بر واحد طول برابر است با (نگاه کنید به معادله ۴-۵۱):

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

جواب: طول  $L$  از کابل هم‌محوری را مطابق شکل ۴-۸ در کتاب در نظر بگیرید. اگر  $V_0$  اختلاف پتانسیل بین رساناهای داخلی و خارجی باشد به طوری که  $V(\rho=a) = 0$  و  $V(\rho=b) = V_0$ ،  $\vec{V}$  و  $\vec{E}$  را می‌توان همانند قسمت (الف) مثال (۴-۵) در کتاب به دست آورد. در نتیجه

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{-V_0 \sigma}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \hat{a}_\rho, \quad d\vec{s} = -\rho d\varphi dz \hat{a}_\rho$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{V_0 \sigma}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \rho dz d\varphi = \frac{2\pi L V_0 \sigma}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

مقاومت بر واحد طول برابر است با

$$R = \frac{V_0}{IL} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\sigma}$$

و رسانایی بر واحد طول عبارت است از

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

مثال (۳-۴): یک خازن استوانه‌ای دارای شعاع‌های  $a = 1\text{ cm}$  و  $b = 2.5\text{ cm}$  است. اگر فضای بین صفحات با یک دی‌الکتریک ناهمگن با گذردهی  $\epsilon_r = \frac{(1+\rho)}{\rho}$  پر شده باشد ( $\rho$  برحسب سانتیمتر است)، ظرفیت بر واحد طول خازن چقدر است؟  
 جواب: فرایند همانند قسمت (ب) بخش ۴-۵ کتاب است، به جز آن که معادله (۴۳-۴) در این حالت برابر است با

$$V = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r\rho L} d\rho = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho\left(\frac{1+\rho}{\rho}\right)}$$

$$\frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_b^a \frac{d\rho}{1+\rho} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln(1+\rho) \Big|_b^a = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)$$

ظرفیت بر واحد طول برابر است با

$$C = \frac{Q}{VL} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)} = 2\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{1}{\ln\left(\frac{12.5}{11.0}\right)} = 434.76 \frac{\text{PF}}{\text{m}}$$

### ۳-۴ پاسخ سؤالات

- ۱- الف)  $\nabla^2 V_1 = 0$  در معادله لاپلاس صدق می‌کند.  
 ب)  $\nabla^2 V_2 = 0$  در معادله لاپلاس صدق می‌کند.  
 ج)  $\nabla^2 V_3 = 4$  در معادله لاپلاس صدق نمی‌کند.  
 د)  $\nabla^2 V_4 \neq 0$  در معادله لاپلاس صدق نمی‌کند.



$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -n^2 V + n^2 V = 0 \quad -۲$$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V = AZ + B \quad -۳$$

$$\text{شرایط مرزی} \begin{cases} Z=0, V=0 \Rightarrow B=0 \\ Z=d, V=V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{d} \end{cases}$$

$$V = \frac{V_0}{d} Z$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{V_0}{d} \hat{a}_z$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\epsilon_0 \epsilon_r \frac{V_0}{d} \hat{a}_z$$

$$\rho_s = D_n$$

۴- چون  $V$  فقط بستگی به  $\rho$  دارد.

$$\nabla^2 V = 0$$

$$V = \frac{V_0 \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{V_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \hat{a}_\rho, \vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \hat{a}_\rho$$

$$\rho_s = D_n = \pm \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Big|_{\rho=a,b}$$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V = -\frac{A}{r} + B \quad -5$$

$$\text{شرایط مرزی} \begin{cases} r = 0.5 \text{ m} \rightarrow V = -50 \Rightarrow -2A + B = -50 \\ r = 1 \text{ m} \rightarrow V = 50 \Rightarrow -A + B = 50 \end{cases}$$

$$V = -\frac{100}{r} + 150$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{100}{r^2} \hat{a}_r$$

۶- الف) برای یک خازن صفحه موازی

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{a}_x$$

$$C = \frac{1}{V_0^2} \int \epsilon |\vec{E}|^2 dV = \frac{1}{V_0^2} \int \epsilon \frac{V_0^2}{d^2} dV = \frac{\epsilon s}{d}$$

ب) برای خازن استوانه‌ای

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \hat{a}_\rho$$

$$C = \frac{1}{V_0^2} \iiint \frac{\epsilon V_0^2}{\left(\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{V_0}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\frac{b}{a}}$$

ج) برای خازن کروی

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \hat{a}_r$$

$$C = \frac{1}{V_0^{\gamma}} \iiint \frac{\epsilon V_0^{\gamma}}{r^{\xi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{\gamma}} r^{\gamma} \sin \theta d\theta dr d\phi$$

$$= \frac{\epsilon}{\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{\gamma}} \xi \pi \int_a^b \frac{dr}{r^{\gamma}} = \frac{\xi \pi \epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

۷- الف) همانند حل شده در متن

$$X(x) = A \sin\left(\frac{n \pi x}{b}\right)$$

$$Y(y) = C_1 \cosh\left(\frac{n \pi y}{b}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{n \pi y}{b}\right)$$

$$Y(a) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cosh\left(\frac{n \pi a}{b}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{n \pi a}{b}\right)$$

$$C_1 = C_2 \tanh\left(\frac{n \pi a}{b}\right)$$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n \pi x}{b}\right) \left[ \sinh\left(\frac{n \pi y}{b}\right) - \tanh\left(\frac{n \pi a}{b}\right) \cosh\left(\frac{n \pi y}{b}\right) \right]$$

$$V(x, y=0) = V_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tanh\left(\frac{n \pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n \pi x}{b}\right)$$

$$-a_n \tanh\left(\frac{n \pi a}{b}\right) = \frac{1}{b} \int_a^b V_0 \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) dy = \begin{cases} \frac{\xi V_0}{n \pi} & \text{فرد } = n \\ 0 & \text{زوج } = n \end{cases}$$

در نتیجه

$$V = \frac{\xi V_0}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cosh\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n \tanh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) - n} \right]$$

$$= \frac{\xi V_0}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi(a-y)}{b}\right]}{n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

ب) این مورد همانند مثال حل شده در کتاب است با این تفاوت که جای  $x$ ,  $y$  عوض شده است، از این رو

$$V(x, y) = \frac{\xi V_0}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}$$

ج) این مورد همانند قسمت (الف) است با این تفاوت که جای  $x$ ,  $y$  عوض شده است.

$$V(x, y) = \frac{\xi V_0}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi(a-x)}{b}\right]}{n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

$$E_\varphi = \frac{\gamma V_0}{\pi \rho} \quad , \quad J = \sigma E \quad -\Lambda$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{\gamma V_0 \sigma}{\pi} \int_{\rho=a}^b \int_{z=0}^t \frac{1}{\rho} d\rho dz = \frac{\gamma V_0 \sigma t}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{\gamma \sigma t \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

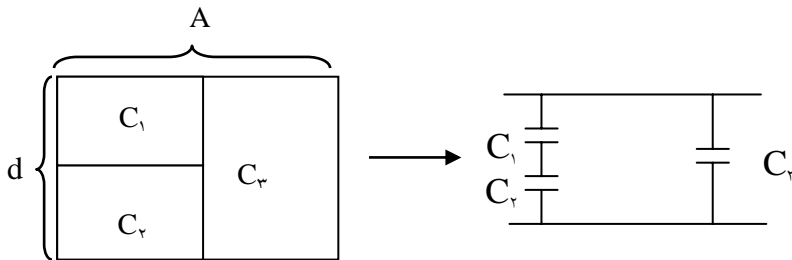
$V(r=a)=\dots$  ,  $V(r=b)=V_0$  -۹

$$E_\varphi = \frac{V_0}{r^\gamma \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \quad , \quad J = \sigma E$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{V_0 \sigma}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^\gamma} r^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi V_0 \sigma}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} (-\cos \theta) \Big|_0^\alpha$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{2\pi \sigma (1 - \cos \alpha)}$$

-۱۰



با توجه به شکل

$$C = \frac{C_1 C_r}{C_1 + C_r} + C_r$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \frac{A}{\gamma}}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{\gamma d} \quad , \quad C_r = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \quad , \quad C_r = \frac{\epsilon_0 A}{\gamma d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A^\gamma}{d^\gamma}}{\epsilon_0 (\epsilon_r + 1) \frac{A}{d}} + \frac{\epsilon_0 A}{\gamma d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \right) \approx \gamma PF$$

$$F = \frac{dW_E}{dx} \quad -۱۱$$

$$W_E = \frac{1}{\gamma} \int \epsilon |E|^{\gamma} dV = \frac{1}{\gamma} \epsilon_0 \epsilon_r E^{\gamma} x a d + \frac{1}{\gamma} \epsilon_0 E^{\gamma} a d (1-x)$$

$$E = \frac{V_0}{d}$$

$$\frac{dW_E}{dx} = \frac{1}{\gamma} \epsilon_0 \frac{V_0^{\gamma}}{d^{\gamma}} (\epsilon_r - 1) da \Rightarrow F = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) V_0^{\gamma} a}{\gamma d}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = 119 \text{ PF} \quad (۱۲-الف)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\epsilon \hat{a}_x - \epsilon \hat{a}_y - \epsilon \hat{a}_z \quad (ب)$$

$$|\vec{E}| = 13 \frac{kV}{m}$$

$$Q = \rho_s S = \epsilon_0 |\vec{E}| S, \quad \rho_s = D_n = \epsilon_0 |\vec{E}|$$

$$V_0 = \frac{Q}{C} = \epsilon_0 |\vec{E}| S \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{|\vec{E}| S}{\epsilon_r} = 14/86 \text{ V}$$

۱۳- شکل این مسأله را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon \pi \epsilon_1}{\frac{1}{c} - \frac{1}{d}}, \quad C_2 = \frac{\epsilon \pi \epsilon_2}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}, \quad C_3 = \frac{\epsilon \pi \epsilon_3}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$C = \frac{\epsilon \pi \epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad -۱۴$$

چون  $b \rightarrow \infty$

$$C = \epsilon \pi \epsilon_0 \epsilon_r a = \epsilon \epsilon \epsilon \quad \text{PF}$$

$$RC = \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma} \Rightarrow G = \frac{C\sigma}{\epsilon} \quad -15$$

$$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}\left(\frac{d}{ra}\right)}$$

$$W = \frac{1}{\gamma} \int \epsilon |E|^{\gamma} dV = \iiint_{\gamma\gamma\pi^{\gamma}\epsilon^{\gamma}r^{\gamma}} \frac{Q^{\gamma}}{\epsilon r^{\gamma}} \sin\theta d\theta d\phi dr \quad -16$$

$$= \frac{Q^{\gamma}}{\gamma\gamma\pi^{\gamma}\epsilon} (\gamma\pi)(\gamma) \int_b^c \frac{dr}{r^{\gamma}} = \frac{Q^{\gamma}}{\wedge\pi\epsilon} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)$$

(الف-۱۷)

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\nabla} V) = \cdot \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \epsilon \frac{dV}{dx} \right) = \cdot \Rightarrow \epsilon \frac{dV}{dx} = A$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{A}{\epsilon} = \frac{Ad}{\epsilon_0(x+d)} = \frac{C_1}{x+d}$$

$$V = C_1 \ln(x+d) + C_2$$

$$V(x=\cdot) = \cdot \Rightarrow C_2 = -C_1 \ln d$$

$$V(x=d) = V_0 \Rightarrow V_0 = C_1 \ln r \Rightarrow C_1 = \frac{V_0}{\ln r}$$

$$V = \frac{V_0}{\ln r} \ln \frac{x+d}{d}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{V_0}{(x+d)\ln r} \hat{a}_x$$

(ب)

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} = -\left( \frac{x+d}{d} - 1 \right) \frac{\epsilon_0 V_0}{d(x+d)\ln r} \hat{a}_x$$

(ج)

$$\rho_{Ps} \Big|_{x=0} = \vec{P} \cdot (-\hat{a}_x) \Big|_{x=0} = 0$$

$$\rho_{Ps} \Big|_{x=d} = \vec{P} \cdot \hat{a}_x \Big|_{x=d} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{\gamma d \ln \gamma}$$

(د)

$$Q = \int \rho_s ds = \rho_s S = \frac{\epsilon_0 S V_0}{d \ln \gamma}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_0 S}{d \ln \gamma} = 1.02 \text{ PF}$$

$$Q = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \epsilon \pi r D_r \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{\epsilon \pi r} \hat{a}_r \quad -18$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 k} \hat{a}_r$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 k} \int_a^b dr = \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 k} (b-a)$$

$$C = \frac{Q}{|V|} = \frac{\epsilon \pi \epsilon_0 k}{b-a}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{\gamma \pi L} \hat{a}_\rho \quad -19$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{\gamma \pi \epsilon_0 k L} \hat{a}_\rho$$

$$V_0 = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{\gamma \pi \epsilon_0 k L} \int d\rho = \frac{Q(b-a)}{\gamma \pi \epsilon_0 k L}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\gamma \pi \epsilon_0 k L}{b-a}, \quad C' = \frac{C}{L} = \frac{\gamma \pi \epsilon_0 k}{b-a}$$

$$C = \epsilon \pi \epsilon_0 a = \epsilon \pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 1.737 \times 10^7 = 0.708 \text{ mF} \quad -20$$



۲۱- در این حالت، دارای هفت بار تصویری به ترتیب زیر هستیم

$$-1) (-Q) \text{ در } (1, 1, -1) \quad -5) (Q) \text{ در } (-1, -1, 1)$$

$$-2) (-Q) \text{ در } (1, -1, 1) \quad -6) (Q) \text{ در } (-1, 1, -1)$$

$$-3) (-Q) \text{ در } (1, 1, -1) \quad -7) (Q) \text{ در } (-1, 1, -1)$$

$$-4) (-Q) \text{ در } (-1, -1, -1)$$

در نتیجه نیروی وارد بر بار برابر است با

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{Q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{2}{2^3} \hat{a}_x - \frac{2}{2^3} \hat{a}_y - \frac{2}{2^3} \hat{a}_z - \frac{(2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)}{12^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)}{8^{3/2}} + \frac{(2\hat{a}_x + 2\hat{a}_z)}{8^{3/2}} + \frac{(2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y)}{8^{3/2}} \right] \\ &= 0.9 (\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z) \left( -\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{12\sqrt{3}} + \frac{1}{\epsilon\sqrt{2}} \right) \\ &= -0.1891 (\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z) \end{aligned}$$

۲۲- می توان نشان داد:

$$V = \frac{Q}{\epsilon\pi\epsilon_0 R^2} \text{ متوسط}$$

۲۳- D دو برابر فاصله از مرکز کره به صفحه است و  $r = \frac{a}{D}$  (a شعاع کره است)

$$Q = \epsilon \pi \epsilon_0 a V = 1,11 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$Q' = -rQ = -0,250 \text{ Q}$$

$$Q'' = \frac{r^2}{1-r^2} Q = 0,767 \text{ Q}$$

$$Q''' = \frac{r^3}{1-2r^2} Q = -0,18 \text{ Q}$$

$$Q'''' \approx 0,005 \text{ Q}$$

$$Q - Q' + Q'' - Q''' = 1,35 \text{ Q} = 1,49 \text{ nC}$$

۲۵- اگر D بزرگ باشد، میدان E ناشی از بارهای +Q و -Q تبدیل می شود:

$$E \rightarrow 2 \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 D^2}$$

و گشتاور دوقطبی کره برابر است با

$$P = 2bQ' = 2 \frac{a^3}{D} \frac{aQ}{D} \rightarrow \epsilon \pi \epsilon_0 a^3 E$$

۲۷- در داخل کره

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

$$A_n = \frac{r^{n+1}}{r^n} \int_0^\pi V(R, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

در خارج کره

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

$$B_n = \frac{r^{n+1}}{r^{n+1}} \int_0^\pi V(R, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

۲۸- به کتاب الکترو دینامیک جکسون مراجعه کنید.

۲۹- یعنی میدان  $E$  در داخل کره یکنواخت  $V_i = \frac{\sigma_o r \cos \theta}{3 \epsilon_o r^2} = \frac{\sigma_o z}{3 \epsilon_o}$  است. که

بیانگر یک دوقطبی کامل در بیرون از کره است.  $V_o = \frac{\sigma_o a^3 \cos \theta}{3 \epsilon_o r^2}$

$$V_i = -\frac{\gamma E_o}{\epsilon_r + 1} \rho \cos \varphi = -\frac{\gamma E_o}{\epsilon_r + 1} x \quad -30$$

$$V_o = E_o \rho \cos \varphi + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{a^3 E_o}{\rho} \cos \varphi$$

## راهنمای حل مسائل فصل پنجم

### میدان‌های مغناطواستاتیک

#### ۱-۵ خلاصه مطالب

۱- دو قانون اساسی میدان‌های مغناطواستاتیک عبارتند از قانون بیو- ساوار و قانون آمپر. قانون بیو- ساوار که شبیه قانون کولن است بیان می‌کند که شدت میدان مغناطیسی  $d\vec{H}$  در  $\vec{r}$ ، حاصل از عنصر جریان  $I d\vec{l}$  در  $\vec{r}'$  برابر است با (برحسب آمپر بر متر)

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{\epsilon \pi R^3}$$

که  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  و  $R = |\vec{R}|$ . برای توزیع جریان سطحی یا حجمی،  $I d\vec{l}$  را به ترتیب با  $\vec{K} ds$  یا  $\vec{J} dv$  جایگزین می‌کنیم، یعنی:

$$I d\vec{l} \equiv \vec{K} ds \equiv \vec{J} dv$$

۲- قانون مداری آمپر که شبیه قانون گاوس است، بیان می‌کند که گردش  $\vec{H}$  حول یک مسیر بسته برابر است با جریان احاطه شده توسط مسیر، یعنی

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

یا

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

اگر توزیع جریان متقارن باشد به طوری که بتوان یک مسیر آمپری تعریف کرد،

$$H_{\phi} \oint dl = I \Rightarrow H_{\phi} = \frac{I}{l}$$

۳- شار مغناطیسی از میان سطح S برابر است با

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

که  $\vec{B}$  چگالی شار مغناطیسی بر حسب وبر بر مترمربع است. در فضای آزاد،  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ، که  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  (بر حسب هنری بر متر) تراوایی فضای آزاد است.

۴- چون یک تک قطبی مغناطیسی منفرد یا آزاد وجود ندارد، شار مغناطیسی خالص از میان یک سطح بسته صفر است،

$$\psi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

یا

که یکی از معادلات ماکسول است.

۵- چهار معادله ماکسول برای میدان‌های EM استاتیکی عبارتند از

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (\text{تعمیم قانون گاوس})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{عدم وجود تک قطبی مغناطیسی})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (\text{قانون القای فاراده - تعمیم نیافته})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{قانون آمپر - تعمیم نیافته})$$

بعداً خواهیم دید که برای میدان‌های EM وابسته به زمان، معادلات واگرایی (دو معادله اول) بدون تغییر باقی خواهند ماند، اما معادلات تاو (دو معادله آخر) تغییر خواهند کرد.

۶- تعریف پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی عبارت است از

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m \quad \vec{J} = 0 \quad \text{اگر}$$

و پتانسیل برداری مغناطیسی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

که  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  است با این تعریف  $\vec{A}$ ، شارمغناطیسی از میان یک سطح S از رابطه  $\psi = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$  به دست می‌آید که L مسیر بسته‌ای است که سطح S را توصیف می‌کند.

میدان مغناطیسی حاصل از یک توزیع جریان را به جای استفاده از قانون بیو-ساوار می‌توان با استفاده از  $\vec{A}$  به دست آورد که یک روش نیرومند به ویژه در نظریه آنتن‌ها است. برای عنصر جریان  $I d\vec{l}'$  در  $\vec{r}'$ ، پتانسیل برداری مغناطیسی در  $\vec{r}$  برابر است با

$$\vec{A} = \int \frac{\mu_0 I d\vec{l}'}{4\pi R} \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

۷- جدول (۱-۵) شباهت‌های بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را نشان می‌دهد.

مثلاً مشابه معادله پواسون  $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$  عبارت است از

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

### ۲-۵ مثال‌های حل شده

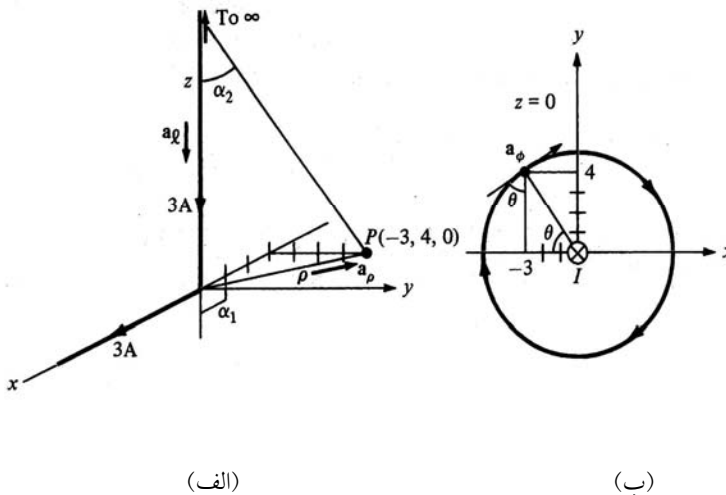
مثال (۱-۵): میدان  $\vec{H}$  ناشی از سیم حامل جریان نشان داده شده در شکل ۱-۵ (الف) را در نقطه (۰، ۴، -۳) پیدا کنید.

جواب: اگر  $\vec{H} = \vec{H}_x + \vec{H}_z$  باشد که  $\vec{H}_z$  و  $\vec{H}_x$  به ترتیب میدان‌های حاصل از سیم‌های در امتداد محورهای  $z$ ,  $x$  در نقطه مورد نظر هستند.

$$\vec{H}_z = \frac{I}{\epsilon \pi p} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \hat{a}_\phi$$

در نقطه  $p = (-3, 4, 0)$ ،  $p = (9+16)^{1/2} = 5$ ،  $\alpha_1 = 90^\circ$ ،  $\alpha_2 = 0^\circ$  مطابق شکل ۱-۵ (الف) به عنوان بردار یکه‌ای در امتداد مسیر دایروی عبور کرده از نقطه  $p$  روی صفحه  $z=0$  می‌باشد جهت  $\hat{a}_\phi$  با استفاده از قاعده دست راست به دست می‌آید. باتوجه به شکل ۱-۵ (ب)

$$\hat{a}_\phi = \sin \theta \hat{a}_x + \cos \theta \hat{a}_y = \frac{4}{5} \hat{a}_x + \frac{3}{5} \hat{a}_y$$



شکل ۱-۵. الف) جریان در امتداد محورهای نیمه محدود  $z$ ,  $x$ ،  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_\rho$  فقط برای  $\vec{H}_z$ ، ب) تعیین  $\hat{a}_\phi$  برای  $\vec{H}_z$ .

روش دیگر تعیین  $\hat{a}_\phi$ ، استفاده از معادله (۱۵-۵) است.  $\vec{a}_\rho$ ,  $\vec{a}_1$  در نقطه  $p$  برای  $\vec{H}_z$  در شکل ۱-۵ (الف) نشان داده شده‌اند. در نتیجه

$$\hat{a}_\varphi = -\hat{a}_z \times \left( -\frac{3}{5} \hat{a}_x + \frac{4}{5} \hat{a}_y \right) = \frac{4}{5} \hat{a}_x + \frac{3}{5} \hat{a}_y$$

که شبیه قبل است. از این رو مقدار  $\overline{H}_z$  برابر است با

$$\overline{H}_z = \frac{3}{\epsilon\pi(5)} (1 \cdot \frac{4\hat{a}_x + 3\hat{a}_y}{5}) = 38/2 \hat{a}_x + 28/65 \hat{a}_y \frac{mA}{m}$$

جهت  $\overline{a}_\varphi$  در این حالت، منفی جهت  $\hat{a}_\varphi$  مرسوم در مختصات استوانه‌ای است.  $\overline{H}_z$  را می‌توان در مختصات استوانه‌ای نیز به دست آورد.

$$\overline{H}_z = \frac{3}{\epsilon\pi(5)} (1 \cdot \hat{a}_\varphi) = -\epsilon 7/75 \hat{a}_\varphi \frac{mA}{m}$$

به همین ترتیب، برای  $\overline{H}_x$  در نقطه P،  $\rho = \epsilon$ ،  $\alpha_r = 0^\circ$ ،  $\cos \alpha_1 = \frac{3}{5}$ ،  $\hat{a}_q = \hat{a}_z$  یا در نتیجه  $\hat{a}_\varphi = \hat{a}_1 \times \hat{a}_p = \hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z$

$$\overline{H}_x = \frac{3}{\epsilon\pi(4)} \left( 1 - \frac{3}{5} \right) \hat{a}_z = 23/88 \hat{a}_z \frac{mA}{m}$$

بنابراین

$$\overline{H} = \overline{H}_x + \overline{H}_z = 38/2 \hat{a}_x + 28/65 \hat{a}_y + 23/88 \hat{a}_z \frac{mA}{m}$$

یا

$$\overline{H} = -\epsilon 7/75 \hat{a}_q + 23/88 \hat{a}_z \frac{mA}{m}$$

در این مثال، با وجود آنکه سیم‌ها نیمه محدود هستند (در امتداد جهت مثبت محورهای X و Z هستند)، نسبت به نقطه P سیم فقط در امتداد محور Z نیمه محدود به نظر می‌رسد



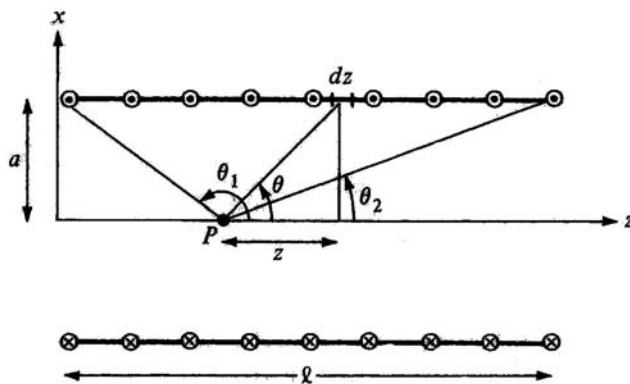
بنابراین  $\vec{H}_z$  را می‌توان از معادله (۵-۱۳) نیز محاسبه کرد. اما با این معادله نمی‌توان  $\vec{H}_x$  را به‌دست‌آورد زیرا سیم در امتداد محور X نسبت به نقطه P نیمه محدود نیست.

مثال (۵-۲): سیم‌لوله‌ای به طول l و شعاع a از N دور سیم حامل جریان I تشکیل شده است. نشان دهید که میدان  $\vec{H}$  در نقطه P در امتداد محور آن برابر است با

$$\vec{H} = \frac{nI}{\rho} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{a}_z$$

که در آن  $n = \frac{N}{l}$ ،  $\theta_1$ ،  $\theta_2$  زوایای محصور در P توسط دو انتهای سیم‌لوله مطابق شکل ۵-۲ هستند. همچنین نشان دهید اگر  $l \gg a$ ، میدان در مرکز سیم‌لوله برابر است با

$$\vec{H} = n I \hat{a}_z$$



شکل ۵-۲. سطح مقطع یک سیم‌لوله.

جواب: سطح مقطع سیم‌لوله نشان داده شده در شکل (۵-۲) را در نظر بگیرید، چون سیم‌لوله از حلقه‌های دایروی تشکیل شده است، می‌توان از نتایج مثال (۵-۲) کتاب درسی استفاده کرد. میدان  $dH_z$  حاصل از عنصری از سیم‌لوله به طول  $dz$  در نقطه P برابر است با

$$dH_z = \frac{Idl a^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} [a^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}]} = \frac{Ia^{\frac{1}{2}} ndz}{[a^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}]^{\frac{3}{2}}}$$

که  $dl = n dz = \left(\frac{n}{l}\right) dz$  . با توجه به شکل ۵-۲،  $\tan \theta = \frac{a}{z}$  : در نتیجه

$$dz = -a \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} \theta d\theta = -\frac{[z^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}]^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \sin \theta d\theta$$

بنابراین

$$dH_z = -\frac{nI}{r} \sin \theta d\theta$$

یا

$$H_z = -\frac{nI}{r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

با انتگرال‌گیری رابطه فوق

$$\vec{H} = \frac{nI}{r} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{a}_z$$

با قرار دادن  $n = \frac{N}{l}$ ،

$$\vec{H} = \frac{NI}{rl} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{a}_z$$

در مرکز سیملوله داریم

$$\cos \theta_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\left[a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}} = -\cos \theta_1$$

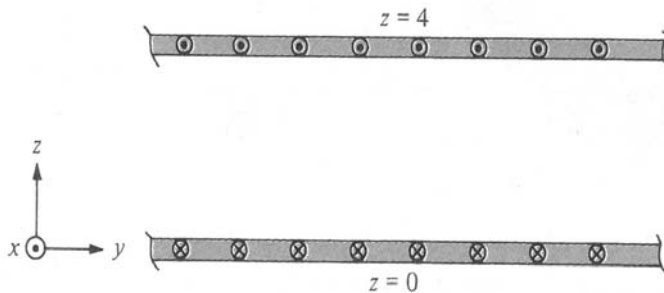
و

$$\vec{H} = \frac{Inl}{r \left[ a^2 + \frac{l^2}{4} \right]^{1/2}} \hat{a}_z$$

اگر  $l \gg a$  یا  $\theta_1 \approx 180^\circ$ ,  $\theta_2 \approx 0^\circ$

$$\vec{H} = nI \hat{a}_z = \frac{NI}{l} \hat{a}_z$$

مثال (۳-۵): در شکل ۳-۵، صفحات  $Z=4$  و  $Z=0$  به ترتیب حامل جریانهای  $\vec{K} = 10 \hat{a}_x$  و  $\vec{K} = -10 \hat{a}_x$  (برحسب آمپر بر متر) هستند. تعیین کنید میدان  $\vec{H}$  را در (الف) (۱ و ۱) و (ب) (۳، -۱۰، ۰).



شکل ۳-۵. صفحات جریان بینهایت موازی.

جواب: فرض کنید  $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_\xi$ ، که  $\vec{H}_0$ ،  $\vec{H}_\xi$  به ترتیب میدانهای حاصل از

صفحات در  $Z=4$  و  $Z=0$  باشند. با استفاده از معادله ۳-۵،

(الف) در نقطه (۱، ۱، ۱)، که بین صفحات است

$$\vec{H}_o = \frac{1}{\mu_0} \vec{K} \times \hat{a}_n = \frac{1}{\mu_0} (-1 \hat{a}_x) \times \hat{a}_z = 0 \hat{a}_y \quad \left( \frac{A}{m} \right)$$

$$\vec{H}_\xi = \frac{1}{\mu_0} \vec{K} \times \hat{a}_n = \frac{1}{\mu_0} (1 \hat{a}_x) \times (-\hat{a}_z) = 0 \hat{a}_y \quad \left( \frac{A}{m} \right)$$

در نتیجه

$$\vec{H} = 1 \hat{a}_y \quad \left( \frac{A}{m} \right)$$

(ب) در نقطه  $(0, -3, 10)$ ، که بالای صفحات است،

$$\vec{H}_o = \frac{1}{\mu_0} (-1 \hat{a}_x) \times \hat{a}_z = 0 \hat{a}_y \quad \left( \frac{A}{m} \right)$$

$$\vec{H}_\xi = \frac{1}{\mu_0} (1 \hat{a}_x) \times (\hat{a}_z) = -0 \hat{a}_y \quad \left( \frac{A}{m} \right)$$

از این رو

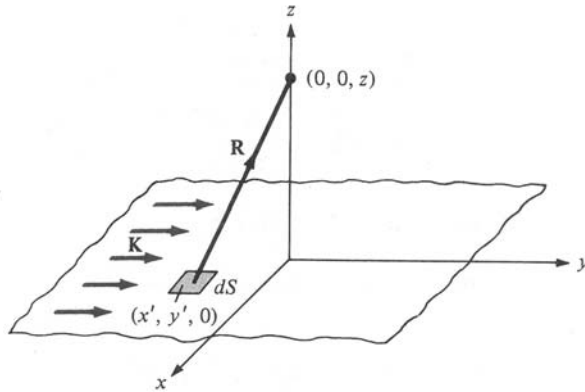
$$\vec{H} = 0 \quad \left( \frac{A}{m} \right)$$

مثال (۵-۴): در بخش ۵-۴ کتاب درسی، قسمت (ب) دیدیم که اگر صفحه  $z = 0$  حامل جریان یکنواخت  $\vec{K} = K_y \hat{a}_y$  باشد، با استفاده از قانون آمپر: روابط

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} K_y \hat{a}_x & z > 0 \\ -\frac{1}{\mu_0} K_y \hat{a}_x & z < 0 \end{cases} \quad (۵-۲۲)$$

نتیجه فوق را با استفاده از مفهوم پتانسیل مغناطیسی برداری به دست آورید.

جواب: صفحه جریان شکل ۴-۵ را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه (۴۲-۵)



شکل ۴-۵. صفحه جریان بینهایت برای مثال ۴-۵.

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{k} ds}{\epsilon \pi R}$$

در اینجا،  $Z \geq 0$ ،  $ds = dx' dy'$ ،  $\vec{k} = k_y \hat{a}_y$  و برای

$$R = |\vec{R}| = |(\cdot, \cdot, z) - (x', y', \cdot)| = \left[ (x')^2 + (y')^2 + z^2 \right]^{3/2}$$

که مختصات پرایم دار برای چشمه و بدون پرایم برای نقطه مشاهده به کار می‌روند (شکل ۱۶-۵). در نتیجه

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 k_y dx' dy' \hat{a}_y}{\epsilon \pi \left[ (x')^2 + (y')^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$

$$d\vec{B} = \vec{V} \times d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial z} dA_y \hat{a}_x = \frac{\mu_0 k_y Z dx' dy' \hat{a}_x}{\epsilon \pi [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 k_y z \hat{a}_x}{\epsilon \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' dy'}{[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

اگر مختصات زیر انتگرال را به مختصات استوانه‌ای تغییر دهیم

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 k_y z \hat{a}_x}{\epsilon \pi} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 k_y \hat{a}_x}{\epsilon \pi} (2\pi) \int_0^{\infty} [(\rho')^2 + z^2]^{-3/2} \frac{1}{2} d[(\rho')^2]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 k_y z \hat{a}_x}{\epsilon \pi} \frac{-1}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} \int_{\rho'=0}^{\infty} = \frac{\mu_0 k_y \hat{a}_x}{\epsilon \pi} \frac{1}{z^2}$$

در نتیجه

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{k_y}{z^2} \hat{a}_x \quad z \geq 0$$

با تغییر  $z$  به  $-z$  و ادامه همین فرآیند

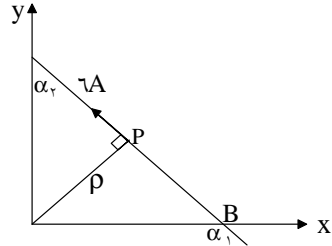
$$\vec{H} = -\frac{k_y}{z^2} \hat{a}_x \quad z \leq 0$$

۳-۵ پاسخ سؤالات

$$\vec{H} = \frac{I}{\epsilon \pi \rho} (\cos \alpha_r - \cos \alpha_1) \hat{a}_\phi \quad -۱$$

$$\alpha_1 = 135^\circ, \quad \alpha_r = 45^\circ, \quad \rho = \frac{1}{r} \sqrt{r} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_\phi &= \hat{a}_1 \times \hat{a}_\rho = \left( \frac{-\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}} \right) \times \left( \frac{-\hat{a}_x - \hat{a}_y}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{a}_z \end{aligned}$$



$$\vec{H} = \frac{1}{\epsilon \pi \frac{\sqrt{r}}{r}} (\cos 45^\circ - \cos 135^\circ) \hat{a}_z = \frac{r}{\pi} \hat{a}_z$$

-۲ برای ضلع حلقه در امتداد محور y

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{\epsilon \pi \rho} (\cos \alpha_r - \cos \alpha_1) \hat{a}_\phi$$

$$\hat{a}_\phi = -\hat{a}_x, \quad \rho = r \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{r}}{r}, \quad \alpha_r = 30^\circ, \quad \alpha_1 = 150^\circ$$

$$\vec{H}_1 = \frac{0}{\epsilon \pi} \frac{r}{\sqrt{r}} (\cos 30^\circ - \cos 150^\circ) (-\hat{a}_x) = -\frac{10}{\pi} \hat{a}_x$$

$$\vec{H} = r \vec{H}_1 = -1.79 \hat{a}_x \left( \frac{A}{m} \right)$$

$$\vec{H} = \epsilon \vec{H}_1 \quad -۳$$

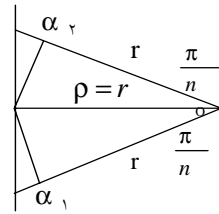
$$\vec{H}_1 = \frac{I}{\epsilon \pi \rho} (\cos \alpha_r - \cos \alpha_1) \hat{a}_\phi$$

$$\rho = a, \quad \alpha_r = 45^\circ, \quad \alpha_1 = 135^\circ, \quad \hat{a}_\phi = \hat{a}_z$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{\epsilon \pi \rho} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_z = \frac{2I}{\epsilon \pi a \sqrt{2}} \hat{a}_z$$

۴- الف) یک ضلع کثیر ضلعی را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. زاویه بسته شده توسط ضلع در مرکز کره برابر است با

$$\frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$$



میدان حاصل از این ضلع برابر است با

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{\epsilon \pi \rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \hat{a}_\phi$$

$$\rho = r, \cos \alpha_2 = \left( \cos 90^\circ \frac{\pi}{n} \right) = \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\cos \alpha_1 = -\sin \frac{\pi}{n}$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{\epsilon \pi \rho} 2 \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\vec{H} = n \vec{H}_1 = \frac{nI}{2\pi r} \sin \frac{\pi}{n}$$

ب) برای  $n = 3$

$$H = \frac{3I}{2\pi r} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$r \cotan 30^\circ = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



$$H = \frac{3 \times 5}{2\pi \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2\pi} = 1,198 \frac{A}{m}$$

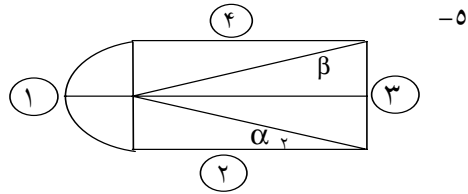
برای  $n = 4$

$$H = \frac{4I}{2\pi r} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4 \times 5}{2\pi(2)} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,128 \frac{A}{m}$$

ج) با میل کردن  $n \rightarrow \infty$

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nI}{2\pi r} \sin \frac{\pi}{n} = \frac{nI}{2\pi r} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{I}{2r}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 + \vec{H}_4$$



$$\vec{H}_1 = \frac{I}{4a} \hat{a}_z = 62,5 \hat{a}_z$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_4 = \frac{I}{4 \times 4 \times 10^{-2}} (\cos \alpha_2 - \cos 90^\circ) \hat{a}_z, \quad \alpha_2 = \tan^{-1} \frac{4}{10} = 21,9^\circ$$

$$= 19,99 \hat{a}_z$$

$$\vec{H}_3 = \frac{I}{4\pi(1)} 2 \cos \beta \hat{a}_z, \quad \beta = \tan^{-1} \frac{10}{4} = 68,7^\circ$$

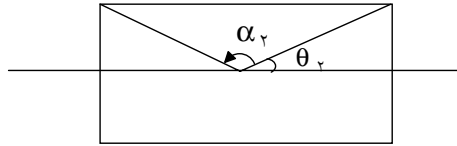
$$= \frac{10}{4\pi} 2 \cos 68,7^\circ \hat{a}_z = 0,7361 \hat{a}_z$$

$$\vec{H} = 120,32 \hat{a}_z$$

۶-  $\vec{H}$  حاصل از یک حلقه دایروی برابر است با

$$\vec{H} = \frac{I\rho}{2(\rho^2 + z^2)} \hat{a}_z$$

(الف-۷)

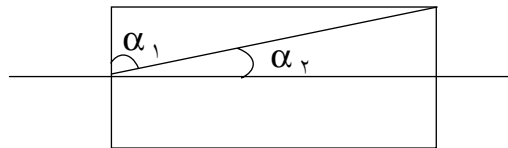


$$|\vec{H}| = \frac{nI}{r} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$\cos\theta_2 = \cos\theta_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\left(a + \frac{l^2}{\xi}\right)^{1/2}}$$

$$|\vec{H}| = \frac{Inl}{r \left(a + \frac{l^2}{\xi}\right)^{1/2}} = 79.73 \left(\frac{A}{m}\right)$$

(ب)



$$\alpha_1 = 90^\circ, \quad \tan\theta_2 = \frac{a}{b} = 0.7$$

$$\theta_2 = 35.31^\circ$$

$$|\vec{H}| = \frac{nI}{r} \cos\theta_2 = 36.77 \left(\frac{A}{m}\right)$$

۸- الف) در متن توضیح داده شده است.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = 0 \Rightarrow \vec{H} = 0 \quad \text{ب) برای } \rho < a$$

$$H_\phi (r\pi\rho) = \frac{I\pi(\rho^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)}$$

برای  $a < \rho < b$

$$H_\phi = \frac{I}{r\pi\rho} \frac{(\rho^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

$$H_{\phi}(\rho) = I \Rightarrow H_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho} \quad \text{برای } \rho < b$$

۹- فرض کنید  $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ ، که  $\vec{H}_1$ ،  $\vec{H}_2$  به ترتیب میدان‌های ناشی از سیم‌های واقع در  $x = 0$  و  $x = 10$  cm هستند.

$$\rho = 50 \text{ cm}, \hat{a}_{\phi} = \hat{a}_1 \times \hat{a}_\rho = \hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \quad \text{الف) برای } \vec{H}_1$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi(5 \times 10^{-2})} \hat{a}_x = \frac{50}{\pi} \hat{a}_y$$

$$\rho = 5 \text{ cm}, \hat{a}_{\phi} = -\hat{a}_z \times (-\hat{a}_x) = \hat{a}_y, \vec{H}_2 = \vec{H}_1 \quad \text{برای } \vec{H}_2$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 = \frac{100}{\pi} \hat{a}_y = 31.83 \hat{a}_y \left( \frac{\text{A}}{\text{m}} \right)$$

ب) همانند قسمت الف) حل می‌شود.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{a}_{\phi} \quad -10$$

$$\psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\rho=d}^{d+a} \int_{z=0}^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho dz = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{d+a}{b}$$

۱۱- الف)  $\vec{A}$  نه یک میدان الکترواستاتیکی است و نه یک میدان مغناطیو استاتیکی.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -y a \sin x \neq 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$$

(ب)  $\vec{B}$  می‌توان یک میدان الکتروساتایکی در فضای عاری از بار ( $\rho=0$ ) باشد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

(ج)  $\vec{C}$  نه یک میدان الکتروساتایکی است و نه یک میدان مغناطوساتایکی.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} \neq 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} \neq 0$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (12-الف)$$

$$\psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}, \quad ds = dy dz$$

$$\psi = -1.7 \text{ Wb} \quad (ب)$$

(ج) قابل اثبات است.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{10}{\rho} e^{-\rho} \cos \varphi \hat{a}_\rho + 10 e^{-\rho} \sin \varphi \hat{a}_\varphi \quad -13$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint \frac{10}{\rho} e^{-\rho} \cos \varphi \rho d\varphi dz = -10 e^{-\rho}$$

$$= -1.11 \text{ Wb}$$

۱۴- با اعمال قانون آمپر:

$$H_{\phi}(\gamma\pi\rho) = J_o(\gamma\pi\rho)$$

$$H_{\phi} = \frac{J_o}{\gamma} \rho$$

$$B_{\phi} = \mu_o H_{\phi} = \mu_o \frac{J_o \rho}{\gamma}$$

$$B_{\phi} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{a}_{\phi} + \dots$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{1}{\gamma} \mu_o J_o \rho \Rightarrow A_z = -\mu_o J_o \frac{\rho^2}{2}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \mu_o J_o \rho^2 \hat{a}_z$$

$$\nabla^2 A_x = \nabla^2 A_y = 0, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_o J \quad -15$$

$$J = \frac{I}{\pi a^2} \quad \rho \leq a$$

$$= 0 \quad \rho > a$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = -\mu_o J$$

$$A_{z1} = -\frac{1}{2} \mu_o I \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 + C_1 \ln \rho + C_2 \quad \rho \leq a$$

$$A_{z2} = D_1 \ln \rho + D_2 \quad \rho > a$$

$$\text{شرایط مرزی} \left\{ \begin{array}{l} \rho \rightarrow \infty \Rightarrow A_{\rho z} = \dots \Rightarrow C_1 = \dots \\ \rho = a \Rightarrow A_{\rho z} = A_{\rho z} \Rightarrow -\frac{1}{\epsilon \pi} \mu_0 I + C = D_1 \ln a + D \end{array} \right.$$

برای پیدا کردن  $D_1$  به طریق زیر عمل می‌کنیم

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{D_1}{\rho} \hat{\phi} \quad \rho > a$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{2\pi} \frac{D_1}{\rho} \rho d\phi = \mu_0 I \Rightarrow D_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

در نتیجه

$$D = -\frac{1}{\epsilon \pi} \mu_0 I + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a + C$$

به این ترتیب، پتانسیل‌های برداری و میدان‌ها عبارتند از

$$A_{\rho z} = -\frac{1}{\epsilon \pi} \mu_0 I \frac{(x^2 + y^2)}{a^2} + C, \quad (\rho^2 = x^2 + y^2), \quad \rho < a$$

$$\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{a^2} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{a^2} \hat{\phi}$$

و برای  $\rho > a$

$$A_{\rho z} = -\frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \left( 1 + 2 \ln \frac{\rho}{a} \right) + C$$

$$\vec{B}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\phi}$$

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \frac{L}{\rho_a} - \ln \frac{L}{\rho_b} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{\rho_b}{\rho_a} \right) \quad -۱۶$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d-y}{y} \right) \quad (x = 0)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d-\rho}{\rho} \right) \quad (y = \rho)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi \rho (d-\rho)} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad -۱۷$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{2\pi}{\rho^2} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \hat{a}_z = -\frac{2\pi}{\rho^3} \hat{a}_z$$

$$\vec{J} = -\frac{2\pi}{\mu_0 \rho^3} \hat{a}_z$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m \Rightarrow V_m = -\int \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad -۱۸$$

$$\vec{H} = \frac{I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{a}_z \quad \text{قبلاً دیدیم که}$$

$$V_m = -\frac{I a^2}{2} \int (z^2 + a^2)^{-3/2} dz = -\frac{I a^2}{2(z^2 + a^2)^{1/2}} + C$$

$$z \rightarrow \infty \Rightarrow V_m = 0 \Rightarrow c = \frac{I}{2}$$

$$V_m = -\frac{I}{r} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right]$$

۱۹- برای رسانای بیرونی

$$J_z = -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} = -\frac{I}{\pi a^2}$$

$$\vec{A} = A_z \hat{a}_z$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad \text{معادله پواسون}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \Rightarrow A_z = \frac{\mu_0 I \rho^2}{2\pi a^2} + C_1 \ln \rho + C_2$$

$$\rho = ra \Rightarrow A_z = 0 \Rightarrow C_2 = C_1 \ln ra - \frac{a}{2\pi} \hat{a}_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{a}_\phi = -\left( \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} + \frac{C_1}{\rho} \right) \hat{a}_\phi$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow 2\pi(ra) H_\phi = I \quad : (\rho = ra) \text{ در}$$

در نتیجه



$$-\left(\frac{\mu_0 I \rho}{\sqrt{\epsilon} \pi a^{\sqrt{\epsilon}} + \frac{C_1}{\sqrt{\epsilon} a}}\right) + \frac{\mu_0 I}{\sqrt{\epsilon} \pi a} \Rightarrow C_1 = -\frac{\sqrt{\epsilon} \mu_0 I}{\sqrt{\epsilon} \pi}$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{\sqrt{\epsilon} \pi} \left( \frac{\rho^{\sqrt{\epsilon}}}{a^{\sqrt{\epsilon}}} - a \right) - \frac{\mu_0 I}{\sqrt{\epsilon} \pi} \ln \left( \frac{\rho}{\sqrt{\epsilon} a} \right)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \vec{K} \times \hat{a}_n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\epsilon \hat{a}_y) \times \hat{a}_n = \epsilon \hat{a}_x \quad -20$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m \quad (\vec{J} = 0)$$

$$\epsilon \hat{a}_x = -\frac{\partial V_m}{\partial x} \hat{a}_n \Rightarrow V_m = -\epsilon \hat{a}_x + C$$

$$x = 0 \Rightarrow V_m = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$V_m = \epsilon x$$

## راهنمای حل مسائل فصل ششم

### نیروها، مواد و ابزار مغناطیسی

#### ۱-۶ خلاصه مطالب

۱- معادله نیروی لورنتس  $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = m \frac{d\vec{u}}{dt}$ ، نیروی وارد بر یک ذره را با بار  $Q$  در حضور میدان‌های  $E_M$  مرتبط می‌سازد. این رابطه، قانون اساسی ارتباط EM با مکانیک را بیان می‌کند.

۲- بر اساس قانون نیروی لورنتس، نیروی وارد بر عنصر جریان  $I d\vec{l}$  در یک میدان مغناطیسی  $\vec{B}$  برابر است با

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

طبق این رابطه، میدان مغناطیسی  $\vec{B}$  به عنوان نیرو بر واحد عنصر جریان تعریف می‌شود.

۳- گشتاور نیروی وارد بر یک حلقه جریان با گشتاور مغناطیسی  $\vec{m}$  در یک میدان مغناطیسی یکنواخت  $\vec{B}$  برابر است با

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = IS \hat{a}_n \times \vec{B}$$

۴- یک دوقطبی مغناطیسی عبارت است از یک آهنربا یا یک حلقه جریان کوچک، علت این نامگذاری به خاطر آن است که خطوط میدان  $\vec{B}$  شبیه خطوط میدان  $\vec{E}$  یک دوقطبی الکتریکی است.

۵- وقتی یک ماده در یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد، مغناطیده می‌شود. مغناطش  $\vec{M}$  عبارت است از گشتاور دوقطبی مغناطیسی بر واحد حجم ماده. برای مواد خطی،  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  که  $\chi_m$  پذیرفتاری مغناطیسی ماده است.

۶- مواد برحسب خواص مغناطیسی آنها یا خطی هستند (دیامغناطیس یا پارامغناطیس) و یا غیرخطی (فرومغناطیس). برای مواد خطی

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

که  $\mu$ ، تراوایی و  $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$  تراوایی نسبی ماده است. برای مواد غیرخطی،  $B = \mu(H)H$  یعنی  $\mu$  مقدار ثابتی ندارد. معمولاً رابطه بین  $B$ ،  $H$  برحسب یک منحنی مغناطشی (منحنی پسماند) نشان داده می‌شود.

۷- شرایط مرزی برای  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  در فصل مشترک دو ماده عبارتند از

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\text{اگر } \vec{K} = 0 \text{ باشد. } H_{1t} = H_{2t} \text{ یا } (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \hat{a}_{n12} = \vec{K}$$

که  $\hat{a}_{n12}$  بردار یکه عمود از محیط ۱ به محیط ۲ است.

۸- انرژی در یک میدان مغناطوساتاتیک عبارت است از

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

برای یک القاگر حامل جریان I

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

در نتیجه القای L را می توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$L = \frac{\int \vec{B} \cdot \vec{H} dV}{I^2}$$

۹- القای L یک القاگر را می توان از تعریف آن نیز تعیین کرد: نسبت پیوند شار

مغناطیسی به جریان از میان القاگر، یعنی  $L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\psi}{I}$ . در نتیجه با داشتن جریان I،

$$\vec{B} \text{ را تعیین کرده و } \psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \text{ و سرانجام } L = \frac{N\psi}{I}$$

۱۰- یک مدار مغناطیسی را می توان شبیه یک مدار الکتریکی تحلیل کرد. قانون اهم در

دو حالت عبارت است از

$$V = IR \leftrightarrow F = NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = R\psi$$

در نتیجه، قوانین اهم و کیرشف را می توان به مدارهای مغناطیسی نیز اعمال کرد.

۱۱- فشار مغناطیسی (یا نیرو بر واحد سطح) روی قطعه ای از یک ماده مغناطیسی برابر

است با

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{2} BH = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

که B میدان مغناطیسی در سطح ماده است.

## ۶-۲ مثال‌های حل شده

مثال (۶-۱): یک حلقه جریان کوچک  $L_1$  با گشتاور مغناطیسی  $5\hat{a}_z$  (A.m<sup>۲</sup>) در مبدا مختصات واقع است در حالی که حلقه جریان کوچک  $L_2$  با گشتاور مغناطیسی  $3\hat{a}_y$  (A.m<sup>۲</sup>) در مکان (۴، -۳، ۱۰) واقع است. گشتاور نیروی وارد بر  $L_2$  را تعیین کنید.

جواب: گشتاور نیروی  $\vec{\tau}_2$  وارد بر حلقه  $L_2$  به دلیل میدان  $\vec{B}_1$  تولید شده توسط حلقه  $L_1$  است. از این رو

$$\vec{\tau}_2 = \vec{m}_2 \times \vec{B}_1$$

چون  $\vec{m}_1$  برای حلقه  $L_1$  در امتداد  $\hat{a}_z$  است، میدان  $\vec{B}_1$  را با استفاده از معادله (۶-۳۹) به دست می‌آوریم.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (r \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta)$$

با استفاده از روابط فصل اول، گشتاور  $\vec{m}_2$  را از مختصات دکارتی به کروی تبدیل می‌کنیم

$$\vec{m}_2 = 3\hat{a}_y = 3(\sin \theta \sin \phi \hat{a}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{a}_\theta + \cos \phi \hat{a}_\phi)$$

در نقطه (۴، -۳، ۱۰)

$$r = \left[ (4)^2 + (-3)^2 + (10)^2 \right]^{1/2} = 5\sqrt{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\rho}{z} = \frac{5}{10} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin \phi = \frac{-3}{5}, \quad \cos \phi = \frac{4}{5}$$

در نتیجه

نیروها، مواد و ابزار مغناطیسی ۹۹

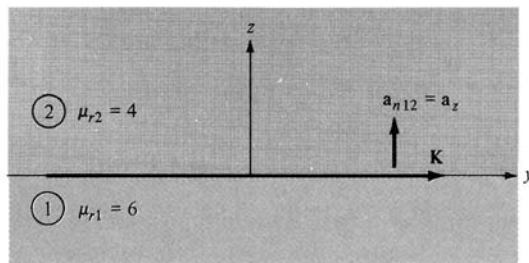
$$\vec{B}_1 = \frac{\varepsilon\pi \times 10^{-7} \times 5}{\varepsilon\pi(625)\sqrt{5}} \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \hat{a}_r + \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{a}_\theta \right) = \frac{10^{-7}}{625} (\varepsilon \hat{a}_r + \hat{a}_\theta)$$

$$\vec{m}_v = 3 \left[ -\frac{3\hat{a}_r}{5\sqrt{5}} - \frac{6\hat{a}_\theta}{5\sqrt{5}} + \frac{\varepsilon\hat{a}_\phi}{5} \right]$$

$$\vec{\tau} = \frac{10^{-7}(3)}{625(5\sqrt{5})} (-3\hat{a}_r - 6\hat{a}_\theta + \varepsilon\sqrt{5}\hat{a}_\phi) \times (\varepsilon\hat{a}_r + \hat{a}_\theta) =$$

$$0.258\hat{a}_r + 1.765\hat{a}_\theta + 1.03\hat{a}_\phi$$

مثال (۶-۲): صفحه x-y فصل مشترک بین دو محیط مختلف است. محیط ۱ ( $z < 0$ ) ماده‌ای با تراوایی نسبی  $\mu_r = 6$  و محیط ( $z > 0$ ) ماده‌ای با تراوایی  $\mu_r = 4$  است. اگر فصل مشترک حامل جریان  $\left( \frac{mA}{m} \right) \hat{a}_y$ ،  $\frac{1}{\mu_0}$   $\vec{B}_v = 5\hat{a}_x + 8\hat{a}_z$  باشد،  $\vec{H}_1$  و  $\vec{B}_1$  را به دست آورید.



شکل ۶-۱. مربوط به مثال ۶-۲.

جواب: در این مثال  $K \neq 0$  است. با توجه به شکل (۶-۱)

$$B_{1n} = B_{2n} = 8\hat{a}_z \Rightarrow B_z = 8$$

اما

$$\vec{H}_\gamma = \frac{\vec{B}_\gamma}{\mu_\gamma} = \frac{1}{\epsilon\mu_0} (0\hat{a}_x + 8\hat{a}_z) \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

و

$$\vec{H}_\lambda = \frac{\vec{B}_\lambda}{\mu_\lambda} = \frac{1}{\gamma\mu_0} (B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z) \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

مؤلفه‌های مماسی از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$(\vec{H}_\lambda - \vec{H}_\gamma) \times \hat{a}_{n1\gamma} = \vec{K}$$

یا

$$\vec{H}_\lambda \times \hat{a}_{n1\gamma} = \vec{H}_\gamma \times \hat{a}_{n1\gamma} + \vec{K}$$

با قرار دادن مقادیر  $\vec{H}_\gamma$ ,  $\vec{H}_\lambda$  در رابطه فوق

$$\frac{1}{\gamma\mu_0} (B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z) \times \hat{a}_z = \frac{1}{\epsilon\mu_0} (0\hat{a}_x + 8\hat{a}_z) \times \hat{a}_z + \frac{1}{\mu_0} \hat{a}_y$$

با تساوی قرار دادن مؤلفه‌ها در رابطه فوق

$$B_y = 0, \quad -\frac{B_x}{\gamma} = \frac{-8}{\epsilon} + 1 \quad \text{یا} \quad B_x = \frac{\gamma}{\epsilon} = 1/5$$

با توجه به این که مقادیر  $B_x, B_z$  بردار  $\vec{B}_\lambda$  به دست آمده‌اند، داریم

$$\vec{B}_\lambda = 1/5\hat{a}_x + 8\hat{a}_z$$

$$\vec{H}_\lambda = \frac{\vec{B}_\lambda}{\mu_\lambda} = \frac{1}{\mu_0} (0.2\hat{a}_x + 1.33\hat{a}_z)$$

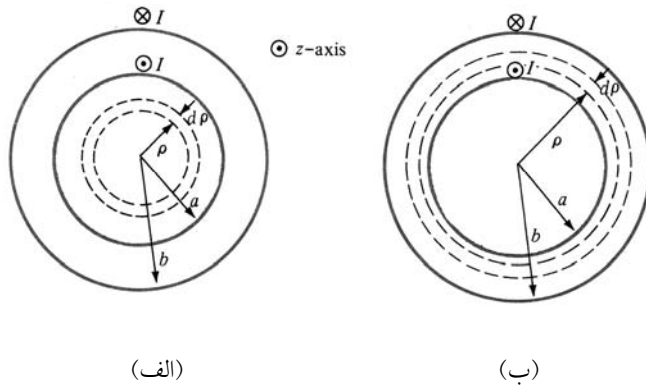
مثال (۳-۶): خود القای یک کابل هم‌محور به شعاع داخلی  $a$  و شعاع بیرونی  $b$  را تعیین کنید.

جواب: سطح مقطع کابل را طبق شکل ۲-۶ در نظر بگیرید. با توجه به روابط

(۲۹-۵) داریم

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu I \rho}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi \quad 0 \leq \rho \leq a$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu I}{2\pi \rho} \hat{a}_\phi \quad a \leq \rho \leq b$$



شکل ۲-۶. سطح مقطع کابل هم‌محور، الف) برای ناحیه  $0 < \rho < a$ ، ب) برای ناحیه  $a < \rho < b$ .

ابتدا القای داخلی  $L_{in}$  را با در نظر گرفتن پیوندهای شارری رسانای داخلی به دست می‌آوریم. با توجه به شکل ۲-۶ الف)، شار عبوری از یک لایه دیفرانسیلی به ضخامت  $d\rho$  برابر است با

$$d\psi_1 = B_1 d\rho dz = \frac{\mu I \rho}{2\pi a^2} d\rho dz$$

پیوند شار برابر است با  $d\psi_1$  ضربدر نسبت احاطه کننده شار به مساحت کل، یعنی



$$d\lambda_1 = d\psi_1 \frac{I_{\text{احاطه}}}{I_{\text{کل}}} = d\psi_1 \frac{\pi \rho^2}{\pi a^2}$$

با فرض این که I به طور یکنواخت در سرتاسر مقطع توزیع شده باشد. با قرار دادن مقدار  $d\psi_1$  در رابطه فوق

$$d\lambda_1 = \frac{\mu I \rho \, d\rho \, dz}{2\pi a^2} \left( \frac{\rho^2}{a^2} \right)$$

با انتگرال گیری رابطه فوق برای طول l کابل

$$\lambda_1 = \int_{\rho=0}^a \int_{z=0}^l \frac{\mu I \rho^3 \, d\rho \, dz}{2\pi a^2} = \frac{\mu I l}{8\pi}$$

$$L_{\text{in}} = \frac{\lambda_1}{I} = \frac{\mu l}{8\pi}$$

القای داخلی بر واحد طول برابر است با

$$L'_{\text{in}} = \frac{L_{\text{in}}}{l} = \frac{\mu}{8\pi} \quad (\text{هنری بر متر})$$

که مستقل از شعاع رسانا یا کابل است.

اکنون القای خارجی  $L_{\text{ext}}$  را با توجه به شکل ۶-۲ (ب) تعیین می کنیم. برای یک

لایه دیفرانسیلی به ضخامت  $d\rho$

$$d\psi_2 = B_2 \, d\rho \, dz = \frac{\mu I}{2\pi \rho} \, d\rho \, dz$$

در این حالت کل جریان I توسط مسیر احاطه شده است، از این رو

$$\lambda_r = \psi_r = \int_{\rho=a}^b \int_{z=0}^l \frac{\mu I d\rho dz}{r \pi \rho} = \frac{\mu I l}{r \pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L_{\text{ext}} = \frac{\lambda_r}{I} = \frac{\mu l}{r \pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

در نتیجه، القای کل برابر است با

$$L = L_{\text{in}} + L_{\text{ext}} = \frac{\mu l}{r \pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

یا القا بر واحد طول برابر است با

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\mu}{r \pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

مثال (۶-۴): مثال (۶-۳) را یکبار دیگر با روش انرژی حل کنید.

جواب: در این جا از معادلات (۶-۷۹) و (۶-۹۲) برای تعیین  $L$  استفاده می کنیم.

$$W_m = \frac{1}{r} L I^2 \Rightarrow L = \frac{r W_m}{I^2}$$

که در آن

$$W_m = \frac{1}{r} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{r} \int \frac{B^2}{2\mu} dV$$

در نتیجه

$$L_{\text{in}} = \frac{r}{I^2} \int \frac{B^2}{2\mu} dV = \frac{1}{I^2 \mu} \int \int \int \frac{\mu^2 I^2 \rho^2}{\epsilon \pi^2 a^2} \rho d\rho d\phi dz$$

$$L_{\text{in}} = \frac{\mu}{\epsilon \pi^2 a^2} \int dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\mu l}{4\pi \epsilon a^2}$$

$$L_{\text{ext}} = \frac{\gamma}{I^{\gamma}} \int \frac{B_{\gamma}^{\gamma}}{\gamma \mu} dV = \frac{1}{I^{\gamma} \mu} \int \int \int \frac{\mu^{\gamma} I^{\gamma}}{\epsilon \pi^{\gamma} \rho^{\gamma}} \rho d\rho d\phi dz$$

$$= \frac{\mu}{\epsilon \pi^{\gamma}} \int dz \int d\phi \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu l}{\gamma \pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

القای کل برابر است با

$$L = L_{\text{in}} + L_{\text{ext}} = \frac{\mu l}{\gamma \pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

### ۳-۶ پاسخ سؤالات

$$m\vec{a} = e (\vec{U} \times \vec{B}) = U_y B_o \hat{a}_x - B_o U_x \hat{a}_y \quad (الف)$$

$$\frac{dU_z}{dt} = 0 \Rightarrow U_z = C = 0$$

$$\frac{dU_x}{dt} = U_y \frac{B_o e}{m} = U_y \omega, \quad \omega = \frac{B_o e}{m}$$

$$\frac{dU_y}{dt} = -U_x \omega$$

$$\ddot{U}_x = \omega \dot{U}_y = -\omega^2 U_x \Rightarrow U_x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$U_y = \frac{\dot{U}_x}{\omega} = -A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

در  $t=0$ ،  $U_x = U_o$ ،  $U_y = 0$ . در نتیجه  $A = U_o$ ،  $B = 0$ ، از این رو

$$U_x = U_o \cos \omega t = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = -\frac{U_o}{\omega} \sin \omega t + C_1$$

$$U_y = -U_o \sin \omega t = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = -\frac{U_o}{\omega} \cos \omega t + C_2$$

در  $t=0$  ،  $y=x=0$  . در نتیجه  $C_1=0$  ،  $C_2 = \frac{U_0}{\omega}$  ، از این رو

$$x = -\frac{U_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{dx}{dt} , \quad y = \frac{U_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

$$\frac{U_0^2}{\omega^2} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \left( \frac{U_0}{\omega} \right)^2 = x^2 + \left( y - \frac{U_0}{\omega} \right)^2$$

که نشان می‌دهد الکترون در دایره‌ای با مرکزیت  $\left( 0, \frac{U_0}{\omega} \right)$  حرکت می‌کند. اما چون میدان در سرتاسر ناحیه دایروی وجود ندارد، الکترون یک مسیر نیم دایره‌ای طی کرده و به‌طور افقی از میدان خارج می‌شود.

(ب) دو برابر شعاع نیم دایره  $d =$

$$d = 2 \frac{U_0}{\omega} = \frac{2 U_0 m}{B_0 e}$$

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_{x=1}^2 dx \hat{a}_x \times \vec{B} + I \int_{y=1}^2 dy \hat{a}_y \times \vec{B} + I \int_{x=2}^1 dx \hat{a}_x \times \vec{B} \quad -2$$

$$+ I \int_{y=2}^1 dy \hat{a}_y \times \vec{B}$$

$$\hat{a}_x \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_z & \hat{a}_y & \hat{a}_x \\ 1 & -2y & 2z \end{vmatrix} = -2z \hat{a}_y - 2y \hat{a}_z$$

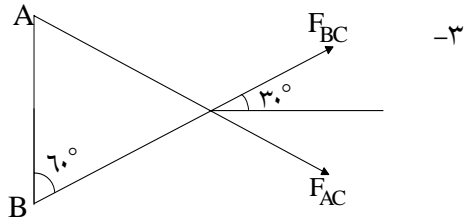
$$\hat{a}_y \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_z & \hat{a}_x & \hat{a}_y \\ 1 & -2y & 2z \end{vmatrix} = -2z \hat{a}_x - 2x \hat{a}_z$$

با جایگذاری در رابطه فوق

$$\vec{F} = 3.0 \hat{a}_z \quad (\text{نیوتن})$$

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\rho} \hat{a}_\rho$$

$$\vec{f} = \vec{f}_{AC} + \vec{f}_{BC}$$



$$|\vec{f}_{AC}| = |\vec{f}_{BC}| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 75 \times 150}{2\pi \times 2} = 1.125 \times 10^{-3}$$

$$\vec{f} = 2 \times 1.125 \cos 30^\circ \hat{a}_x = 1.949 \hat{a}_x \quad \left( \frac{\text{mN}}{\text{m}} \right)$$

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B} = \int \vec{J} dV \times \vec{B} \quad -\xi$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \hat{a}_z, \quad \vec{B} = B_0 \hat{a}_\rho$$

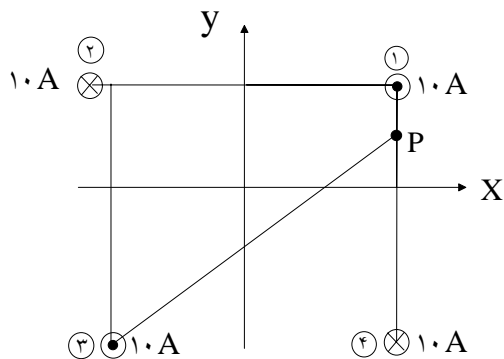
$$\vec{F} = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \int \hat{a}_z dV \times B_0 \hat{a}_\rho = \frac{I B_0 \hat{a}_\rho}{\pi(b^2 - a^2)} \int dV$$

$$= \frac{I B_0 \hat{a}_\rho}{\pi(b^2 - a^2)} \pi(b^2 - a^2) l \hat{a}_\rho \Rightarrow \vec{F} = \frac{\vec{F}}{l} = I B_0 \hat{a}_\rho$$

-۵

$$\vec{B} = \vec{B}_\gamma + \vec{B}_\gamma + \vec{B}_\gamma + \vec{B}_\xi$$

$$\vec{B}_n = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi\rho} \hat{a}_\phi$$



برای تصویر ۱:

$$\hat{a}_\varphi = \hat{a}_x$$

$$\vec{B}_1 = 2\hat{a}_x$$

برای تصویر ۲:

$$\hat{a}_\varphi = \frac{(-2\hat{a}_x - 1\hat{a}_y)}{\sqrt{5}}, \quad \vec{B}_2 = 0.72\hat{a}_x - 0.76\hat{a}_y$$

برای تصویر ۳:

$$\vec{\rho} = 1\hat{a}_x + 1\hat{a}_y$$

$$\hat{a}_\varphi = \frac{(-1\hat{a}_x + 1\hat{a}_y)}{\sqrt{2}}, \quad \vec{B}_3 = -0.707\hat{a}_x + 0.707\hat{a}_y$$

برای تصویر ۴:

$$\hat{a}_\varphi = \hat{a}_x$$

$$\vec{B}_4 = 0.7667\hat{a}_x$$

$$\vec{B} = 2.1333\hat{a}_x - 0.2667\hat{a}_y$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{B}{\mu_o \mu_r} = 1,194 \times 10^6 \left( \frac{A}{m} \right) \quad -6$$

$$\vec{M} = \frac{N m_k}{\Delta V} \Rightarrow \vec{m}_k = 1,047 \times 10^{-23} (A \cdot m^2)$$

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 5,5 \quad (\text{الف} - 7)$$

$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H} \quad (\text{ب})$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (\text{ج})$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = 9,5 \frac{mJ}{m^3} \quad (\text{د})$$

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 3,5 \quad (\text{الف} - 8)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = 7,077 y \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = 2,477 y \hat{a}_z \quad (\text{ج})$$

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{dM_z}{dy} \hat{a}_x = 2,477 \hat{a}_x \quad (\text{د})$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad -9$$

$$H_\phi (2\pi\rho) = \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I \Rightarrow H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \frac{I\rho}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho M_\phi) = (\mu_r - 1) \frac{I}{\pi a^2} \hat{a}_z$$

۱۰- الف) با استفاده از روابط  $H_{1t} - H_{2t} = K$ ،  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  داریم

$$\frac{M_{1t}}{\chi_{m1}} - \frac{M_{2t}}{\chi_{m2}} = K$$

و از روابط  $\vec{B} = \mu \vec{H} = \left( \frac{\mu}{\chi_m} \right) \vec{M}$ ،  $B_{1n} - B_{2n} = K$  داریم

$$\frac{\mu_1 M_{1n}}{\chi_{m1}} - \frac{\mu_2 M_{2n}}{\chi_{m2}}$$

$$B_1 \cos \theta_1 = B_{1n} = B_{2n} = B_2 \cos \theta_2 \quad (1) \quad (ب)$$

$$\frac{B_1 \sin \theta_1}{\mu_1} = H_{1t} = K + H_{2t} = K + \frac{B_2 \sin \theta_2}{\mu_2} \quad (2)$$

از تقسیم رابطه (۲) بر (۱) داریم

$$\frac{\tan \theta_1}{\mu_1} = \frac{K}{B_2 \sin \theta_2} + \frac{\tan \theta_2}{\mu_2} = \frac{\tan \theta_1}{\mu_1} \left( 1 + \frac{K \mu_2}{B_2 \sin \theta_2} \right)$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( 1 + \frac{K \mu_2}{B_2 \sin \theta_2} \right)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{r} \vec{K} \times \hat{a}_n = -\frac{K}{r} \hat{a}_y \quad (11- الف)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -\frac{\mu_0 K}{r} \hat{a}_y \quad \left( \frac{\mu W_b}{m^2} \right)$$



$$\vec{H} = -30 \hat{a}_y \left( \frac{A}{m} \right) \quad (\text{ب})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = -110 \hat{a}_y \left( \frac{\mu W_b}{m^2} \right)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\gamma} (-30 + \epsilon_0) \hat{a}_y = 0 \hat{a}_y \left( \frac{A}{m} \right) \quad (\text{ج})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -6.283 \hat{a}_y \left( \frac{\mu W_b}{m^2} \right)$$

$$B = \frac{1}{\gamma} (210) + (210)^\gamma = 44.17 \frac{W_b}{m^2} \quad (\text{الف-۱۲})$$

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = 167/\epsilon$$

$$W_m = \int_{\vec{H}_0} H dB = \int_{\vec{H}_0} H \left( \frac{1}{\gamma} + \gamma H \right) dH = \frac{H_0^\gamma}{\gamma} + \frac{\gamma}{3} H_0^\gamma = 168.170 \frac{KJ}{m^3} \quad (\text{ب})$$

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N \Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 I_a}{2\pi} \ln \left( \frac{2\rho_0 + a}{2\rho_0 - a} \right) \quad (\text{الف-۱۳})$$

$$L = \frac{N \Psi}{I} = \mu_0 N^2 \left[ \rho_0 - (\rho_0^2 - a^2)^{1/2} \right] \quad (\text{ب})$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\rho_0} \quad (\rho_0 \gg a)$$

۱۴- برای  $d \gg a$

$$L' = \frac{L}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right) = 2,5 \times 10^{-6}$$

$$\ln\left(\frac{d}{a}\right) = 2,5 \Rightarrow \frac{d}{a} = e^{2,5} = 12,18$$

$$a = \frac{3}{12,18} = 0,246 \text{ mm} \Rightarrow D = 2a = 0,492 \text{ mm}$$

$$\psi_{12} = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} dz d\rho = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a + \rho_0}{\rho_0}\right) \quad -15$$

برای  $N = 1$

$$M_{12} = \frac{N\psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{a + \rho_0}{\rho_0}\right)$$

$$= 0,1286 \text{ (}\mu\text{H)}$$

۱۶- اگر سیملوله درازتر را بینهایت فرض کنیم  $B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1}$  شار عبوری از سیملوله

دوم برابر است با

$$\psi_2 = N_2 B_1 S_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} (\pi r_1^2)$$

$$M = \frac{\psi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l_1} (\pi r_1^2)$$

$$F = NI = \psi \left( R_a + \frac{R_s}{\gamma} \right) = \frac{\psi \left( \frac{a}{\gamma} + x \right)}{\mu_0 S} \quad -17$$

$$= \frac{\psi (\gamma x + a)}{2\mu_0 S}$$

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} = \psi \frac{\epsilon}{2\mu_0 S} = \frac{1}{2\mu_0 S} \times \frac{N^2 I^2 \epsilon \mu_0 S^2}{(a+2x)^2} = \frac{2N^2 I^2 \mu_0 S}{(a+2x)^2}$$

$$\vec{F} = -F \hat{a}_x$$

$$\vec{F} = \frac{-2N^2 I^2 \mu_0 S}{(a+2x)^2} \hat{a}_x$$

## راهنمای حل مسائل به کمک متمتیکا

### مقدمه

در این پیوست سعی شده است تعدادی از مسائل مهم را که برخی از آنها در متن اصلی نیز آمده‌اند از طریق متمتیکا حل کردند. این مسائل با استفاده از این نرم‌افزار و نسخه پنج آن حل شده‌اند. بنابراین دانشجو لازم است که حتماً نسخه ۵ به بعد را روی دستگاه رایانه نصب کرده باشد.

برای اینکه دانشجو زحمت تایپ مجدد آنها را نداشته باشد، پاسخ‌ها به صورت فایل جداگانه‌ای با عنوان (ELECTRO.nb) داده شده‌اند که فقط در نرم‌افزار متمتیکا قابل رویت هستند. انتظار می‌رود که دانشجو با این نرم‌افزار آشنایی مختصری داشته باشد، به خصوص آن که در قسمت کمکی آن (Help) دستورات اساسی این نرم‌افزار آورده شده‌اند که با اندکی وقت می‌توان آنها را فرا گرفت.

یادآوری می‌گردد که کار کردن با نرم‌افزار متمتیکا در این کتاب فقط برای یادگیری بهتر دانشجو بوده و آشنایی با این نرم‌افزار جزء الزامات امتحانی برای درس الکترومغناطیس ۱ نمی‌باشد. اما توصیه می‌گردد که دانشجویان یادگیری این نرم‌افزار و نحوه به کار بردن آن در حل مسائل الکترومغناطیسی را حتماً فرا گیرند. به عنوان مثال دانشجو می‌تواند نحوه حل برخی از مسائل را که در این راهنما آمده است به دلخواه خود تغییر داده و جواب‌های دیگری را ببینند. جزئیات بیشتر در هر قسمت آورده خواهند شد.

مثال (۱): کره باردار یکنواختی به شعاع  $R$  را در نظر بگیرید. می‌خواهیم میدان الکتریکی را در داخل ( $r < R$ ) و خارج کره ( $r > R$ ) به دست آوریم. فرمان Clear هر گونه تغییری را که قبلاً تعریف شده باشد از حافظه برنامه حذف می‌کند.  $\rho$  چگالی

بار حجمی  $\left(\rho = \frac{Q}{V}\right)$  کره است. ممتیقا دارای بسته‌های نرم‌افزاری برای محاسبه توابع، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، رسم شکل و غیره می‌باشد که لیست کاملی از آنها را می‌توان در منوی Help مشاهده کرد.

در این مثال از فرمان‌های eField, Plot برای محاسبه و رسم شکل‌های ۱ و ۲ استفاده شده است. بهتر است این مثال را ابتدا به طور ریاضی حل کرده و سپس جواب را با حل به طریق ممتیقا مقایسه نمود.

### خودآزمایی ۱

پتانسیل را چگونه می‌توان به دست آورد.

**مثال (۲):** یک دو قطبی الکتریکی با دو بار یکسان مثبت و منفی در نظر بگیرید که به فاصله  $d$  از یکدیگر قرار دارند. در حقیقت یک دو قطبی از دو تک‌قطبی الکتریکی تشکیل شده است. شکل ۳ خطوط هم‌پتانسیل را برای این مثال نشان می‌دهد که از دستور Contourplot استفاده شده است. تلاش کنید با تغییر برخی از اعداد مثلاً Plot Point یا Contours ببینید شکل چگونه تغییر می‌کند. شکل ۴ میدان الکتریکی دو قطبی را نشان می‌دهد که با فرمان Plot Gradient Fiel d3D به طور سه بعدی رسم شده است. اگر فرمان Color Function را برداریم، چه اتفاقی می‌افتد؟ شکل ۵ نمایش دیگری از این میدان است که با فرمان View Point حاصل شده است.

شکل ۶ نمایش متحرکی از یک دو قطبی در حال دوران را نشان می‌دهد. در اینجا به دلیل کمبود جا فقط یک تصویر آن نمایش داده شده است. کافی است تعداد Frameها را زیادتر کرده (مثلاً ۵۰) تا دو قطبی در حال دوران را مشاهده کرد. شکل ۷ میدان الکتریکی و سطوح هم‌پتانسیل یک دو قطبی را نشان می‌دهد.

**مثال (۳):** این مثال در واقع حل یکی از تمرینات آخر فصل کتاب است که شامل ترکیبی از بارهای نقطه‌ای به ترتیب زیر است

(الف) یک چهارقطبی خطی با بارهای  $-q$  در  $z = +\frac{q}{4}$ ،  $z = -q$  در  $-q$  و  $z = -\frac{q}{4}$  در  $z = 0$

(ب) یک چهارقطبی مربعی با بارهای  $-q$  در  $\left(\frac{d}{2}, 0, -\frac{d}{2}\right), \left(\frac{d}{2}, 0, \frac{d}{2}\right)$  و بارهای  $+q$  در  $\left(-\frac{d}{2}, 0, -\frac{d}{2}\right), \left(\frac{d}{2}, 0, \frac{d}{2}\right)$

(ج) یک مثلث با بارهای  $-q$  در  $\left(\frac{d}{2}, 0, -\frac{d}{2}\right), \left(\frac{d}{2}, 0, \frac{d}{2}\right)$  و بار  $+2q$  در  $(0, 0, 0)$ .

شکل‌های ۸ الی ۱۰ به ترتیب پتانسیل‌های چهارقطبی خطی، مثلث و چهارقطبی مربعی را نشان می‌دهد، و شکل‌های ۱۱ الی ۱۴ به ترتیب خطوط میدان الکتریکی و هم‌پتانسیل را برای آنها رسم نموده است. شکل ۱۵ یک نمایش سه بعدی از میدان الکتریکی چهارقطبی خطی است.

## خودآزمایی ۲

نمایش سه بعدی میدان الکتریکی را برای سایر توزیعات بار به دست آورید.

**مثال (۴):** بار نقطه‌ای  $q$  را به فاصله  $d$  از یک صفحه رسانای بینهایت متصل به زمین در نظر بگیرید. می‌خواهیم با استفاده از روش تصویری پتانسیل را به دست آوریم. همان طور که در متن اصلی توضیح داده شده است، در این روش رسانا را حذف کرده و به جای آن یک بار تصویری قرار می‌دهیم به طوری که پتانسیل بر روی رسانا صفر باشد. با استفاده از فرمان‌های  $\text{Trigtop}$ ,  $\text{Xyr Rule}$  این مثال را می‌توان حل کرد. شکل ۱۶ تصویری از بار القایی بر روی رسانا است.

**مثال (۵):** بار نقطه‌ای  $q$  به فاصله  $d$  از مرکز یک کره رسانای متصل به زمین به شعاع  $a$  قرار دارد. در اینجا می‌خواهیم با استفاده از روش تصویری پتانسیل را در بیرون از کره به دست آوریم، در اینجا می‌توان از بسته نرم‌افزاری  $\text{VEPlot}$  برای رسم استفاده کرد. شکل ۱۷ خطوط میدان الکتریکی و هم‌پتانسیل را نشان می‌دهد. دایره قرمز رنگ بار مثبت و دایره سبز بار تصویری است. کره رسانا با یک دایره تیره دیده می‌شود. فاصله و

اندازه بار تصویری به ترتیب عبارتند از  $\frac{aq}{d}, \frac{a^2}{d}$ . شکل ۱۸ نمایشی از ایجاد بار القایی بر روی کره رسانا را نشان می‌دهد.

مثال (۶): یک بار خطی با بار  $q$  بر واحد طول در راستای محور  $z$  در مقابل یک صفحه رسانای بینهایت واقع در صفحه  $xz$  قرار دارد. می‌خواهیم با استفاده از روش تصویری پتانسیل و سطوح هم‌پتانسیل، همین‌طور خطوط میدان الکتریکی را به دست آورد، و رسم کنیم. شکل ۱۹ خطوط میدان الکتریکی و هم‌پتانسیل را برای بار حقیقی (قرمز) و تصویری (سبز) نشان می‌دهد. لاپلاسیان چنین پتانسیلی صفر است. شکل ۲۰ نمایشی از شدت بار القایی بر روی صفحه است، شکل ۲۱ خطوط میدان الکتریکی را نشان می‌دهد.

مثال (۷): در این مثال توزیع بارهای

$$P_1 = q_0 \frac{(a-r)}{a^\xi} \left( \sin(\theta) - \frac{\pi}{\xi} \right)$$

$$P_2 = q_0 \frac{(a-r)}{a^\xi} e^{(a-r)/a} \cos(\theta)$$

$$P_3 = q_0 \frac{(a-r)^\gamma}{a^0} \sin^\gamma(\theta) \sin(\gamma\phi)$$

داده شده‌اند. شکل‌های ۲۲ الی ۲۴ رسم دو بعدی این توزیعات بار را با استفاده از دستور  $\text{Contour Plot}$  نشان می‌دهد. سپس پتانسیل‌های حاصل از این توزیعات بار را برحسب چندقطبی‌ها بسط می‌دهیم که دو پتانسیل اول برحسب چند جمله‌ای‌های لژاندر و پتانسیل سوم برحسب هماهنگ‌های کروی بسط داده می‌شوند. این بسط‌ها با استفاده از دستورات  $\text{Multi Poles P}$ ,  $\text{MultiPoles SH}$  انجام می‌شوند. شکل‌های ۲۵ الی ۲۷ خطوط میدان الکتریکی و هم‌پتانسیل را نشان می‌دهند که با استفاده از دستور  $\text{VEPlot}$  به دست آمده‌اند.

مثال (۸): یک کانال مستطیلی مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که از  $z = -\infty$  تا  $z = +\infty$  امتداد داشته و یک روی آن در راستای  $y$  باز است. دیواره‌های کانال در  $x = a$  و  $x = 0$  پتانسیل صفر قرار داشته و کف آن در پتانسیل  $V(x)$  قرار دارد که مستقل از  $z$  است.

راهنمای حل مسائل به کمک ممتیگا ۱۱۷

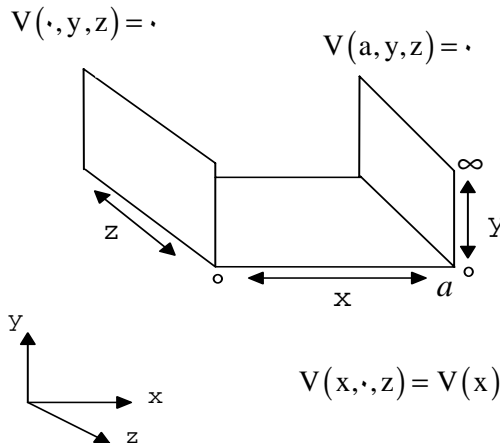
می‌خواهیم پتانسیل را در داخل کانال به دست آوریم. پتانسیل را به صورت حاصل ضرب  $X(x)Y(y)$  نوشته و با استفاده از جداسازی متغیرها جواب‌ها عبارتند از

$$Y(y) = \{e^{+\gamma y}, e^{-\gamma y}\} \quad , \quad X(x) = \{\sin(\alpha x), \cos(\alpha x)\}$$

رابطه بین پابتهای جداسازی عبارت است از  $\alpha^2 = \gamma^2$ . در نهایت پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$V(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A(m) \sin\left[\frac{\pi mx}{a}\right] e^{-\pi my/a}$$

شکل ۲۸ یک نمایش سه بعدی از پتانسیل داخل کانال و شکل ۲۹ خطوط میدان الکتریکی و هم‌پتانسیل را نشان می‌دهد. شکل ۳۰ پتانسیل داخل کانال را در حالتی نشان می‌دهد که کف آن در پتانسیل ثابت  $V_0$  قرار دارد.



### خودآزمایی ۳

چنانچه روی کانال نیز بسته بوده و در پتانسیل صفر قرار داشته باشد، پتانسیل و میدان الکتریکی در داخل کانال چگونه است؟



مثال (۹): یک جعبه مکعبی به اضلاع  $a, b, c$  در نظر گرفته که پنج وجه آن در پتانسیل صفر و فقط سقف آن در پتانسیل ثابت  $V_0$  قرار دارد. شکل های ۳۱ و ۳۲ به ترتیب پتانسیل سه بعدی، خطوط میدان و هم پتانسیل را در داخل مکعب را نشان می دهد.

مثال (۱۰): استوانه ای به شعاع  $a$  در امتداد محور  $z$  را در نظر گرفته که نیمه بالایی آن در پتانسیل  $+V_0$  و نیمه پایینی آن در پتانسیل  $-V_0$  قرار دارد. می خواهیم با استفاده از مختصات استوانه ای  $(r, \phi)$  و جداسازی متغیرها به صورت

$$R(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}$$

$$\phi(\phi) = C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)$$

پتانسیل را در داخل و خارج استوانه به دست آوریم. شکل های ۳۳ و ۳۴ نمایش سه بعدی از پتانسیل در داخل و خارج استوانه هستند.

مثال (۱۱): کره رسانایی به شعاع  $a$  در یک میدان الکتریکی یکنواخت  $E_0$  در راستای  $z$  باشد، میدان در اطراف کره را به دست آورید. با توجه به این که این مثال در متن اصلی به طور کامل حل شده است از توضیحات اضافی صرف نظر کرده و فقط اشاره می گردد که شکل ۳۵ خطوط میدان و هم پتانسیل را در اطراف کره رسانا نشان می دهد.

مثال (۱۲): کره ای به شعاع  $a$  را در نظر گرفته و فرض کنید که دارای چگالی بار سطحی به صورت  $\sigma(\theta) = \frac{Q}{a^2} \left[ \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos^2(\theta) \right]$  می باشد. شکل های ۳۶ و ۳۷ به ترتیب پتانسیل سه بعدی و خطوط میدان الکتریکی و هم پتانسیل را در داخل و خارج کره نشان می دهد.

مثال (۱۳): کره ای به شعاع  $R_0$  را در نظر گرفته که نیمکره بالایی آن در پتانسیل ثابت  $+V_0$  و نیمکره پایینی آن در پتانسیل  $-V_0$  قرار دارد. پتانسیل در داخل و خارج کره در

شکل ۴۰ نشان داده شده است. این مسأله به طور کامل در کتاب الکتروپدینامیک جکسون حل شده است.

**مثال (۱۵):** حرکت یک ذره باردار در یک میدان مغناطیسی ثابت  $\vec{B}$  را در نظر بگیرید. با ترکیب قانون دوم نیوتن  $\vec{F} = m\vec{a}$  و نیروی لورنتس  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  ( $\vec{E} = 0$ )، حرکت ذره از رابطه زیر به دست می آید.

$$\vec{r}''(t) = \frac{q}{m} \vec{r}'(t) \times \vec{B}$$

که  $r', r''$  به ترتیب شتاب و سرعت ذره هستند. شکل های ۴۱ الی ۴۳ حرکت ذره در میدان مغناطیسی را نشان می دهد.

**مثال (۱۶):** در این مثال فرض می شود که میدان الکتریکی  $\vec{E}$  صفر نباشد. در نتیجه حرکت ذره از رابطه  $m\vec{r}'' = q\vec{E} + q\vec{r}' \times \vec{B}$  به دست می آید. فرض می شود که میدان ثابت  $\vec{B}$  در راستای  $z$  و میدان  $\vec{E}$  در راستای  $x$  و به صورت  $E_x = E_0 \cos(\omega t)$  باشد که  $\omega$  بسامد زاویه ای است. شکل ۴۴ مدارهای حرکت ذره را برای مقادیر مختلف  $\omega$  و با افزایش های  $\frac{1}{3}$  را نشان می دهد.

### خودآزمایی ۴

حلقه بادار یکنواختی به شعاع  $a$  و بار کل  $q$  را در صفحه  $xy$  در نظر بگیرید. محور  $z$  عمود بر حلقه از مرکز آن می گذرد. پتانسیل را الف) در راستای محور  $z$  و بیرون از صفحه  $xy$  ب) در صفحه حلقه و در نقاط  $r < a$  و  $r > a$  به دست آورده و رسم کنید.



# حل مسائل الكترومغناطيس به کمک نرم افزار متمتیکا

## C: Example 1: Un iformly Charged Sphere

Clear ["Global`\*"];

eq1 = {

$$4\pi r^2 E_{\text{outside}} == q_{\text{Total}} \quad (* r > R *) ,$$

$$4\pi r^2 E_{\text{inside}} == q_{\text{Enclosed}} \quad (* r < R *) ;$$

$$q_{\text{Total}} = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_i$$

$$q_{\text{Enclosed}} = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_i$$

Sol=Solve [eq1, {Einside, Eoutside}] //First

$$\{ E_{\text{outside}} \rightarrow \frac{R^3 \rho}{3r^2}, E_{\text{inside}} \rightarrow \frac{r \rho}{3} \}$$

eField [rr\_, RR\_:1, rho\_:1]:=If [rr ≤ RR,  
Einside, Eoutside ] /.sol/.{r → rr, R→ RR, ρ→ rho}

p1 = Plot[eField[r], {r, 10<sup>-6</sup>, 3}];

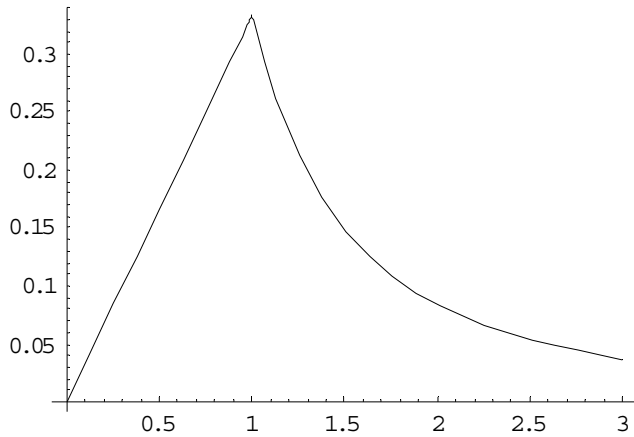


Figure 1

```

medium1={Hue[.2],Polygon[{{1,.51},{1,0},{3,0},{3,.51}}]};
medium2={Hue[.5],Polygon[{{0,.51},{0,0},{1,0},{1,.51}}]};
Show[
{Graphics[
medium1,
medium2,
Text ["Inside ",{0.5,0.4}],
Text ["Outside",{2.0,0.4}]}],
p1
},
Axes Label → {"Distance ","Electric Field"},
Axes→True];

```

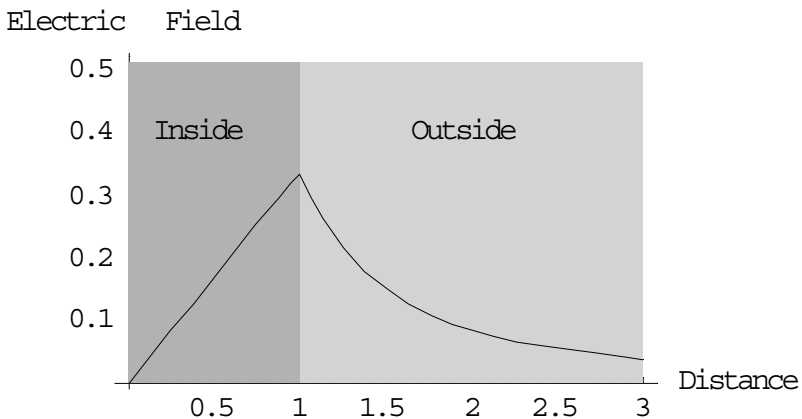


Figure 2

### C: Example 2: Electric Dipole

Clear["Global`\*"];

monopole[q\_, p<sup>0</sup>\_:{0,0,0}, p<sup>1</sup>\_:{x,y,z}]:=

$$\frac{q}{\sqrt{(p^0 - p^1) \cdot (p^0 - p^1)}}$$

dipole=(monopole[-q,{0,0,-d/2}]+monopole[+q,{0,0,+d/2}])

$$\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(-\frac{d}{2} - z\right)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{d}{2} - z\right)^2}}$$

ContourPlot [dipole/.{q→1,d→1,y→0} //Evaluate,  
 {x,-2,2},{z,-2,2},  
 Plot Points → 45,  
 Contours → 21,  
 Color Function → Hue,  
 Axes → True,  
 AxesLabel → {"x-axis","z-axis"}];

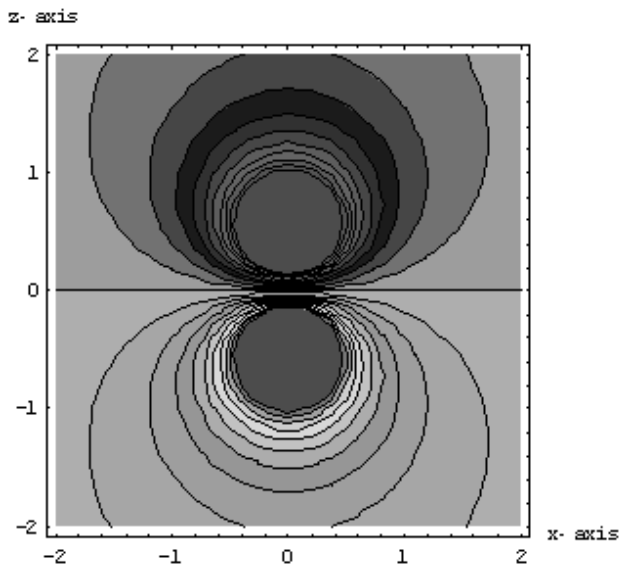


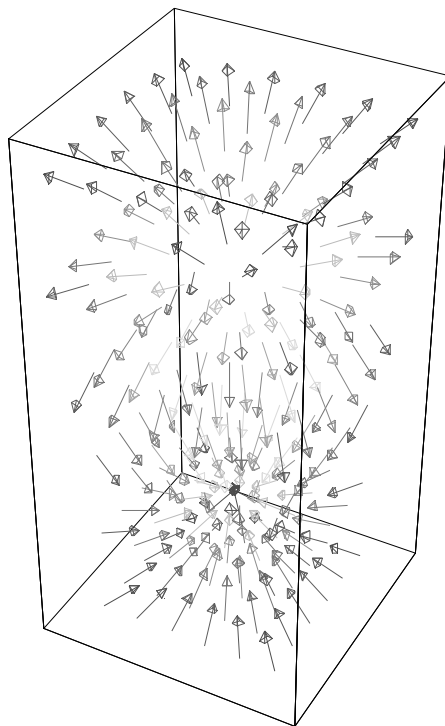
Figure 3

`Needs["Graphics`PlotField3D"];`

Plot =

`Plot GradientField3D [-dipolie/. {q → 1 , d →1 } // Evaluate,  
{x, -0.5, 0.5} , {y, -0.5, 0.5} , {z, -1.0, 1.0}  
Plot Points → 6,  
Color Function → Hue  
Vector Heads → True  
Scale Function → (1&),  
Box Ratios → {1, 1, 2}`

`];`



**Figure 4**

`Show[Plot, ViewPoint->{0,3,0}];`

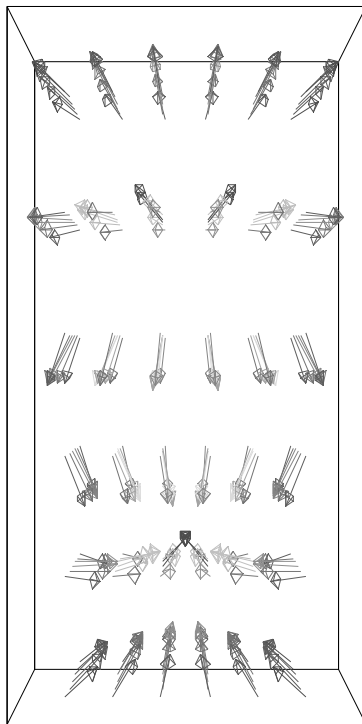


Figure 5

Needs["Calculus`Vector Analysis`"];

x2r Rule = Thread [{x, y, z} → Coordinates To Cartesian [{r, θ, φ}, Spherical]]

$$\{x \rightarrow r \cos[\varphi] \sin[\theta], y \rightarrow r \sin[\theta] \sin[\varphi], z \rightarrow r \cos[\theta]\}$$

potential = dipole/. x2r Rule // Simplify

$$2q \left( \frac{1}{\sqrt{d^2 + 4r^2 - 4dr \cos[\theta]}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + 4r^2 + 4dr \cos[\theta]}} \right)$$

dipoleR = Series [potential, {r, ∞, 2}] // Normal // Simplify



$$\frac{dq \cos[\theta]}{r^2}$$

$$eField = -\text{Grad} [\text{dipoleR}, \text{Spherical} [r, \theta, \phi]]$$

$$\left\{ \frac{2dq \cos[\theta]}{r^3}, \frac{dq \sin[\theta]}{r^3}, 0 \right\}$$

$$\text{rotDipole}[\theta_] = (\text{monopole} [+1, 1/2\{+\sin[\theta], 0, +\cos[\theta]\}] + \text{monopole} [-1, 1/2\{-\sin[\theta], 0, -\cos[\theta]\}]);$$

```
frames=1;
Do[
  PlotGradientField[
    -rotDipole[θ].{y→0},
    {x,-2,2},{z,-2,2},
    PlotPoints → 14,
    VectorHeads → True,
    ScaleFunction → (1&)]
  ,{θ,2 π/frames, 2 π, 2 π/frames}]
```

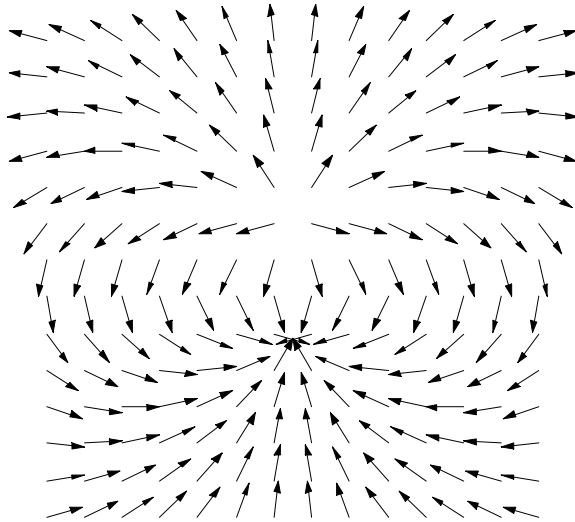


Figure 6

Needs["Graphics`PlotField`"]

VEPlot[potential\_,xlim\_,ylim\_,opts\_\_\_]:=Module[{plot1,plot2},

**plot1** = Plot Gradient Field[-potential, xlim,ylim,ScaleFunction  
→ (1&), Display Function → Identity];

**plot2** = Contour Plot [potential, xlim, ylim, Contour Shading  
→ False, Contour Smoothing → True, Display Function → Identity,  
Plot Points → 50];

Show [{plot1, plot2}, opts,Display Function→ \$ Display Function ]];

VEPlot [potential\_,opts\_\_\_] := VEPlot [potential, {x, 1.1, -1.1},  
{y, 1.1, -1.1}, opts]

Protect[VEPlot];

$$\text{dipole} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + \left(-Y - \frac{1}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{X^2 + \left(\frac{1}{2} - Y\right)^2}}$$

VEPlot[dipole, Epilog → {{Hue[.3], Disk[{0,1/2},0.1]}, {Hue[0.95],  
Disk [{0, -1/2},0.1]}}];

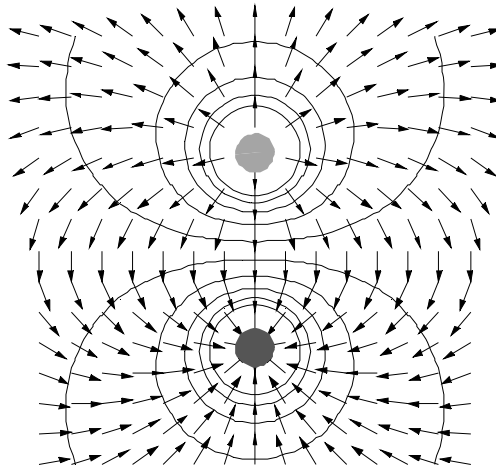


Figure 7

### C: Example 3 : Superposition of Point Charges

```
Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]
Needs["Graphics`PlotField`"]
Needs["Graphics`PlotField3D`"]
```

```
Clear["Global`*"];
```

```
Monopole [q_:1, r0_:{0,0,0}, r_:{x,y,z}]:=
q/Sqrt [Sum [(r0[[i]]-r[[i]])^2, {i, 1, Length [r0]}]];
quad = (Monopole [2 q, {0, 0, 0}] + Monopole [-q,{0,0,d/2}] +
Monopole [-q,{0, 0, -d/2}])
```

$$-\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(-\frac{d}{2} - z\right)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{d}{2} - z\right)^2}} + \frac{2q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

```
triangle = (Monopole [+2q, {0, 0, 0}] + Monopole [-q, {+d/2,0,-d/2}]
+ Monopole [-q, {-d/2, 0, -d/2}]);
square = (Monopole [+q, {+d/2, 0, d/2}] + Monopole [-q, {+d/2, 0, -
d/2}] + Monopole [+q, {-d/2, 0, -d/2}] + Monopole [-q, {-d/2, 0, d/2}];
Plot3D [quad/.{ y→ 0, q → 1, d → 1},{x, -1, 1},{z,-1, 1}, Axes Label
→ {"x", "z", ""}];
```

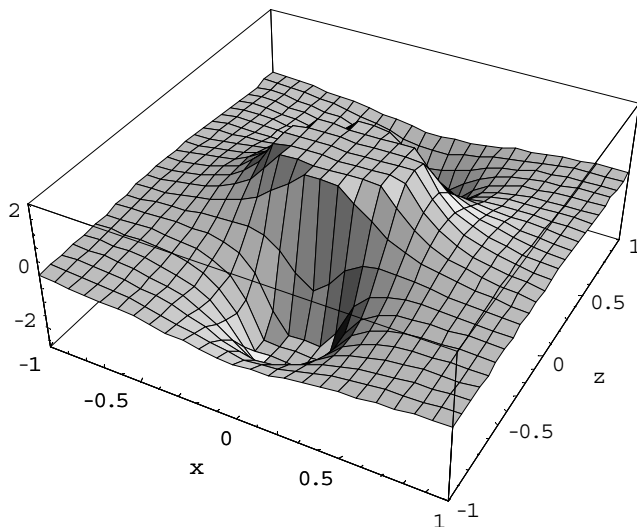


Figure 8

```
Plot3D[triangle/.{y→0,q→1,d→1},{x,-1,1},{z,-1,1},AxesLabel→{"x","z",""}];
```

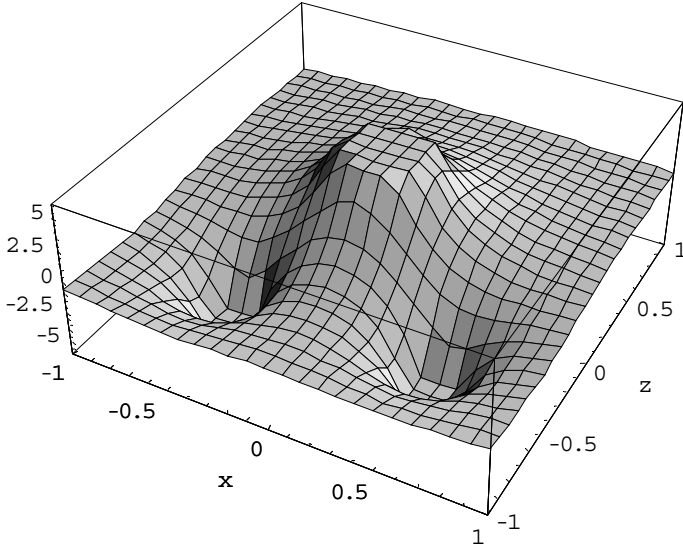


Figure 9

```
Plot3D[square/.{y→0,q→1,d→1},{x,-1,1},{z,-1,1},AxesLabel→{"x","z",""}];
```

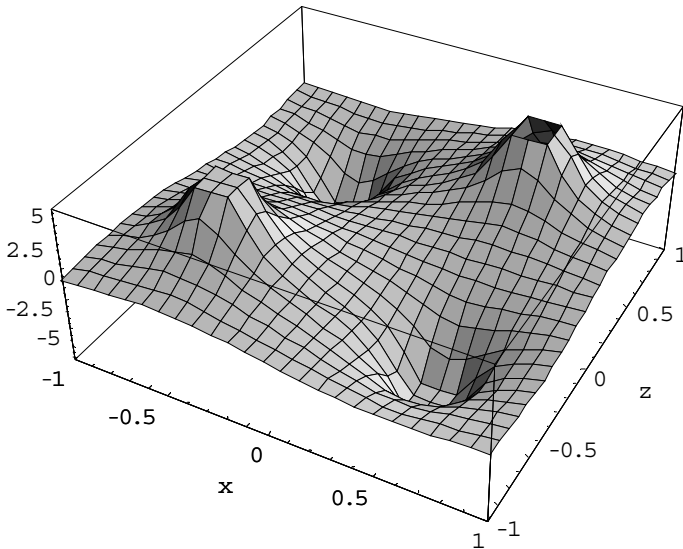


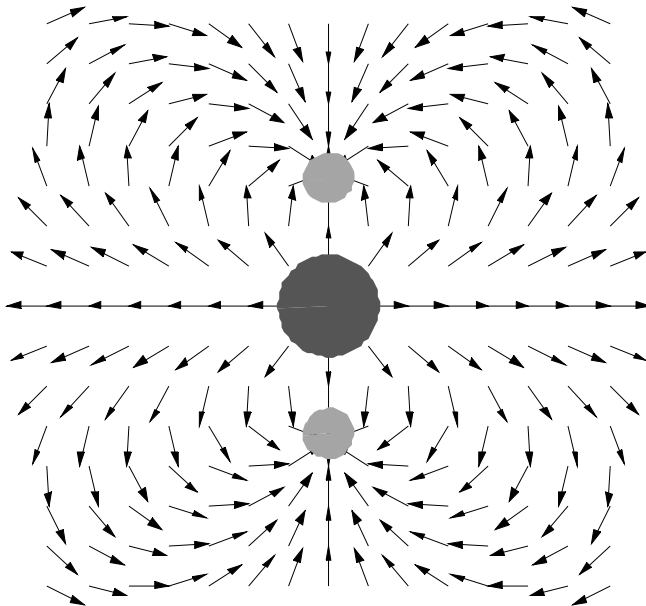
Figure 10

```
Charges = {{Hue[0.3], Disk[{0,1/2}, 0.1]},  
           {Hue[0.95], Disk[{0,0}, 0.2]},  
           {Hue[0.3], Disk[{0,-1/2},0.1]}};
```

```
p1:= Plot Gradient Field[  
-quad //. {q → 1, d → 1, y → 0}  
, {x,-1.1,1.1},{z,-1.1,1.1}  
, Scale Function → (1&), Epilog → charges];
```

```
p2 = Contour Plo [quad //. {q → 1, d → 1, y → 0},  
                {x, -1.1, 1.1}, {z, -1.1, 1.1},  
                Contour Shading → False ,  
                Plot Points → 50,  
                Display Function → Identity  
                ];
```

```
Show [p1, p2];
```



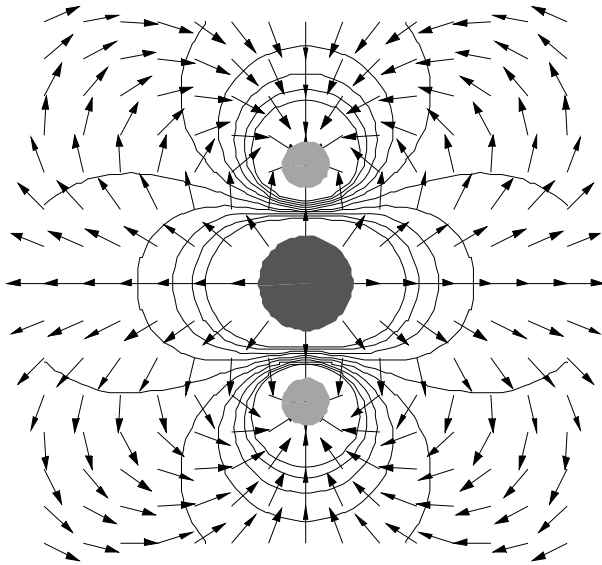


Figure 11

```
VEPlot [quad//.{q → 1, d → 1, y → 0 },  
        {x, -1.1, 1.1} , {z, -1.1, 1.1},  
        Epilog → charges];
```

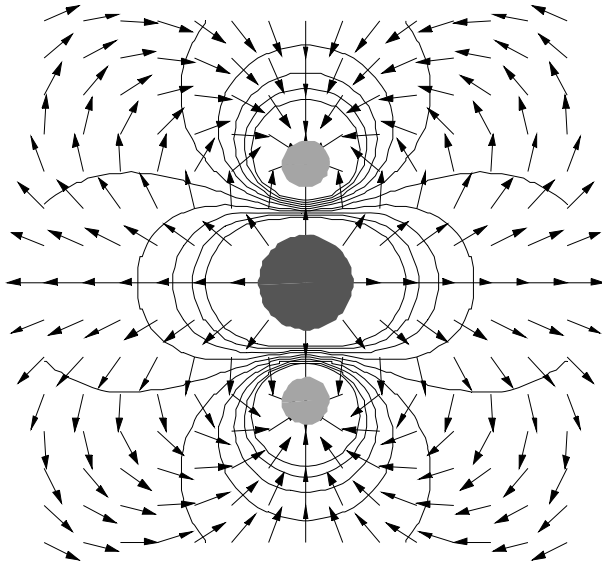


Figure 12

```
charges= {{Hue[0.3], Disk[{-1/2,-1/2},0.1]},
           {Hue[0.95],Disk[{0,0},0.2]},
           {Hue[0.3], Disk[{1/2,-1/2},0.1]}};
```

```
VEPlot[triangle/.{q→1,d→1,y→0},
        {x,-1.1,1.1},{z,-1.1,1.1},
        Epilog→charges];
```

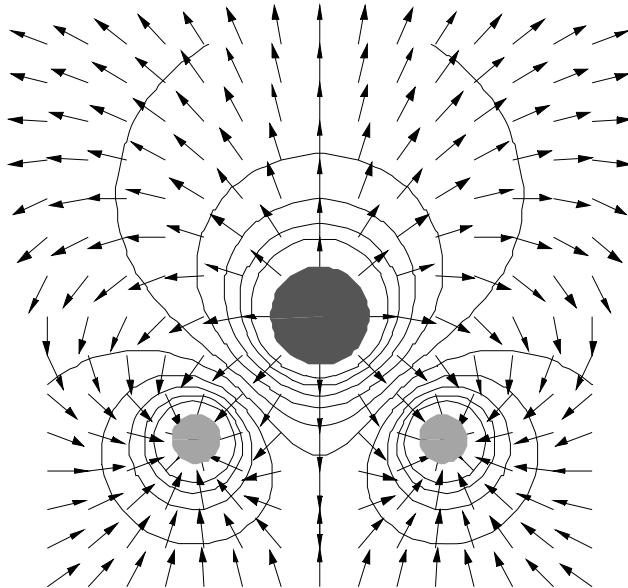


Figure 13

```
charges= {{Hue[0.95], Disk[{-1/2,-1/2},0.1]},
           {Hue[0.95],Disk[{1/2,1/2},0.1]},
           {Hue[0.3], Disk[{-1/2, 1/2},0.1]},
           {Hue[0.3], Disk[{ 1/2,- 1/2},0.1]}};
```

```
VEPlot[square/.{q→1,d→1,y→0},{x,-1.1,1.1},{z,-
1.1,1.1},Epilog→charges];
```

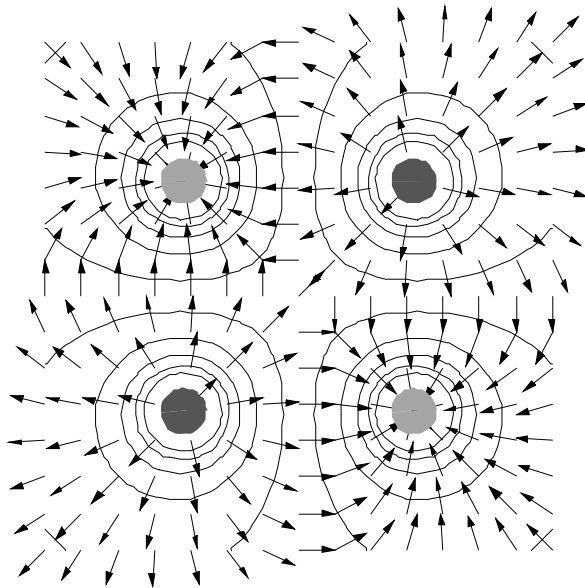


Figure 14

`x2rRule=Thread[{x,y,z}→CoordinatesToCartesian[{r,θ,φ},Spherical]]`

`{x → r Cos[φ] Sin[θ],y → r Sin[θ] Sin[φ], z→ r Cos[θ]}`

`seriesQuad= Series[quad //.x2rRule ,{r,∞,3}] //Simplify//Normal`

$$-\frac{d^2 q (1 + 3 \cos[2\theta])}{8r^3}$$

`series Quad // Trig ToP // Simplify`

$$\text{TrigTop} \left[ -\frac{d^2 q (1 + 3 \cos[2\theta])}{8r^3} \right]$$

`seriesSquare= Series[square //.x2rRule ,{r,∞,3}] //Simplify //Normal`

$$\frac{3d^2 q \cos[\theta] \cos[\phi] \sin[\theta]}{r^3}$$

`Series Square // TrigToY // Simplify`



$$\text{TrigTop} \left[ \frac{3d^2 q \cos[\theta] \cos[\phi] \sin[\theta]}{r^3} \right]$$

**seriesTriangle= Series[triangle //.x2rRule ,{r,∞,2}]  
//FullSimplify//Normal**

$$\frac{d q \cos[\theta]}{r^2}$$

**seriesTriangle//TrigToY//Simplify**

$$\text{TrigTop} \left[ \frac{d q \cos[\theta]}{r^2} \right]$$

**p1=PlotGradientField3D[quad//.{q→1,d→1},{x,-1,1},{y,-1,1},{z,-1,1},  
ScaleFunction→(1&),  
VectorHeads→True,ColorFunction→Hue,  
PlotPoints→6,  
BoxRatios→{1,1,2},  
ViewPoint→{1.3,-2.4,1}];**

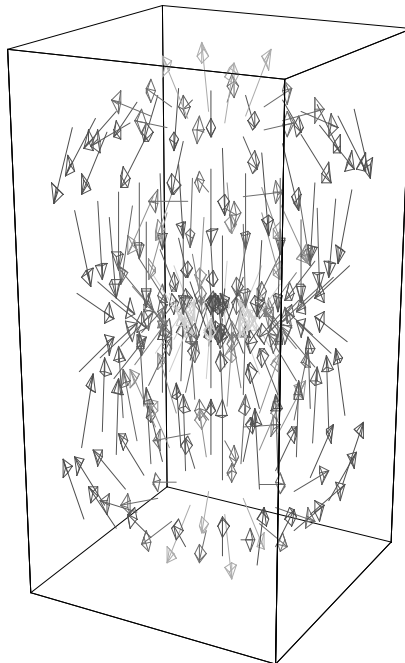


Figure 15

### C: Example 4: Point charges and grounded sphere

Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

Needs["Graphics`PlotField`"]

Clear["Global`\*"];

Monopole[q\_:=1,r0\_:=0,0,0,r\_:=x,y,z]:=

q/Sqrt[Sum[(r0[[i]]-r[[i]])^2,{i,1,Length[r0]}]]];

dipole=(Monopole[+q,{0,0,+d}]+Monopole[-q,{0,0,-d}])

$$-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(-d-z)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}$$

dipole/.z→0

0

x2rRule=Thread[{x,y,z}→CoordinatesToCartesian[{r,θ,phi},Spherical]]

{x→r Cos[phi] Sin[θ],y→r Sin[phi] Sin[θ],z→r Cos[θ]}

dipoleR=Series[dipole //.x2rRule,{r,∞,2}]/Normal//Simplify

$$\frac{2dq \cos[\theta]}{r^2}$$

dipoleR//TrigToP

$$\text{TrigToP} \left[ \frac{dq \cos[\theta]}{r^2} \right]$$

efieldR=-Grad[dipoleR,Spherical[r,θ,φ]]

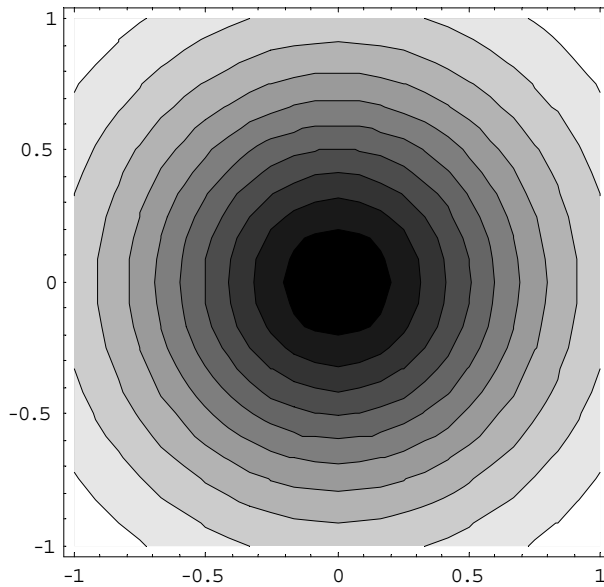
$$\left\{ \frac{4dq \cos[\theta]}{r^3}, \frac{2dq \sin[\theta]}{r^3}, 0 \right\}$$

**charge=-1/(4 π) D[dipole,z]//z→0**

$$-\frac{dq}{2\pi(d^2+x^2+y^2)^{3/2}}$$

**Integrate [charge,{y,-∞,+∞},{x,-∞,+∞},Assumptions->d>0]//PowerExpand  
-q**

**ContourPlot[charge/.{d→1,q→1},{y,-1,1},{x,-1,1}];**



**Figure 16**

**C: Example 5: Point charges and grounded sphere**

Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

Needs["Graphics`PlotField`"]

Clear["Global`\*"];

$$eq1 = \left\{ \frac{q}{a+d} + \frac{q1}{a+d1} == 0, \frac{q}{a+d} + \frac{q1}{a+d1} == 0 \right\};$$

imageRule=Solve[eq1,{d1,q1}]/ExpandAll/Flatten

$$\left\{ d1 \rightarrow \frac{a^2}{d}, q1 \rightarrow -\frac{aq}{d} \right\}$$

Monopole[q\_ : 1, r0\_ : {0,0,0}, r\_ : {x,y,z}] :=  
q/Sqrt[Sum[(r0[[i]]-r[[i]])^2,{i,1,Length[r0]}]]

potential=(Monopole[q,{0,0,d}]+Monopole[q1,{0,0,d1}])/imageRule

$$-\frac{aq}{d\sqrt{x^2+y^2+\left(\frac{a^2}{d}-z\right)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}$$

x2rRule=Thread[{x,y,z}→CoordinatesToCartesian[{r,θ,φ},Spherical]]

$$\{x \rightarrow r \cos[\phi] \sin[\theta], y \rightarrow r \sin[\theta] \sin[\phi], z \rightarrow r \cos[\theta]\}$$

potentialR=potential//x2rRule//Simplify//Expand

$$-\frac{aq}{d\sqrt{\frac{a^4}{d^2}+r^2+\left(\frac{a^2}{d}-z\right)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}$$

potentialR//r→a//Simplify//PowerExpand  
0

Series[potentialR,{r,∞,2]} //Normal //Collect[#, { Cos[θ],r, a }]&

$$\frac{q - \frac{aq}{d}}{r} + \frac{\left(-\frac{a^3 q}{d^2} + dq\right) \text{Cos}[\theta]}{r^2}$$

VEPlot[potential\_,xlim\_,ylim\_,opts\_]:=Module[{plot1,plot2},

plot1=PlotGradientField[-  
potential,xlim,ylim,ScaleFunction→(1&),DisplayFunction→Identity];

plot2=ContourPlot[potential,xlim,ylim,ContourShading→False,ContourSmoothing→True,DisplayFunction→Identity,PlotPoints→50];  
Show[{plot1,plot2},opts,DisplayFunction→\$DisplayFunction ]];

VEPlot[potential/.{a→0.2,d→0.4,q→1,y→0},{x,-1,1},{z,-1,1},Epilog→{ {Hue[0.3],Disk[{0,0.1},0.05]},  
{Thickness[0.01],Circle[{0,0},0.2]} ,  
{Hue[0.95],Disk[{0,0.4},0.1]}}];

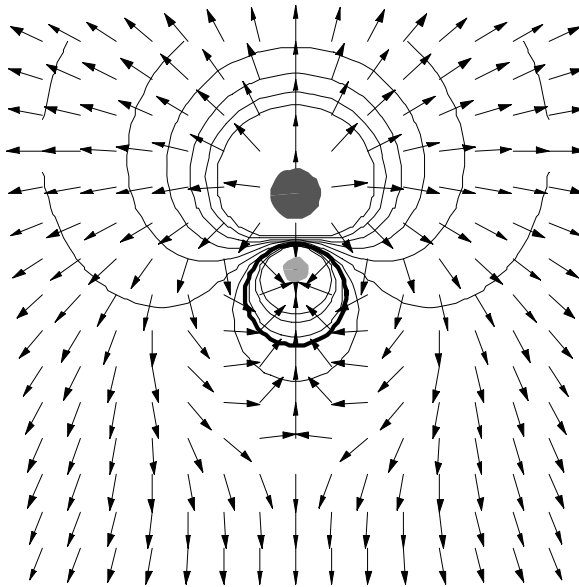


Figure 17

حل مسائل الكترومغناطيس به كمك نرم افزار ممتيكا ۱۳۹

chargedensity =

$$\left(-\frac{1}{4\pi} D[\text{potentialR} \cdot r] /. \{r \rightarrow a\} // \text{Simplify} // \text{PowerExpand} // \text{Simplify}\right)$$

$$\frac{(a^2 - d^2) q}{4 a \pi (a^2 + d^2 - 2 a d \text{Cos}[\theta])^{3/2}}$$

$$\text{totalcharge} = \text{Integrate}[\text{chargedensity} \, 2 \pi a^2 \text{Sin}[\theta], \{\theta, 0, \pi\}, \text{Assumptions} \rightarrow \{a > 0, d > a\}]$$

$$-\frac{a q}{d}$$

$$(*\text{totalcharge} = \text{Integrate}[\text{chargedensity} \, 2 \pi a^2 \text{Sin}[\theta], \{\theta, 0, \pi\}] // \text{Simplify} *)$$

$$(*\text{rule} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{(a-d)^2}} \rightarrow \frac{1}{-a+d}, \sqrt{(a-d)^2} \rightarrow -a+d \right\}; *)$$

$$(* \text{totalcharge} // .\text{rule} // \text{PowerExpand} // \text{Simplify} *)$$

$$\theta\text{Min} = +(\text{FindMinimum}[\text{chargedensity} /. \{a \rightarrow 1, q \rightarrow 1, d \rightarrow 2\}, \{\theta, 1\}] // \text{First});$$

$$\theta\text{Max} = -(\text{FindMinimum}[-\text{chargedensity} /. \{a \rightarrow 1, q \rightarrow 1, d \rightarrow 2\}, \{\theta, 1\}] // \text{First});$$

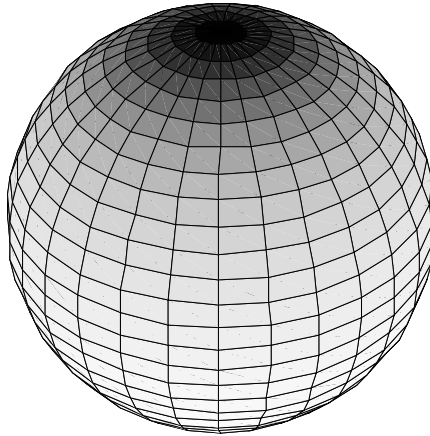
$$\text{gray}[\theta\_]=((\text{chargedensity}-\theta\text{Min})/(\theta\text{Max}-\theta\text{Min})).\{a \rightarrow 1, q \rightarrow 1, d \rightarrow 2\};$$

$$\{\theta\text{Min}, \theta\text{Max}\}$$

$$\{-0.238732, -0.00884194\}$$

$$\text{radius} = 1;$$

**ParametricPlot3D[{radius Sin[ $\theta$ ] Cos[ $\phi$ ],radius Sin[ $\theta$ ] Sin[ $\phi$ ],radius Cos[ $\theta$ ],GrayLevel[gray[ $\theta$ ]],{ $\theta$ ,0, $\pi$ },{ $\phi$ ,0,2  $\pi$ }.Lighting→False.Axes→False.Boxed→False]:**



**Figure 18**

### C: Example 6: Line charge and grounded plane

```
Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]
Needs["Graphics`PlotField`"]
```

$$\text{potential} = -q \text{Log} \left[ x^2 + (y - y_0)^2 \right] + q \text{Log} \left[ x^2 + (y + y_0)^2 \right];$$

```
potential//.{y→0}
```

```
0
```

```
VEPlot[potential//.{q→1,y0→1},{x,-1.1,1.1},{y,-2,2},Epilog→{
  {Thickness[.03],Line[{{-1.1,0},{1.1,0}}]},
  {Hue[.35],Disk[{0,-1},1]},
  {Hue[.95],Disk[{0,1},1]}}];
```

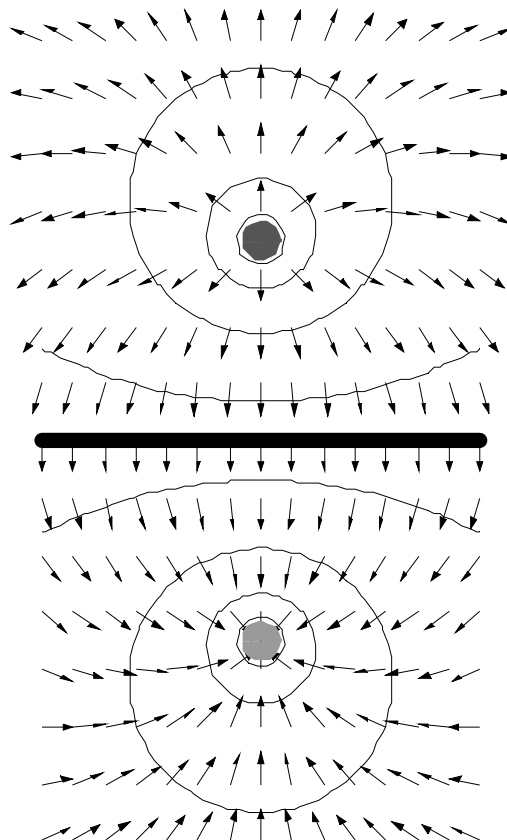


Figure 19



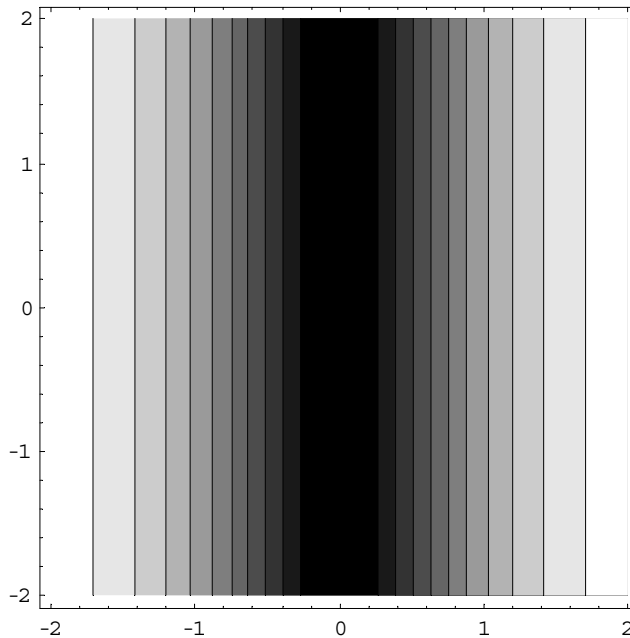
**Laplacian[potential, Cartesian[x, y, z]] // Together**

**0**

$$\text{charge} = -\frac{1}{4\pi} \text{D}[\text{potential} \cdot \mathbf{Y}] / \cdot \{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{0}\}$$

$$-\frac{q y_0}{\pi(x^2 + y_0^2)}$$

**ContourPlot[charge /. {q -> 1, y0 -> 1}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}];**



**Figure 20**

**Integrate[charge, {x, -∞, ∞}, Assumptions -> {y0 > 0}] // PowerExpand**

**-q**

**eField = -Grad[potential, Cartesian[x, y, z]] // Simplify**

$$\left\{ \frac{8qxyy_0}{(x^2+(y-y_0)^2)(x^2+(y+y_0)^2)}, \frac{2q(y-y_0)}{x^2+(y-y_0)^2} - \frac{2q(y+y_0)}{x^2+(y+y_0)^2}, 0 \right\}$$

**PlotVectorField[eField[{{1,2}]}//.{q→1,y0→1},  
{x,-5,5},{y,0,3},  
PlotPoints→10,  
ScaleFunction→(1&),**

**AspectRatio→8/10,Prolog→{Thickness[.03],Line[{{-5,0},{5,0}}],  
{Hue[.95],Disk[{0,1},.2]}}];**

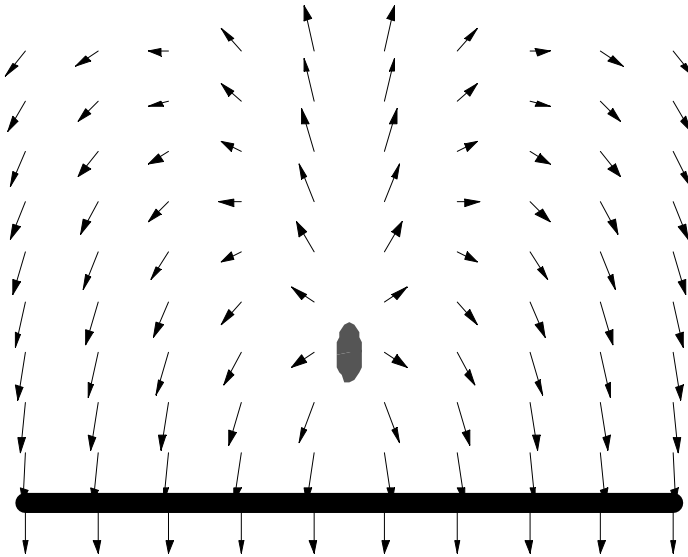


Figure 21

### C: Example 7: Multipole expansion of a charge distribution

Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]  
Needs["Graphics`PlotField`"]

MultipoleSH[distribution\_, r limit\_, n\_] :=

Module[{q, V},

q := Integrate[

(Integrate[distribution r<sup>2</sup>, {r, 0, r limit}]) \*

(-1)<sup>m</sup> sin(θ) Y<sub>el</sub><sup>-m</sup>(θ, φ), {θ, 0, π}, {φ, 0, 2π}];

$$V = \text{Sum} \frac{4\pi q \left(\frac{r \text{ limit}}{r}\right)^{\text{el}} Y(\text{el}, m, \theta, \phi)}{(2\text{el} + 1)r}, \{\text{el}, 0, n\}, \{m, -\text{el}, \text{el}\};$$

Return[V];

$$\text{density} = \frac{Q(r-a)\sin^2(\theta)\sin^2(\phi)}{a^4}$$

MultipoleSH[density, a, 2] // Simplify // Apart

$$-\frac{2\pi^{3/2} Q Y[0, 0, \theta, \phi]}{9r} + \frac{1}{45\sqrt{5}r^3} (a^2 \pi^{3/2} Q$$

$$(\sqrt{6} Y[2, -2, \theta, \phi] + 2 Y[2, 0, \theta, \phi] + \sqrt{6} Y[2, 2, \theta, \phi]))$$

MultipoleP[distribution\_, r limit\_, n\_] :=

Module[{q, pot},

q := Integrate[

2 π \* (Integrate[distribution r^2, {r, 0, rlimit}]) \*

$\frac{\sqrt{2\ell+1}}{2\sqrt{\pi}}$  LegendreP[ell, Cos[θ]] \* Sin[θ], {θ, 0, π};

pot = Sum  $\frac{2\sqrt{\frac{1}{2\ell+1}}\sqrt{\pi}q\left(\frac{r\text{ limit}}{r}\right)^\ell P(\ell, \text{Cos}(\theta))}{(2\ell+1)r}$ , {ell, 0, n};

Return[pot];

$$\text{density} = \frac{Q(r - a \text{Cos}^2(\theta))}{a^4}$$

eq1 = MultipoleP[density, a, 2]

$$\frac{5\pi QP[0, \text{Cos}[\theta]]}{9r} - \frac{8a^2\pi QP[0, \text{Cos}[\theta]]}{45r^3}$$

eq2 = MultipoleSH[density, a, 2]

$$\frac{10\pi^{3/2} QY[0, 0, \theta, \phi]}{9r} - \frac{16a^2\pi^{3/2} QY[2, 0, \theta, \phi]}{45\sqrt{5}r^3}$$

eq1 = eq2 // {P → LegendreP, Y → SphericalHarmonicY} // Simplify

**True**

$$\text{chargeDensity1} = \frac{q_0(a-r)\left(\sin(\theta) - \frac{\pi}{4}\right)}{a^4};$$

$$\text{chargeDensity2} = \frac{e^{-\frac{a-r}{a}} q_0(a-r)\cos(\theta)}{a^4};$$

$$\text{chargeDensity3} = \frac{q_0(a-r)^2 \sin^2(\theta) \sin(2\phi)}{a^5};$$

**r2xRule=Thread[{r,θ,φ}→CoordinatesFromCartesian[{x,y,z},  
Spherical]]**

$$\{r \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta \rightarrow \text{ArcCos}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right], \phi \rightarrow \text{ArcTan}[x, y]\}$$

**values={q0→1,a→1};**

**ContourPlot[chargeDensity1/.r2xRule/.values/.{y→0},{x,-1,1},  
{z,-1,1},PlotPoints→40];**

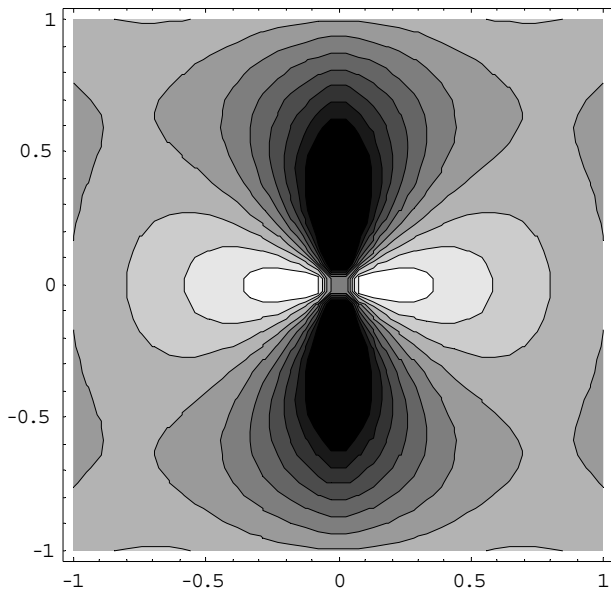


Figure 22

`ContourPlot[chargeDensity2/.r2xRule/.values/.{y→0},  
{x,-1,1},{z,-1,1},PlotPoints→40];`

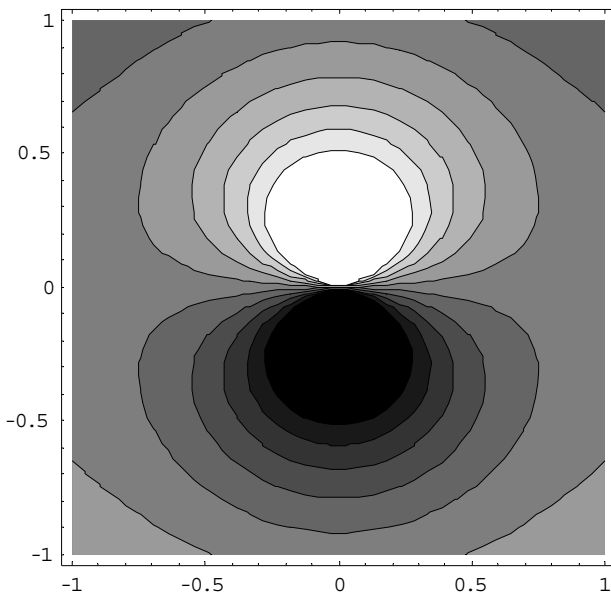
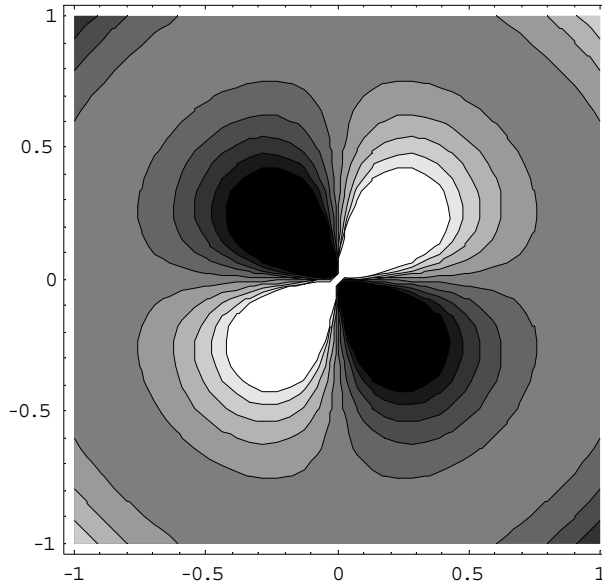


Figure 23

**ContourPlot[chargeDensity3/.r2xRule/.values/.{z→0},  
{x,-1,1},{y,-1,1},PlotPoints→40];**



**Figure 24**

**multi1=MultipoleP[chargeDensity1,a,2]**

$$\frac{a^2 \pi^2 q_0 P[2, \text{Cos}[\theta]]}{96 r^3}$$

**multi2=MultipoleP[chargeDensity2,a,2]//Simplify**

$$\frac{4a(11 \cdot 4e) \pi q_0 P[1, \text{Cos}[\theta]]}{3 r^3}$$

**multi3=MultipoleSH[chargeDensity3,a,2]//Simplify**

$$\frac{4i \sqrt{\frac{2}{15}} a^2 \pi^{3/2} q_0 (Y[2, -2, \theta, \phi] - Y[2, -2, \theta, \phi])}{75 r^3}$$

**eField1=-Grad[multi1,Spherical[r,θ,φ]]**

$$\left\{ -\frac{a^2 \pi^2 q_0 P[2, \text{Cos}[\theta]]}{96 r^4}, \right. \\ \left. -\frac{a^2 \pi^2 q_0 \text{Sin}[\theta] P^{(0,1)}[2, \text{Cos}[\theta]]}{96 r^4}, 0 \right\}$$

**eField1//.P→LegendreP//Simplify**

$$\left\{ -\frac{a^2 \pi^2 q_0 [1+3\text{Cos}[2\theta]]}{128 r^4}, -\frac{a^2 \pi^2 q_0 \text{Sin}[2\theta]}{64 r^4}, 0 \right\}$$

**eField2=-Grad [multi2, Spherical [r,θ,φ]] // .P→LegendreP // Simplify**

$$\left\{ \frac{8a(11-4e)\pi q_0 \text{Cos}[\theta]}{3r^3}, -\frac{4a(11-4e)\pi q_0 \text{Sin}[\theta]}{96 r^4}, 0 \right\}$$

**eField3 =-Grad [multi3 /.{Y→SphericalHarmonicY}, Spherical [r,θ,φ]] // ExpToTrig //Simplify**

$$\left\{ \frac{2a^2 \pi q_0 \text{Sin}[\theta]^2 \text{Sin}[2\phi]}{25r^4}, \right. \\ \left. -\frac{8a^2 \pi q_0 \text{Cos}[\theta] \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi]}{75 r^4}, \right. \\ \left. -\frac{4a^2 \pi q_0 \text{Cos}[2\phi] \text{Sin}[\theta]}{75 r^4} \right\}$$

**pot1 = multi1 /.r2xRule /.{P → LegendreP , Y→SphericalHarmonicY} /.values /.{y→0} // Simplify**

$$\frac{\pi^2 (x^2 - 2z^2)}{192(x^2 - 2z^2)^{5/2}}$$

**VEPlot[pot1,{x,1.1,-1.1},{z,1.1,-1.1}];**



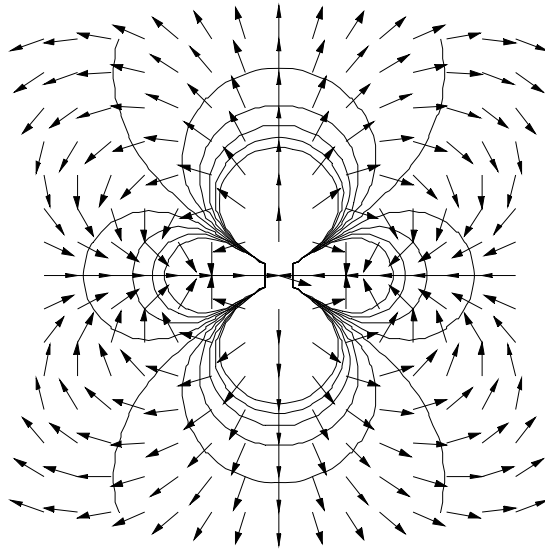


Figure 25

pot2=multi2/r2xRule/{P→ LegendreP,Y → SphericalHarmonicY}  
/.values/.{y→0}

$$\frac{4(11-4e)\pi z}{3(x^2+z^2)^{3/2}}$$

VEPlot[pot2,{x,-1.1,1.1},{z,-1.1,1.1}];

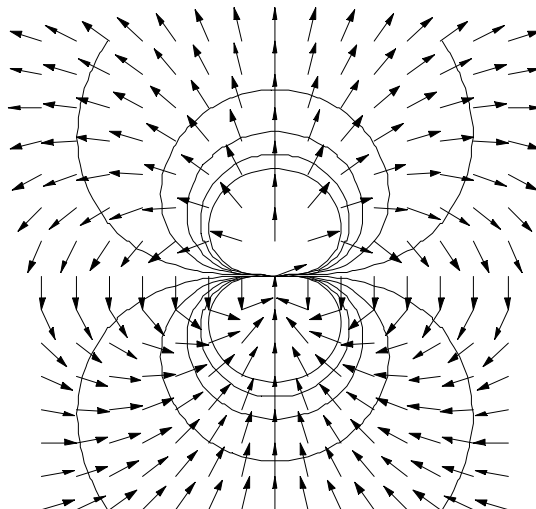


Figure 26

```
pot3= multi3 /.r2xRule //. { P → LegendreP,  
Y → SphericalHarmonicY } //.values/.{z→0} // FullSimplify
```

$$\frac{4\pi x y}{75(x^2 - y^2)^{5/2}}$$

```
VEPlot[pot3];
```

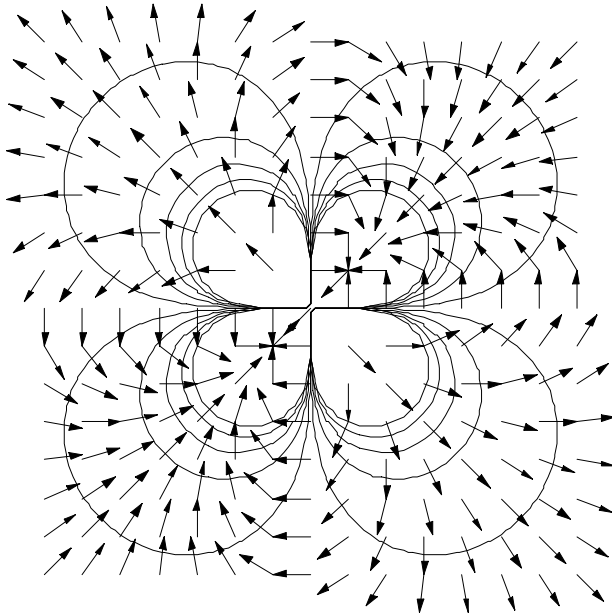


Figure 27

**C: Example 8: Potential in a rectangular groove**

$$A[V\_ ,m\_]:=2/a \text{ Integrate}[V \text{ Sin}[\pi m x/a],\{x,0,a\}];$$

$$\text{pot}[V\_ ,n\_]:= \text{Sum}[A[V\_ ,m] e^{-\frac{m\pi y}{a}} \text{sin}\left(\frac{m\pi x}{a}\right),\{m,1,n\}];$$

$$\text{pot}[\text{Sin}[x],3]$$

$$\frac{2e^{-\frac{\pi y}{a}} \pi \text{sin}[a] \text{sin}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{-a^2 + \pi^2}$$

$$+ \frac{4e^{-\frac{2\pi y}{a}} \pi \text{sin}[a] \text{sin}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{a^2 - 4\pi^2} - \frac{6e^{-\frac{3\pi y}{a}} \pi \text{sin}[a] \text{sin}\left(\frac{3\pi x}{a}\right)}{a^2 - 9\pi^2}$$

**Plot3D[pot[Sin[x],30]/.a→1//Evaluate,  
{x,0,1},{y,0,0.5},AxesLabel→{ x , y , V }];**

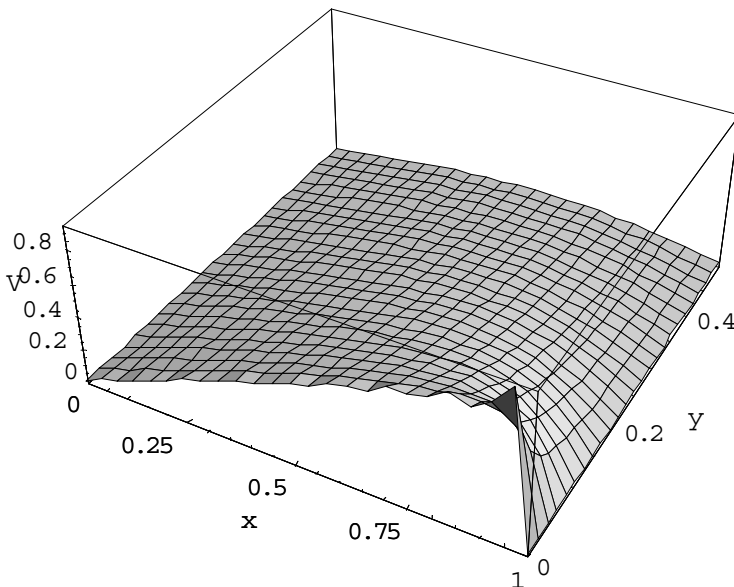


Figure 28

pot15=pot[Sin[x],15]/.a→1;

VEPlot[pot15,{x,0,1},{y,0,0.5}];

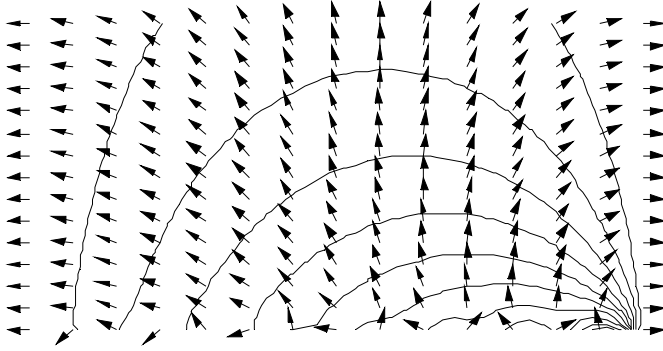


Figure 29

eq1= pot [V0,∞]//FullSimplify

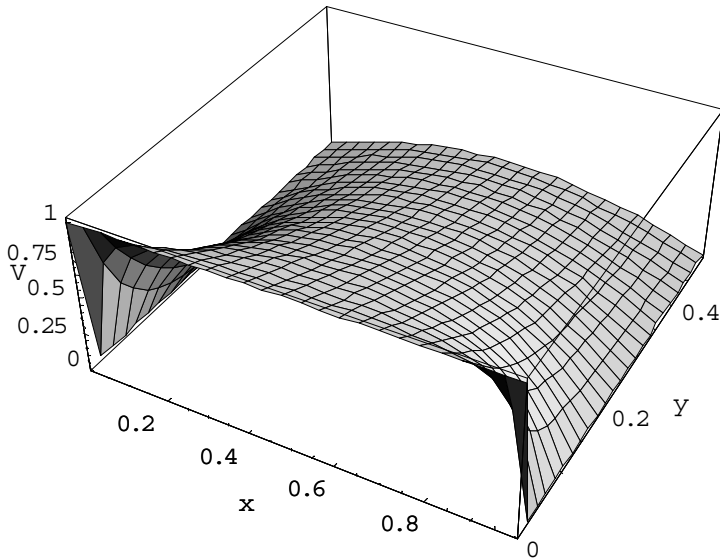
$$\frac{1}{\pi} \left( i V_0 \left( \log \left[ 1 - e^{\frac{i\pi(x+iy)}{a}} \right] - \log \left[ 1 + e^{\frac{i\pi(x+iy)}{a}} \right] - \log \left[ 1 - e^{\frac{\pi(ix+y)}{a}} \right] + \log \left[ 1 - e^{\frac{\pi(ix+y)}{a}} \right] \right) \right)$$

$$\text{potV0} = \text{eq1} // . \{ \log(1 - a \_) \rightarrow \log\left(\frac{1-a}{a+1}\right) \}$$

+ log(a + 1)}// FullSimplify

$$\frac{i V_0 \left( \log \left[ -i \operatorname{Tan} \left[ \frac{\pi(x+iy)}{2a} \right] \right] - \log \left[ \operatorname{Tanh} \left[ \frac{\pi(ix+y)}{2a} \right] \right] \right)}{\pi}$$

**Plot3D[potV0/.a→1/.V0→1  
,{x,0.0001,0.9999},{y,0,0.5},AxesLabel→{ x ,y ,V }];**



**Figure 30**

**C: Example 9: Potential inside a rectangular box with five sides at zero potential**

$$mzRule = \{mz \rightarrow c \sqrt{\frac{m x^2}{a^2} + \frac{m y^2}{b^2}}\};$$

$$\left(\frac{4 V_0 \operatorname{csch}(m z \pi)}{a b} \operatorname{Integrate}\left[\sin\left(\frac{m x \pi x}{x}\right) \sin\left(\frac{m x \pi y}{x}\right),\right.\right.$$

$$\left.\{x \cdot 0 \cdot a\},\{y \cdot 0 \cdot b\}\right]//$$

**Simplify [# , Element[{my , mx} , Integers] ]& ) /.mzRule**

$$\frac{16 V_0 \operatorname{csch}\left[c \sqrt{\frac{m x^2}{a^2} + \frac{m y^2}{b^2}} \pi\right] \sin\left[\frac{m x \pi}{2}\right]^2 \sin\left[\frac{m x \pi}{2}\right]^2}{m x m y \pi^2}$$

$$\operatorname{pot}[n x \_, n y \_]=$$

$$\operatorname{Sum}\left[A[m x \_, m y \_] \sin\left(\frac{m x \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m y \pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{m z \pi z}{c}\right),\right.$$

$$\left.\{m x \_, 1 \cdot n x \_ \},\{m y \_, 1 \cdot n y \_ \}\right] /.mzRule$$

$$\sum_{m x=1}^{n x} \sum_{m y=1}^{n y} \frac{1}{m x m y \pi^2}$$

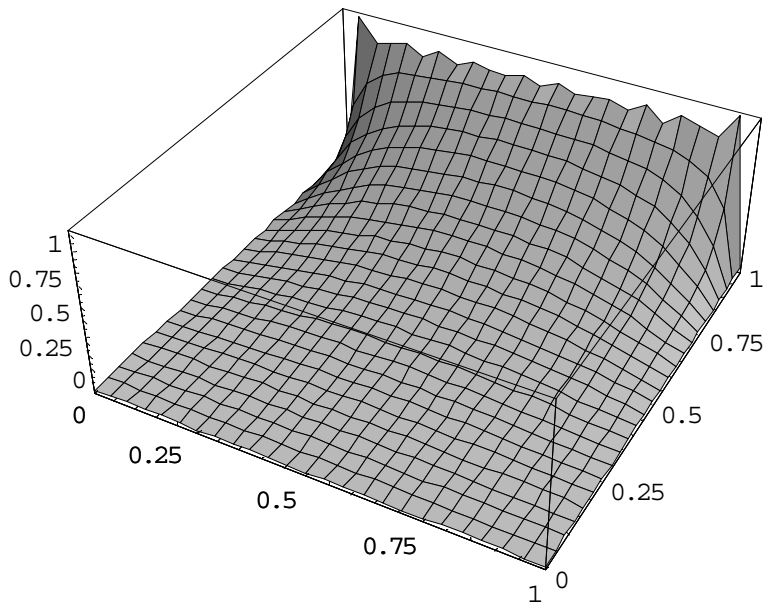
$$\left(\frac{16 V_0 \operatorname{csch}\left[c \sqrt{\frac{m x^2}{a^2} + \frac{m y^2}{b^2}} \pi\right] \sin\left[\frac{m x \pi}{2}\right]^2 \sin\left[\frac{m x \pi}{2}\right]^2}{\sin\left[\frac{m x \pi x}{a}\right] \sin\left[\frac{m y \pi y}{b}\right] \sinh\left[\sqrt{\frac{m x^2}{a^2} + \frac{m y^2}{b^2}} \pi z\right]}\right)$$

**pot[1,1]**

$$\frac{1}{\pi^2} \left( 16 V_0 \operatorname{csch} \left[ \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} c \pi \right] \sin \left[ \frac{\pi x}{a} \right]^2 \sin \left[ \frac{\pi y}{b} \right]^2 \right. \\ \left. \sinh \left[ \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \pi z \right] \right)$$

**values={a→1,b→1,c→1,V0→1,x→1/2};**

**Plot3D[pot[20,20]//.values//Evaluate,{y,0,1},{z,0,1}];**



**Figure 31**

**VEPlot[pot[10,10]//.values//. {x→1/2} //Evaluate,{y,0,1},{z,0,1}];**

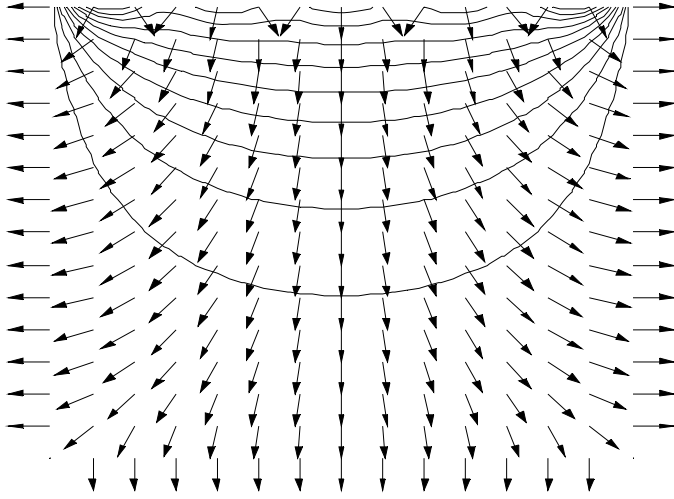


Figure 32



### C: Example 10: Conducting cylinder with a potential on the surface

Needs["Graphics`ParametricPlot3D`"]

A[n\_] =

$$\frac{a^{-n}}{\pi} \left( \text{Integrate} [V0 \sin [n \phi], \{\phi, 0, \pi\}] - \right.$$

$$\left. \text{Integrate} [V0 \sin [n \phi], \{\phi, \pi, 2\pi\}] \right) //$$

Simplify [# , Element [n , Integers] ] &

$$-\frac{2(-1+(-1)^n)a^{-n}V0}{n\pi}$$

potIn [nf\_] := Sum [A [n] Sin [n \phi] r^n , {n , 1 , nf} ] ;

potIn[6]

$$\frac{4rV0\sin[\phi]}{a\pi} + \frac{4r^3V0\sin[3\phi]}{3a^3\pi} + \frac{4r^5V0\sin[5\phi]}{5a^5\pi}$$

eq1= potIn[Infinity]

$$-\frac{1}{\pi} \left( i V0 \left( \text{Log} \left[ 1 + \frac{e^{i\phi} r}{a} \right] - \text{Log} \left[ 1 + \frac{e^{i\phi} r}{a} \right] \text{Log} \left[ 1 - \frac{e^{i\phi} r}{a} \right] + \text{Log} \left[ 1 + \frac{e^{i\phi} r}{a} \right] \right) \right)$$

$$V_{in} = eq1 // . \left\{ \log(1 - aa) \rightarrow \log\left(\frac{1 - aa}{aa + 1}\right) + \log(aa + 1) \right\}$$

// FullSimplify

$$\frac{i V_0 \left( \text{Log} \left[ 1 - \frac{2r}{a e^{i\phi} + r} \right] - \text{Log} \left[ -1 + \frac{2a}{a + e^{i\phi} r} \right] \right)}{\pi}$$

**B[n\_] =**

$$\frac{a^n}{\pi} (\text{Integrate} [V_0 \sin [n\phi], \{\phi, 0, \pi\}] -$$

**Integrate [V\_0 sin [nφ], {φ, π, 2π}] ) //**

**Simplify [# , Element [n , Integers] ] &**

$$\frac{4(-a)^n V_0 \text{Sin} \left[ \frac{n\pi}{2} \right]^2}{n\pi}$$

**potOut [nf\_] := Sum [ B [n] Sin [n φ] r<sup>-n</sup> , {n, 1, nf} ] ;**

**potOut[3]**

$$\frac{4a V_0 \text{Sin}[\phi]}{\pi r} + \frac{4a^3 V_0 \text{Sin}[3\phi]}{3\pi a^3}$$

**Vout =**

**( potOut [ Infinity ] // Simplify ) //**

$$\left\{ \log(1 - aa) \rightarrow \log\left(\frac{1 - aa}{aa + 1}\right) + \log(aa + 1) \right\} // \text{Simplify}$$

$$\frac{i V_0 \left( \text{Log} \left[ \frac{-a e^{i\phi} + r}{-a e^{i\phi} + r} \right] - \text{Log} \left[ \frac{-a + e^{i\phi} r}{a + e^{i\phi} r} \right] \right)}{\pi}$$

```
Off[Plot3D::plnc,Plot3D::gval]
```

```
pt1=Plot3D[ Vin/.a→1/.V0→1 //Evaluate,  
           {φ,0,2π},{r,0,1 },  
           PlotPoints→40,  
           DisplayFunction→Identity];
```

```
pt2=Plot3D[ Vout/.a→1/.V0→1 //Evaluate,  
           {φ,0,2π},{r,1,2 },  
           PlotPoints→40,  
           DisplayFunction→Identity];
```

```
Off[Graphics3D::nlist3]
```

```
Show[{pt1,pt2},DisplayFunction→$DisplayFunction];
```

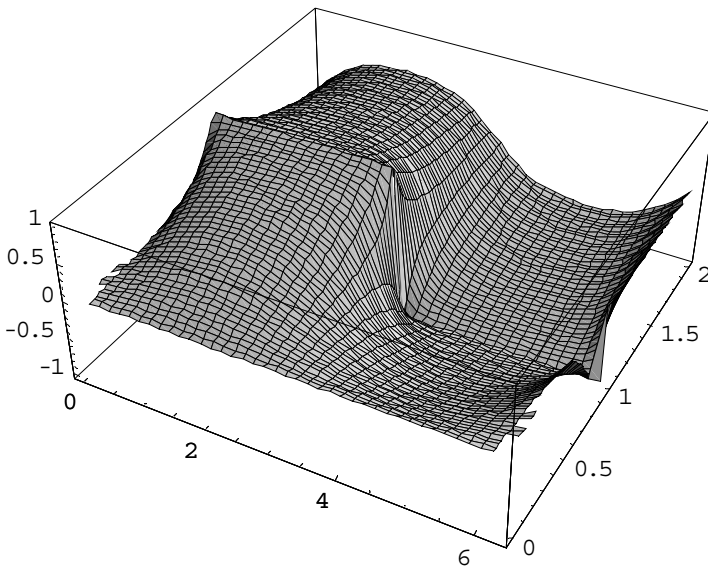


Figure 33

```
Off[ParametricPlot3D::pplr]
```

```
pt3=CylindricalPlot3D[ Vin/.a→1/.V0→1,{r,0,1},{φ,0.01, 0.99 π},
```

```
PlotPoints→20,DisplayFunction→Identity];
```

```
pt4=CylindricalPlot3D[Vout/.a→1/.V0→1,{r,1,1.75},{φ,0.01,0.99 π},  
PlotPoints→20,DisplayFunction→Identity];
```

```
Show[{pt3 ,pt4}, DisplayFunction→ $DisplayFunction ];
```

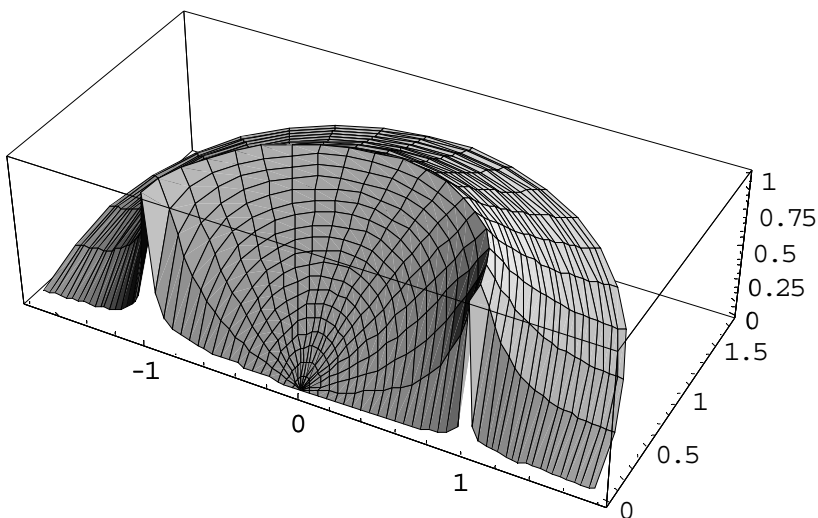


Figure 34

### C: Example 11: Grounded sphere in an electric field

**Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]**

**Needs["Graphics`PlotField`"]**

**Clear["Global`\*"];**

**Asol={ A[1]→-E0 a, A[i\_]→0} ;**

**pot[s\_]:=**

$$\text{Sum} \left[ \left( A(i) \left( \frac{r}{a} \right)^i \left( \frac{a}{r} \right)^{i+1} B(i) \right) \text{LegendreP}[i, \text{Cos}[\theta], \{i, 0, s\}] \right] / . \text{Asol}$$

**Beq[s\_]:=**

$$\text{LogicalExpand} \left[ \left( \text{pot}[s_] / . r \rightarrow a \right) == 0 + o[\text{Cos}[\theta]]^{s+1} \right]$$

**Beq[4]**

$$-\frac{5B[3]}{2} == 0 \ \&\& \ aE0 - B[1] + \frac{3B[3]}{2} == 0 \ \&\&$$

$$-B[0] + \frac{B[2]}{2} - \frac{3B[4]}{8} == 0 \ \&\&$$

$$-\frac{35B[4]}{8} == 0 \ \&\& \ -\frac{3B[2]}{2} + \frac{15B[4]}{4} == 0$$

**Bsol[s\_]:=Solve[Beq[s]]//Flatten ;**  
**Off[Solve::svars]**

**Solve[Beq[6]]//Flatten**

حل مسائل الكترومغناطيس به كمك نرم افزار ممتيكا ١٦٣

$$\{B[1] \rightarrow a E_0, B[0] \rightarrow 0, B[3] \rightarrow 0, B[2] \rightarrow 0, B[5] \rightarrow 0, B[4] \rightarrow 0, B[6] \rightarrow 0\}$$

$$\mathbf{Bsol} = \{B[1] \rightarrow a E_0, B[i_] \rightarrow 0\};$$

potential =

$$\left( \text{Sum} \left[ \left[ A(i) \left( \frac{r}{a} \right)^i \left( \frac{a}{r} \right)^{i+1} B(i) \text{LegendreP}[i, \text{Cos}[\theta], \{i, 0, 3\}] \right] \right] \right) / \text{Asol} / \mathbf{Bsol}$$

$$\left( \frac{a^3 E_0}{r^2} - E_0 r \right) \text{Cos}[\theta]$$

**eField = -Grad[potential, Spherical[r, θ, φ]] // ExpandAll**

$$\left\{ E_0 \text{Cos}[\theta] + \frac{2a^3 E_0 \text{Cos}[\theta]}{r^3}, -E_0 \text{Sin}[\theta] + \frac{a^3 E_0 \text{Sin}[\theta]}{r^3}, 0 \right\}$$

**r2xRule = {r, θ, φ} → CoordinatesFromCartesian[{x, y, z}, Spherical] // Thread;**

$$\mathbf{values} = \{E_0 \rightarrow 1, a \rightarrow 1\};$$

**p1 = VEPlot[potential // .r2xRule // .values // .{y → 0},  
{x, -2.1, 2.1}, {z, -2.1, 2.1},  
DisplayFunction → Identity];**

**disk = Graphics[Disk[{0, 0}, 1]];  
Show[p1, disk, DisplayFunction → \$DisplayFunction];**

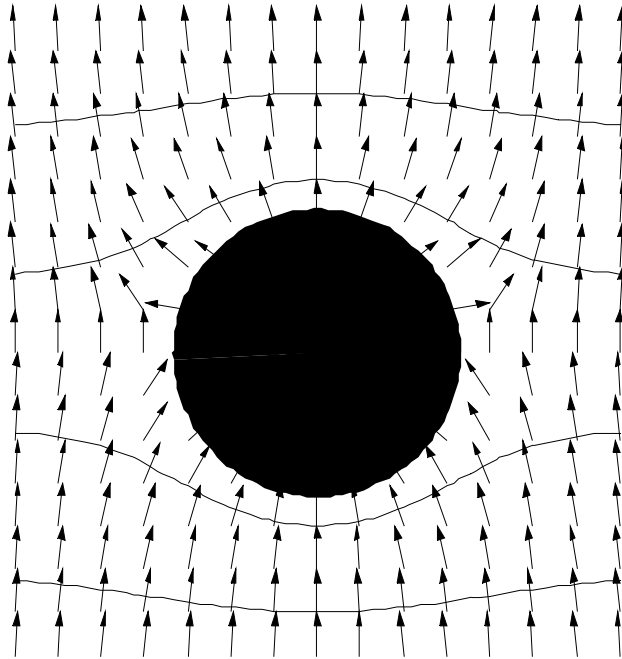


Figure 35

**C: Example 12: Sphere with an axially symmetric charge distribution**

**Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]**

**Needs["Graphics`ParametricPlot3D`"]**

**Clear["Global`\*"];**

$$\text{potInA}[s\_]:= \text{Sum}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^i A[i] \text{LegendreP}[i, \text{Cos}[\theta]], \{i, 0, s\}\right]$$

$$\text{potOutA}[s\_]:= \text{Sum}\left[A[i] \left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} \text{LegendreP}[i, \text{Cos}[\theta]], \{i, 0, s\}\right]$$

**chargeDensity** [s\_]:=

$$\frac{1}{4\pi} (D[\text{potInA}[s], r] - D[\text{potOutA}[s], r]) // .\{r \rightarrow a\}$$

**chargeDensity**[2]//**Apart**

$$\frac{2 A[0] - 5 A[2]}{8 a \pi} + \frac{3 A[1] \text{Cos}[\theta]}{4 a \pi} + \frac{15 A[2] \text{Cos}[\theta]^2}{8 a \pi}$$

**aEquation**[s\_ , Qdensity\_] :=

$$\text{LogicalExpand}[\text{chargeDensity}[s] == \text{Qdensity} + O[\text{Cos}[\theta]]^{s+1}]$$

**aRule**[s\_ , Qdensity\_] := **Solve**[**aEquation**[s, Qdensity], **Array**[**A**, s+1, 0]]//**Flatten**

$$\text{aRule}[4, \frac{Q \cos^2(\theta)}{a^2}]$$



$$\{ A[0] \rightarrow \frac{4\pi Q}{3a}, A[1] \rightarrow 0, A[2] \rightarrow \frac{8\pi Q}{15a},$$

$$A[3] \rightarrow 0, A[4] \rightarrow 0 \}$$

$$\text{potInA}[4] /. \text{aRule}[4, \frac{Q \cos^2(\theta)}{a^2}]$$

$$\frac{4\pi Q}{3r} + \frac{8a^2 \pi Q \left( -\frac{1}{2} + \frac{3\cos(\theta)^2}{2} \right)}{15r^3}$$

$$\text{surfaceQ} = \frac{Q \left( \frac{\cos^2(\theta)}{2} + \cos(\theta) \right)}{a^2} // \text{Expand}$$

$$\frac{Q \cos[\theta]}{a^2} + \frac{Q \cos[\theta]^2}{2a^2}$$

$$\text{potOutQ} = \text{potOutA}[8] // . \text{aRule}[8, \text{surfaceQ}]$$

$$\frac{2\pi Q}{3r} + \frac{4a\pi Q \cos[\theta]}{3r^2} + \frac{4a^2 \pi Q \left( -\frac{1}{2} + \frac{3\cos[\theta]^2}{2} \right)}{15r^3}$$

$$\text{values} = \{Q \rightarrow 1, a \rightarrow 1\};$$

$$\text{p1} = \text{CylindricalPlot3D}[\text{potInQ} // . \text{values}, \{r, 0, 1\}, \{\theta, 0, 2\pi\}, \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{Identity}];$$

$$\text{p2} = \text{CylindricalPlot3D}[\text{potOutQ} // . \text{values}, \{r, 1, 3\}, \{\theta, 0, 2\pi\}, \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{Identity}];$$

$$\text{Show}[\text{p1}, \text{p2},$$

**AxesLabel**→{a,b,c},  
**ViewPoint**→{-1.5,-2,2},  
**BoxRatios**→{1,1,1},**DisplayFunction**→\$DisplayFunction];

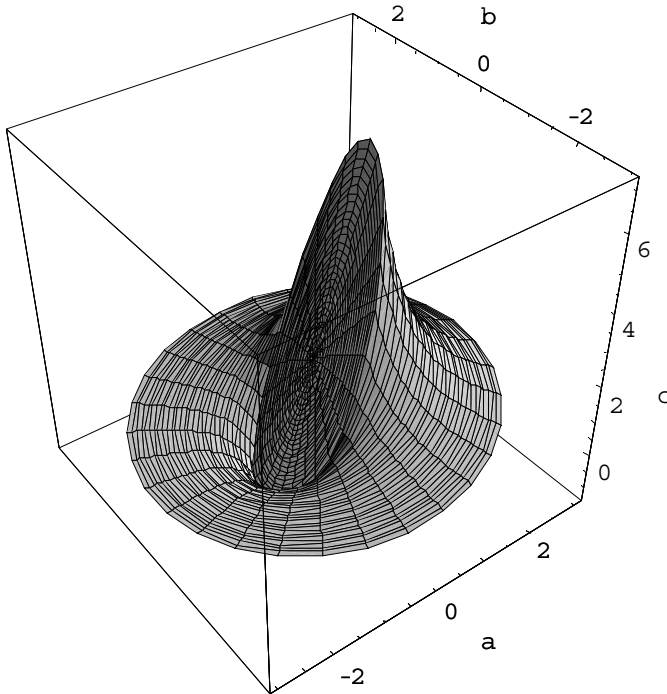


Figure 36

**r2xRule**={r,θ,φ}→CoordinatesFromCartesian[{x,y,z},Spherical]  
 // Thread;

(\*for 0<r<1\*)

eq1[y\_,z\_]=potInQ/.r2xRule/.{Q→1,a→1,x→0} //Simplify;

(\* for 1<r \*)

eq2[y\_,z\_]=potOutQ/.r2xRule/.{Q→1,a→1,x→0} //Simplify;

pot[y\_,z\_] := If [  $y^2 + z^2 < 1$  , eq<sup>2</sup>[y,z] ]

```
circle={Thickness[0.02],Circle[{0,0},1]} //Graphics;  
Show[{VEPlot[pot[y,z],{y,-2,2},{z,-2,2} , DisplayFunction  
→ Identity], circle},  
DisplayFunction→$DisplayFunction];
```

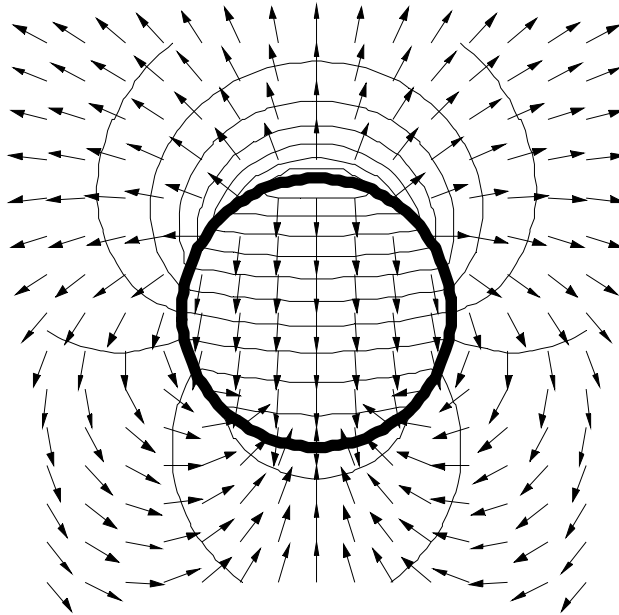


Figure 37

**C: Example 13: Sphere with a given axially symmetric Potential**

```
Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]
```

**Needs["Graphics`ParametricPlot3D`"]**

**Null**

**Clear["Global`\*"];**

$$\text{potIn}[V\_ , s\_ ] := \text{Sum}\left[\left(\frac{r}{r0}\right)^n B(V \cdot n) P[n, \text{Cos}[\theta]], \{n, 0, s\}\right]$$

$$\text{potOut}[V\_ , s\_ ] := \text{Sum}\left[\left(\frac{r}{r0}\right)^{n+1} B(V \cdot n) P[n, \text{Cos}[\theta]], \{n, 0, s\}\right]$$

**B[V\\_ , s\\_ ] :=**

$$\frac{1}{2}(2n+1) \text{Integrate}[V \text{LegendreP}[n, \text{Cos}[\theta]] \cdot \text{Sin}[\theta], \{\theta, 0, \pi\}]$$

$$\text{pOut} = \text{potOut} [ V0 \text{Cos}[\theta]^2, 4 ]$$

$$\frac{r0 V0 P[0, \text{Cos}[\theta]]}{3r} + \frac{2r0^3 V0 P[2, \text{Cos}[\theta]]}{3r^3}$$

$$\text{pOut} = \text{potOut} [ V0 \text{Cos}[\theta]^2, 4 ]$$

$$\frac{1}{3} V0 P[0, \text{Cos}[\theta]] + \frac{2r0^3 V0 P[2, \text{Cos}[\theta]]}{3r0^2}$$

**values={r0→1,V0→1,P→LegendreP};**

**p1=CylindricalPlot3D[pIn/.values,{r,0,1},{θ,0,2π},  
DisplayFunction→Identity];**

```
p2=CylindricalPlot3D[pOut/.values,{r,1,3},{θ,0,2π},
DisplayFunction→Identity];
```

```
Show [p1, p2, BoxRatios → {1,1,1},ViewPoint→{-1.5,-2,2} ,
DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

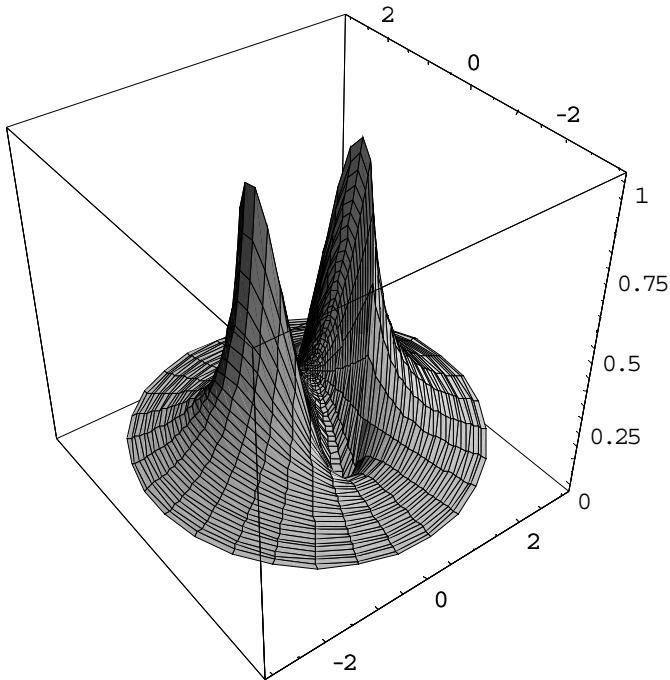


Figure 38

$$\text{surfacePot} = \frac{\cos(\theta)}{1.1 - \cos(\theta)};$$

```
{pIn2,pOut2} = ({potIn[surfacePot,3] , potOut[surfacePot,3]}/.
P → LegendreP //.{r0→1} // Simplify);
```

```
p1= CylindricalPlot3D [pIn2,{r,0,1},{θ,0,2π} , PlotRange →
All,DisplayFunction→Identity];
```

```
p2= CylindricalPlot3D [pOut2,{r,1,3},{θ,0,2π} , PlotRange  
→ All,DisplayFunction→Identity];
```

```
Show[p1,p2,  
BoxRatios→{1,1,1},  
ViewPoint→{-1.5,-2,2},DisplayFunction→$DisplayFunction];
```

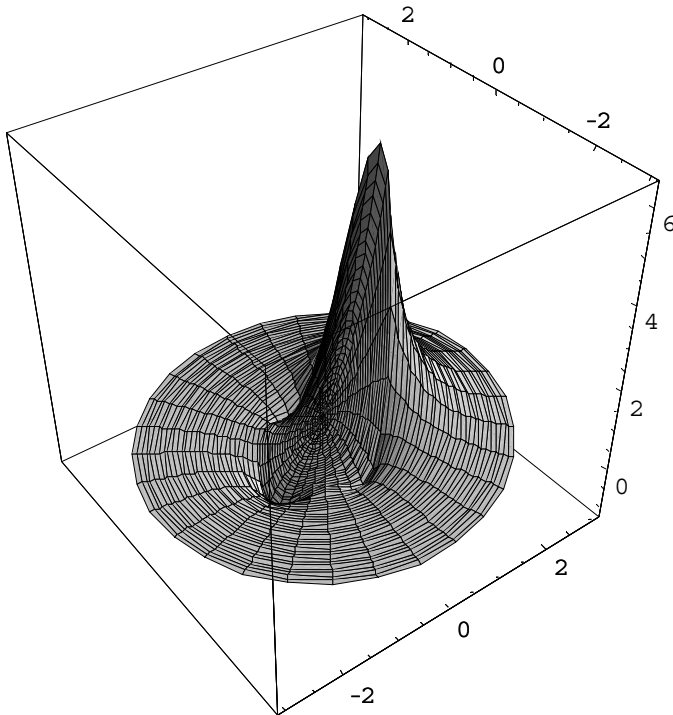


Figure 39

**C: Example 14: Sphere with upper hemisphere  $V_0$  and lower hemisphere  $-V_0$**

Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

**Needs["Graphics`ParametricPlot3D`"]**

**Clear["Global`\*"];**

$$\text{potIn}[s\_]:= \text{Sum}\left[\left(\frac{r}{r0}\right)^n B(n) P[n, \text{Cos}[\theta]], \{n, 0, s\}\right]$$

$$\text{potOut}[s\_]:= \text{Sum}\left[\left(\frac{r0}{r}\right)^{n+1} B(n) P[n, \text{Cos}[\theta]], \{n, 0, s\}\right]$$

**B[n\_]:=**

$$\frac{1}{2}(2n+1)$$

**(+Integrate[V0 LegendreP[n, Cos[θ]], Sin[θ],**

**{θ, 0, π}] +**

**Integrate[-V0 LegendreP[n, Cos[θ]], Sin[θ],**

**{θ, π/2, π}]) ;**

**potOut[5]**

$$\frac{3r0^2 V0 P[1, \text{Cos}[\theta]]}{2r^2} - \frac{7r0^4 V0 P[3, \text{Cos}[\theta]]}{8r^4} +$$

$$\frac{11 r0^6 V0 P[5, \text{Cos}[\theta]]}{16 r^6}$$

**values={r0→1, V0→1, x->0};**

**r2xRule = {r, θ, φ} → CoordinatesFromCartesian [{x, y, z}, Spherical] // Thread;**

**allRules= {P→LegendreP, r2xRule, values} // Flatten ;**

```
eq1= potIn[11]//.allRules;  
eq2=potOut[11]//.allRules;  
potTot = If [  $y^2 + z^2 \leq 1$  , eq1 , eq2 ] ;  
circle=Graphics[{Thickness[0.02],Circle[{0,0},1]}];  
Show[{  
ContourPlot[potTot//Evaluate,  
{y,-2,2},{z,-2,2},  
PlotPoints→20,  
DisplayFunction→Identity],  
circle},  
DisplayFunction→$DisplayFunction];
```

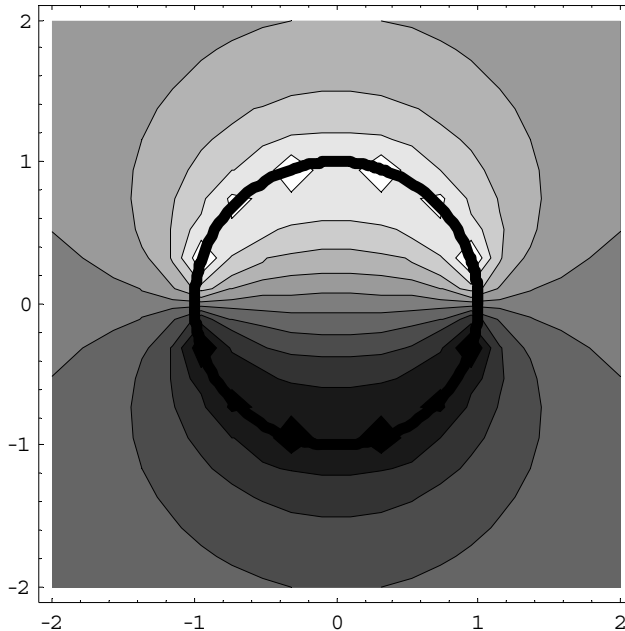


Figure 40  
C: Example 15: Motion of a Charged Particle in a Uniform B Field

```
Clear["Global`*"];
```



acceleration={x''[t],y''[t],z''[t]};  
 velocity={x'[t],y'[t],z'[t]};  
 magneticField={0,0,B};

eq1=acceleration==q/m Cross[velocity,magneticField]//Thread

$$\left\{ x''[t] == \frac{Bq y'[t]}{m}, y''[t] == -\frac{Bq x'[t]}{m}, z''[t] == 0 \right\}$$

eq1=eq1/.{B→m/q ω}

$$\{ x''[t] == \omega y'[t], y''[t] == -\omega x'[t], z''[t] == 0 \}$$

initial={  
 x[0]==0,x'[0]==v0x,  
 y[0]==0,y'[0]==v0y,  
 z[0]==0,z'[0]==v0z};

dsol=DSolve[Join[{eq1,initial}],{x[t],y[t],z[t]},t]  
 //Flatten//FullSimplify

$$\{ x[t] \rightarrow \frac{V0y - V0y \cos[t \omega] + V0x \sin[t \omega]}{16 r^6},$$

$$y[t] \rightarrow \frac{V0x (-1 + \cos[t \omega] + V0y \sin[t \omega])}{16 r^6}, z[t] \rightarrow t V0z \}$$

values={B→m/q ω, ω→1,v0x→1,v0y→1,v0z→1/10};

plot1=  
 ParametricPlot3D[{x[t],y[t],z[t]},{Thickness[0.02]}/.dsol/.values  
 //Evaluate,  
 {t,0,8π},  
 PlotPoints→100];

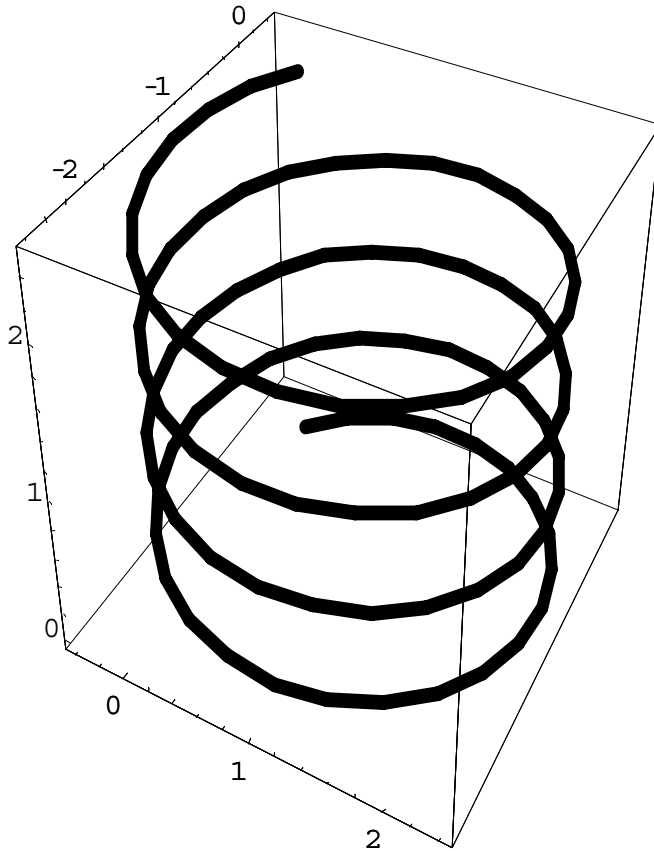


Figure 41

```
Needs["Graphics`PlotField3D`"]
```

```
plot2=PlotVectorField3D[ {0,0,1} // Evaluate,  
  {x,-2,2},{y,-2,2},{z,0,2},  
  VectorHeads→True ,  
  PlotPoints→4  
  ];
```

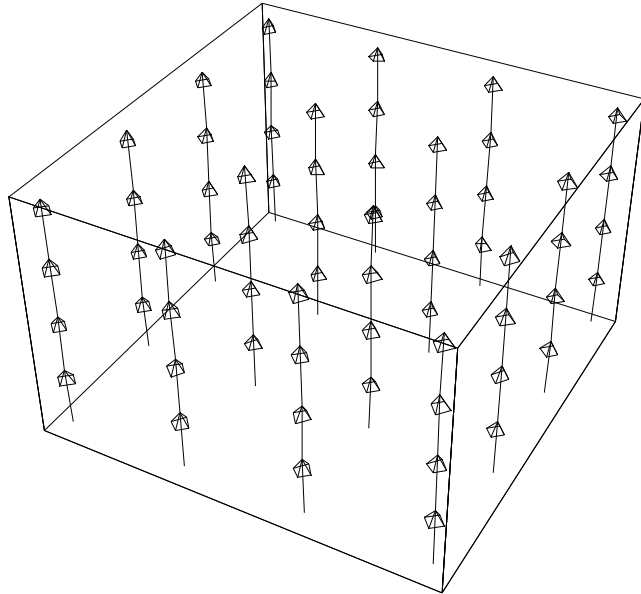


Figure 42

Show[plot1,plot2];

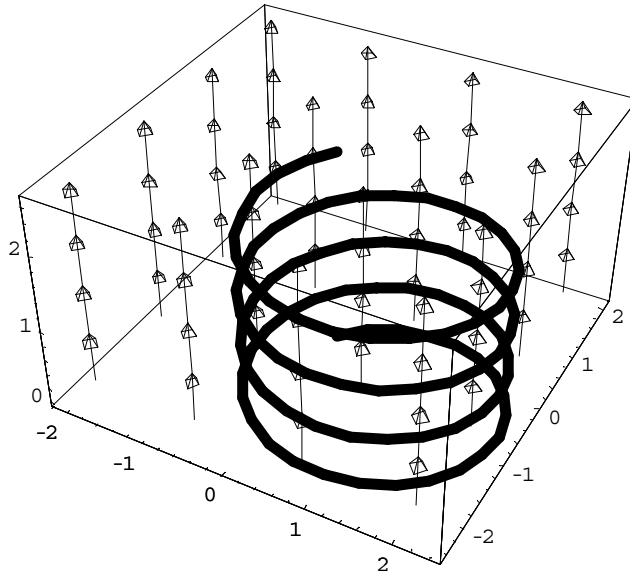


Figure 43

### C: Example 15: Motion of a Charged Particle in a Uniform B Field and Time Varying E Field

Clear["Global`\*"];

Null

$\mathbf{F}=\{\mathbf{F}_x,\mathbf{F}_y,\mathbf{F}_z\};$   
 $\mathbf{r}=\{\mathbf{x}[t],\mathbf{y}[t],\mathbf{z}[t]\};$   
 $\mathbf{EF}=\{\mathbf{E}_x,\mathbf{E}_y,\mathbf{E}_z\};$   
 $\mathbf{BF}=\{\mathbf{B}_x,\mathbf{B}_y,\mathbf{B}_z\}; \mathbf{v}=\mathbf{D}[\mathbf{r},t]$

$\{ \mathbf{x}'[t] \cdot \mathbf{y}'[t] \cdot \mathbf{z}'[t] \}$

$\mathbf{F}=\mathbf{q} \mathbf{EF}+\mathbf{q} \text{Cross}[\mathbf{v},\mathbf{BF}]$

$\{\mathbf{E}_x\mathbf{q} + \mathbf{q}(\mathbf{B}_z \mathbf{y}'[t] - \mathbf{B}_y \mathbf{z}'[t])\},$

$\mathbf{E}_y\mathbf{q} + \mathbf{q}(-\mathbf{B}_z \mathbf{x}'[t] + \mathbf{B}_x \mathbf{z}'[t]) \cdot \mathbf{E}_z\mathbf{q} + \mathbf{q}(\mathbf{B}_y \mathbf{x}'[t] + \mathbf{B}_x \mathbf{y}'[t])\}$

$\mathbf{eq1}=\mathbf{F}-\mathbf{m} \mathbf{D}[\mathbf{r},\{t,2\}] \quad \mathbf{0} //\text{Thread};$   
 $\mathbf{eq1} //\text{ColumnForm}$

$\mathbf{E}_x\mathbf{q} + \mathbf{q}(\mathbf{B}_z \mathbf{y}'[t] - \mathbf{B}_y \mathbf{z}'[t]) - \mathbf{m} \mathbf{x}''[t] == \mathbf{0}$

$\mathbf{E}_y\mathbf{q} + \mathbf{q}(-\mathbf{B}_z \mathbf{x}'[t] + \mathbf{B}_x \mathbf{z}'[t]) - \mathbf{m} \mathbf{y}''[t] == \mathbf{0}$

$\mathbf{E}_z\mathbf{q} + \mathbf{q}(\mathbf{B}_y \mathbf{x}'[t] + \mathbf{B}_x \mathbf{y}'[t]) - \mathbf{m} \mathbf{z}''[t] == \mathbf{0}$

$\mathbf{initial}=\{\mathbf{x}[0]==\mathbf{0},\mathbf{x}'[0]==\mathbf{0},$   
 $\mathbf{y}[0]==\mathbf{0},\mathbf{y}'[0]==\mathbf{0},$   
 $\mathbf{z}[0]==\mathbf{0},\mathbf{z}'[0]==\mathbf{0}\};$

$\mathbf{fields}=\text{Thread} /@ \{\mathbf{BF} \rightarrow \{\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m} \omega \mathbf{0}/\mathbf{q}\}, \mathbf{EF} \rightarrow \{\mathbf{E0} \text{Cos}[\omega t], \mathbf{0}, \mathbf{0}\}\}$   
 $//\text{Flatten}$

$$\{ B_x \rightarrow 0, B_y \rightarrow 0, B_z \rightarrow \frac{m\omega_0}{q}, E_x \rightarrow E_0 \cos[t\omega], E_y \rightarrow 0, E_z \rightarrow 0 \}$$

**eqs=Join[eq1,initial]/.fields**

$$\{ E_0 q \cos[t\omega] + m\omega y'[t] - m x''[t] == 0,$$

$$-m\omega_0 x'[t] - m y''[t] == 0, -m z''[t] == 0, x[0] == 0,$$

$$x'[0] == 0, y[0] == 0, y'[0] == 0, z[0] == z'[0] == 0 \}$$

**dsol=DSolve[eqs,{x[t],y[t],z[t]},t]//Flatten//FullSimplify**

$$\{ x[t] \rightarrow \frac{E_0 q (\cos[t\omega] - \cos[t\omega_0])}{m(-\omega^2 + \omega_0^2)},$$

$$y[t] \rightarrow \frac{E_0 q \omega_0 \sin[t\omega] - E_0 q \omega \sin[t\omega_0]}{m\omega^3 - m\omega\omega_0^2}, z[t] \rightarrow 0 \}$$

**values={m→1,E0→1,ω0→1,q→1};**

**point[t\_,ω\_]={x[t],y[t],z[t]}/.dsol/.values**

$$\left\{ \frac{-\cos[t] + \cos[t\omega]}{1 - \omega^2}, \frac{-\omega \sin[t] + \sin[t\omega]}{-\omega + \omega^3}, 0 \right\}$$

**point[t\_,1]=Limit[point[t,ω],ω→1]**

$$\left\{ \frac{1}{2} t \sin[t], \frac{1}{2} (t \cos[t] - \sin[t]), 0 \right\}$$

**point[t\_,0]=Limit[point[t,ω],ω→0]**  
 $\{ 1 - \cos[t], -t + \sin[t], 0 \}$

```
plot[ω_]:=ParametricPlot[ point[t,ω][[1,2]] //Evaluate,{t,0,20 π },
    PlotLabel→ω,
    Ticks→None,
    DisplayFunction→Identity];
```

```
table=Table[ plot[ω],{ω,0,4,1/3}];
```

```
Show[GraphicsArray[Partition[table,3]]];
```

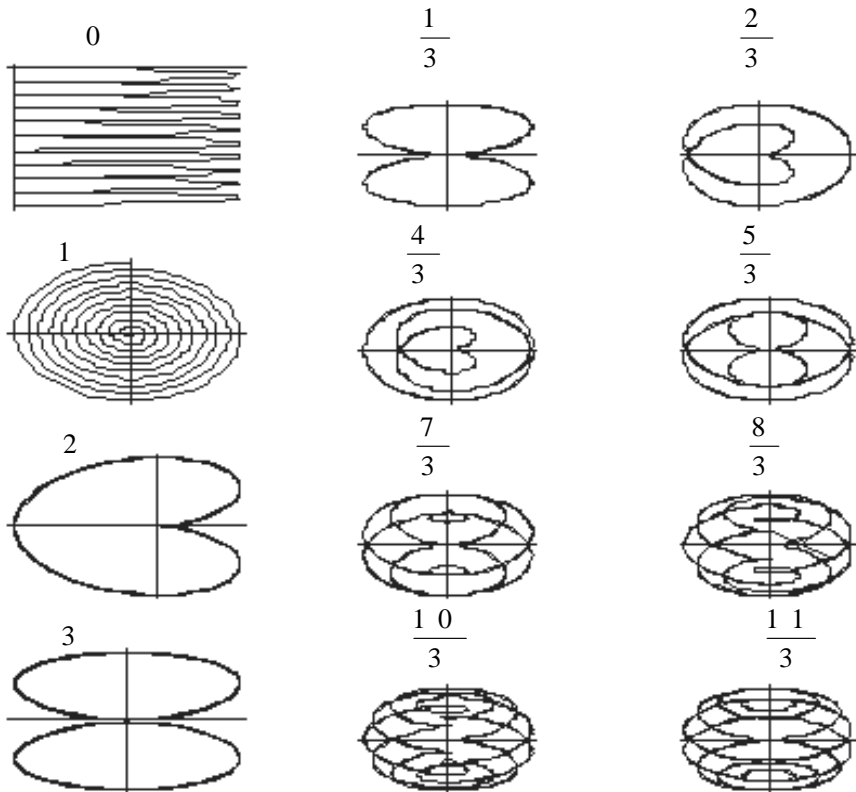


Figure 44



خواننده محترم

این پرسشنامه به منظور ارتقای کیفیت کتابهای درسی و رفع نواقص آنها تهیه شده است. دقت شما در پاسخگویی به این پرسشنامه در پایان هر نیمسال ما را در تحقق این هدف یاری خواهد کرد.

نام کتاب ..... نام مؤلف/مترجم ..... سال انتشار .....  
 وضعیت پاسخگو: عضو علمی پیام نور  عضو علمی سایر دانشگاهها  رشته تخصصی ..... سابقه تدریس .....  
 دانشجوی پیام نور  دانشجوی سایر دانشگاهها  رشته تحصیلی ..... ورودی سال .....

سؤال	خیلی زیاد	زیاد	کم	بسیار کم
۱. آیا از زمان تحویل و نحوه دسترسی به کتاب راضی بودید؟				
۲. آیا حجم کتاب با توجه به تعداد واحد مناسب بود؟				
۳. آیا راهنماییهای لازم برای مطالعه کتاب منظور شده بود؟				
۴. آیا در ترتیب مطالب کتاب سلسله مراتب شناختی (آسان به مشکل) رعایت شده بود؟				
۵. آیا تقسیم بندی مطالب در فصلها یا بخشها متناسب و بجا بود؟				
۶. آیا متن کتاب روان و ساده و جملهها قابل فهم بود؟				
۷. آیا به روز بودن مطالب و آمارها رعایت شده بود؟				
۸. آیا مطالب تکراری داشت؟				
۹. آیا پیوستگی مطالب با درسهای پیش نیاز رعایت شده بود؟				
۱۰. آیا مثالها، شکلها، نمودارها، جدولها و ... گویا بودند و در فهم مطلب تأثیر داشتند؟				
۱۱. مطالعه هدفهای کلی، آموزشی/ رفتاری تا چه اندازه به درک بهتر شما کمک کرد؟				
۱۲. آیا خودآزماییهای کتاب به گونه ای بود که تمام مطالب درسی را شامل شود؟				
۱۳. آیا پاسخ خودآزماییها و تمرینها کامل و گویا بود؟				
۱۴. چقدر با غلطهای املائی و اشکالهای چاپی مواجه شدید؟				
۱۵. کیفیت چاپ و صحافی کتاب چگونه بود؟				
۱۶. آیا طرح روی جلد کتاب مناسب بود؟				
۱۷. چنانچه از وسایل کمک آموزشی از قبیل نوار، فیلم، لوح فشرده و ... استفاده کرده اید، آیا به درک بهتر شما کمک کرده است؟				
۱۸. تا چه اندازه این کتاب شما را از حضور در کلاس بی نیاز کرد؟				

لطفاً چنانچه با اشکالهای تایپی یا محتوایی و مطالب تکراری مواجه شده اید، فهرستی از آنها را با ذکر شماره صفحه ضمیمه کنید.

در مجموع کتاب را چگونه ارزیابی می کنید؟ عالی  خوب  متوسط  ضعیف   
 در صورت تمایل سایر پیشنهادهای خود را بنویسید.

این پرسشنامه را پس از تکمیل از کتاب جدا کنید و به قسمت آموزش مرکز تحویل دهید یا مستقیماً به نشانی تهران ۱۹۵۶۹ - صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی کتاب ارسال فرمایید.

با تشکر

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی



