باشگاه مهندسان سمنان

حل المسائل الکترومغناطیس چنگ

www.sem-eng.com

تهیه کتاب : عارف ناصری

اسکن: محمدرضا خالصی

ارسال: ایمان شریعت پناهی

فصل پنجم و ششم: جریان های الکتریکی دائم و میدان مغناطیسی ساکن

۵

پاسخ به مسائل فصل پنجم

جریانهای الکتریکی دائم

فصل ۵

۱.۵ جریانهای الکتریکی دائم

مسئله ۱: فرض کنید S، سطح الکترودهای دیود خلأ با بار فضائی محدود شدهٔ شکل ۵ـ۲ باشد، مطلوب است:

الف) $V(y)$ و $E(y)$ در ناحیه بین الکترودها

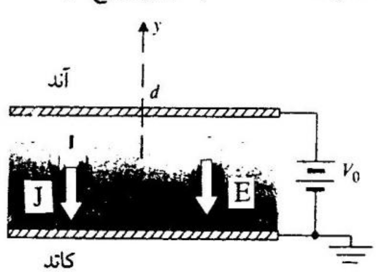
ب) کل مقدار بار در ناحیه بین الکترودها

پ) کل بار سطحی روی کاتد و آند

ت) زمان گذر یک الکترون از کاتد به آند به ازای $V_\circ = ۲۰۰(V)$ و $d = ۱(cm)$

پاسخ قسمت الف)

به مثال (۵ـ۱) حل شده در صفحه ۲۴۰ کتاب درسی رجوع کنید.



شکل ۵.۱ مسئله ۱

با توجه به رابطه (۵ـ۱۶) داریم :

$$V^{-1/4}dV = 2\sqrt{\frac{J}{\epsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}dy \Rightarrow \frac{4}{3}V^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\frac{J}{\epsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}y + c \qquad (1)$$

$$(y = 0 \Rightarrow V = 0) \Rightarrow c = 0$$

$$(y = d \Rightarrow V = V_0) \Rightarrow \frac{4}{3}V_0^{3/4} = 2\sqrt{\frac{J}{\epsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}d \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) $\Rightarrow \begin{cases} V(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{J}{\epsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}y^{4/3} \\ V_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{J}{\epsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}d^{4/3} \end{cases}$

$$\Rightarrow V = V_0\left(\frac{y}{d}\right)^{4/3}$$

$$E = -\nabla V = -\frac{dV}{dy}$$

$$E = -\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{J}{\epsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}\left(\frac{4}{3}\right)y^{1/3}$$

$$= -\frac{V_0}{(d^{4/3})}\left(\frac{4}{3}\right)y^{1/3} = -\frac{4V_0}{3d}\left(\frac{y}{d}\right)^{1/3}a_y$$

$$\Rightarrow \boxed{E(y) = -\left(\frac{4V_0}{3d}\right)\left(\frac{y}{d}\right)^{1/3}}$$

پاسخ قسمت ب

طبق معادله پواسون داریم :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\epsilon_0\nabla^2 V = \epsilon_0\nabla\cdot E = -\frac{4\epsilon_0 V_0}{9d^2}\left(\frac{y}{d}\right)^{-2/3} = \rho$$

Q(کلّ مقدار بار) $= \int_v \rho\cdot dV = \iint dxdz\int \rho dy$

(دقّت کنید چون ρ فقط تابعی از y است، توانستیم انتگرال سه گانه را تفکیک کنیم.)

$$\iint dxdz = S\ ,\ \int\rho dy = \frac{-4\epsilon_0 V_0}{9d^2}\int_0^d\left(\frac{y}{d}\right)^{-2/3}dy$$

$$= \frac{-4\epsilon_0 V_0}{9d^{4/3}}[3y^{1/3}|_0^d] = \frac{-4\epsilon_0 V_0}{3d}$$

$$\Rightarrow Q = S\times\left(-\frac{4\epsilon_0 V_0}{3d}\right) = -\left(\frac{4V_0}{3d}\right)\epsilon_0 S$$

پاسخ قسمت پ

ρ_s(در آند) $= \epsilon_0 E$(در آند)$(-a_y)$

E(در آند) $= E(d) = \left(-\frac{4}{3}\frac{V_0}{d}\right)(-a_y)$

$$\Rightarrow \rho_s = \frac{4V_0}{3d}\epsilon_0 \xRightarrow{Q=\rho_s\times S} Q = \left(\frac{4V_0\epsilon_0 S}{3d}\right) = -Q$$

ρ_s(در کاتد) $= \epsilon_0 E$(در کاتد)

ρ_s(در کاتد) $= 0 \Rightarrow \rho_s = 0 \Rightarrow Q' = 0$

پاسخ قسمت ت

رابطه (۵ـ۱۲) بیان می‌دارد که :

$$u = \left(\frac{2e}{m}V\right)^{1/2}$$

نیز داریم : $V = V_0\left(\frac{y}{d}\right)^{4/3}\ ,\ \frac{dy}{dt} = u$

روابط فوق نتیجه می‌دهند : $u = \left(\frac{2eV_0}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{y}{d}\right)^{2/3}$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{2eV_0}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{y}{d}\right)^{2/3} \Rightarrow \frac{d^{2/3}y^{-2/3}dy}{\left(\frac{2eV_0}{m}\right)^{1/2}} = dt$$

$$\Rightarrow t = \frac{3d}{\left(\frac{2ev_0}{m}\right)^{1/2}}$$

حال داریم : $d = 0/01, c = 1/603\times 10^{-19}, m = 9/107\times 10^{-31}, V_0 = 200$

$$\Rightarrow t = \frac{3(0/01)}{\left(\frac{2\times 1/606\times 10^{-19}\times 200}{9/107\times 10^{-31}}\right)^{\frac{1}{2}}} = 3/57\times 10^{-9} = 3/57$$ نانو ثانیه

مسئله ۲: از قانون اهم مطابق معادله (۵ـ۲۶) در مورد مقاومتی به طول l، رسانندگی σ و سطح مقطع یکنواخت S، شروع کرده شکل نقطه‌ای قانون اهم نشان داده شده در معادله (۵ـ۲۱) را تحقیق نمایید.

صورت معادلات (۵ـ۲۶) و (۵ـ۲۱) بترتیب بصورت زیر می‌باشند :

$$J=\delta\cdot E\ ,\ V_{12}=(\frac{l}{\delta s})I=RI$$

$$V=(\frac{l}{\delta S})I\Rightarrow\int_1^2 E\cdot dl=(\frac{l}{\delta S})\int J dS\Rightarrow El=(\frac{l}{\delta S})J\cdot S$$

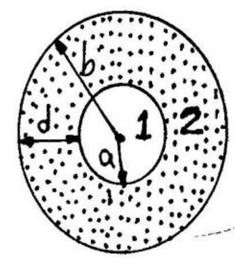
$$\Rightarrow E=\frac{J}{\delta}\Rightarrow\boxed{J=\delta\cdot E}$$

مسئله ۳: سیم طویل مدوری به شعاع a و رسانندگی σ با ماده‌ای با رسانندگی $0/1\sigma$ پوشانیده شده است.

الف) ضخامت پوشش چقدر باید باشد تا اینکه مقاومت در واحد طول سیم بدون پوشش به اندازه ۵۰٪ کاهش یابد؟

ب) با فرض جریان کل I در سیم پوشش‌دار، J و E را هم در هسته و هم در ماده پوشش دهنده پیدا کنید.

پاسخ قسمت الف)



شکل ۵.۲ مسئله ۳ـ مقطع عرضی سیم طویل مدوّر با پوشش

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\delta_1S_1}{l_1}+\frac{\delta_2S_2}{l_2}$$

چون در واحد طول لذا : $l_1=l_2=1$

$$\Rightarrow\frac{1}{R}=\delta_1S_1+\delta_2S_2\Rightarrow R=\frac{1}{\delta_1S_1+\delta_2S_2}$$

$$=\frac{1}{\pi a^2\delta+(\pi b^2-\pi a^2)(0/1\delta)}=\frac{1}{\pi\delta(0/9a^2+0/1b^2)}=R$$

مقاومت سیم بدون پوشش R' :

$$R'=\frac{l_1}{\delta_1S_1}=\frac{1}{\delta_1S_1}=\frac{1}{\delta\pi a^2}$$

بنا به خواسته مسئله $R=\frac{1}{2}R'$ لذا :

$$\frac{1}{\pi\delta(0/9a^2+0/1b^2)}=\frac{1}{2\pi\delta a^2}\Rightarrow b=3/32a$$

$$d=b-a=3/32a-a=(3/32-1)a\Rightarrow d=2/32a$$

پاسخ قسمت ب)

$$I_1=J_1S_1\Rightarrow I_1=J_1(\pi a^2)$$

$$I_2=J_2S_2\Rightarrow I_2=J_2(\pi b^2-\pi a^2)$$

$$\Rightarrow I_2=J_2(\pi(3/32a)^2-\pi a^2)\ ,\ 3/33\simeq\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}I_2=J_2(10\pi a^2)\\ I_1=J_1(\pi a^2)\end{cases}\qquad(*)$$

$$I=I_1+I_2\Rightarrow I=\pi a^2(J_1+10J_2)\qquad(**)$$

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{G_1}{G_2}=\frac{(\pi a^2)\delta}{(10\pi a^2)(0/1\delta)}=1\Rightarrow I_1=I_2=\frac{I}{2}\qquad(***)$$

$$(*),(***)\Rightarrow J_1=10J_2\overset{(**)}{\Rightarrow}\begin{cases}J_1=\dfrac{I}{2\pi a^2}\\ J_2=\dfrac{I}{20\pi a^2}\end{cases}$$

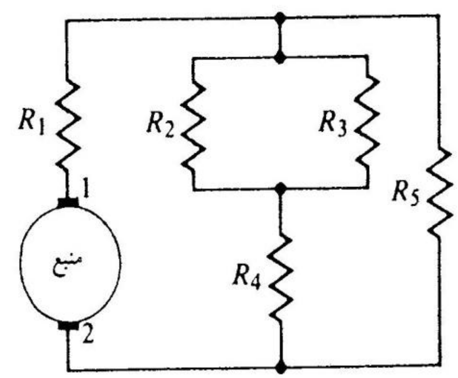
$$\begin{cases} J_1 = \delta E = \dfrac{I}{2\pi a^2} \Rightarrow E = \dfrac{I}{2\pi\delta a^2} \\ J_2 = (0/1\delta)E = \dfrac{I}{20\pi a^2} \Rightarrow E = \dfrac{I}{2\pi\delta a^2} \end{cases}$$

مسئله ۴ : جریان و حرارت تلف شده در هر کدام از پنج مقاومت شبکه نشان داده شده در شکل ۵ـ۹ را پیدا کنید اگر

$$R_1 = \frac{1}{3}(\Omega) \ , \ R_2 = 20(\Omega) \ , \ R_3 = 30(\Omega) \ , \ R_4 = 8(\Omega) \ , \ R_5 = 10(\Omega)$$

و اگر منبع موجود، یک مولد ولتاژ $d-c$ ایده‌ال $(V)\ 0/7$ باشد، که قطب مثبت آن در سرا می‌باشد.

کل مقاومت دیده شده توسط منبع در دوسر ۱ و ۲ چقدر است؟



شکل ۵.۳ مسئله ۴

مقاومتهای R_2, R_3 موازی هستند که معادلشان بصورت $\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$ می‌باشد. این مقاومت معادل، با R_4 سری است که روی هم $(R_4 + \frac{R_2+R_3}{R_2+R_3})$ را نتیجه می‌دهند. مقاومت معادل اخیر نیز اوّل با R_5 موازی است سپس معادل ایندو با R_1 سری است لذا مقاومت معادل کلّ دیده شده توسط

منبع برابر است با :

$$R = \left(\frac{(R_4 + \dfrac{R_2R_3}{(R_2+R_3)})(R_5)}{\dfrac{R_2R_3}{(R_2+R_3)} + R_4 + R_5}\right) + R_1$$

با جاگذاری مقادیر داده شده برای مقاومتهای R_1 تا R_5 نتیجه می‌شود:

$$R = 7\Omega \quad (\text{اهم})$$

$$\begin{cases} V = R\cdot I \\ R = 7, V = 0/7 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{0/7}{7} = 0/1(A)$$

$$P = R\cdot I^2$$

$$V_1 = R_1 I_1 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{30} \qquad (\text{ولت})$$

$$V_2 = \frac{7}{10} - \frac{1}{30} = \frac{2}{3} \quad (\text{ولت}) \qquad \text{ولتاژ دوسر}$$

که V_2 ولتاژ دو سر مقاومت :

$$\left(\frac{(R_4 + \dfrac{R_2R_3}{(R_2+R_3)})R_5}{\dfrac{R_2R_3}{(R_2+R_3)} + R_4 + R_5}\right)$$

می‌باشد. این مقاومت خود شامل دو شاخه موازی است که ولتاژ دو سرهریک از شاخه‌ها V_2 است.

لذا :

$$V_5 = V_2 = R_5 I_5 \Rightarrow \frac{2}{3} = 10\times I_5 \Rightarrow I_5 = \frac{2}{30}(A)$$

جریان مقاومت $[(\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}) + R_4]$ برابر است با: $\frac{1}{10} - \frac{2}{30} = \frac{1}{30}(A)$

اما این جریان $\frac{1}{30}$ آمپری بین مقاومت‌های R_2, R_3 به نسبت مقاومت تقسیم می‌شود یعنی :

$$I_2 = \frac{30}{(30+20)}\times\frac{1}{30} = \frac{1}{50}\ (A)$$

$$I_3 = \frac{30}{(30+20)}\times\frac{1}{30} = \frac{2}{150}\ (A)$$

جریان مقاومت $R_۴$ هم که همان $\frac{۱}{۳۰}$ آمپر است لذا:

$$P_۱ = R_۱I_۱^۲ = \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۱۰})^۲ = \frac{۱}{۳۰۰} \quad (\text{وات})$$

$$P_۲ = R_۲I_۲^۲ = ۲۰(\frac{۱}{۵۰})^۲ = ۲۰(\frac{۱}{۲۵۰۰}) = \frac{۱}{۱۲۵} \quad (\text{وات})$$

$$P_۳ = R_۳I_۳^۲ = ۳۰(\frac{۲}{۱۵۰})^۲ = ۳۰(\frac{۴}{۲۲۵۰۰}) = \frac{۲}{۳۷۵} \quad (\text{وات})$$

$$P_۴ = R_۴I_۴^۲ = ۸(\frac{۱}{۳۰})^۲ = ۸(\frac{۱}{۹۰۰}) = \frac{۲}{۲۲۵} \quad (\text{وات})$$

$$P_۵ = R_۵I_۵^۲ = ۱۰(\frac{۲}{۳۰})^۲ = ۱۰(\frac{۴}{۹۰۰}) = \frac{۲}{۴۵} \quad (\text{وات})$$

مسئله ۵: مسئله ۴ را با فرض اینکه منبع موجود، یک مولد جریان ایده‌ال است و جریان مستقیم $۰/۷(A)$ را از سر ۱ خارج می‌سازد، حل کنید.

می‌دانیم مقاومت $R' = \left(\frac{(R_۴ + \frac{R_۲R_۳}{(R_۲+R_۳)})(R_۵)}{(\frac{R_۲R_۳}{(R_۲+R_۳)} + R_۴ + R_۵)}\right)$ با مقاومت $R_۱$ سری است لذا جریان در هردو یکی است. بنابراین جریان مقاومت R' برابر ۰/۷ آمپر است و ولتاژ دو سرآن مساوی با $\frac{۱۴}{۳} = (\frac{۲۰}{۳} \times \frac{۷}{۱۰})$ ولت است. مقاومت R' خود شامل دو شاخه موازی است که ولتاژ دو سرهر یک از شاخه‌ها $\frac{۱۴}{۳}$ ولت می‌باشد در نتیجه:

$$\frac{۱۴}{۳} = R_۵I_۵ = ۱۰I_۵ \Rightarrow I_۵ = \frac{۷}{۱۵}(A)$$

و برای شاخه دیگر:

$$I \times ۲۰ = \frac{۱۴}{۳} \Rightarrow I = \frac{۱۴}{۳ \times ۲۰} = \frac{۷}{۳۰}(A)$$

اما این جریان $\frac{۷}{۳۰}$ آمپری بین مقاومتهای $R_۳, R_۲$ به نسبت مقاومت تقسیم می‌شود یعنی:

$$I_۲ = \frac{۳۰}{(۳۰+۲۰)} \times \frac{۷}{۳۰} = \frac{۷}{۵۰}(A)$$

$$I_۳ = \frac{۲۰}{(۳۰+۲۰)} \times \frac{۷}{۳۰} = \frac{۱۴}{۱۵۰} = \frac{۷}{۷۵}(A)$$

جریان مقاومت $R_۴$ نیز $\frac{۷}{۳۰}$ آمپر است. در یک جمع بندی:

$$I_۱ = ۰/۷(A) \qquad I_۲ = \frac{۷}{۵۰} = ۰/۱۴(A)$$

$$I_۳ = \frac{۷}{۷۵}۰/۰۹\overline{۳}(A) \qquad I_۴ = \frac{۷}{۳۰} = ۰/۲\overline{۳}(A)$$

$$I_۵ = \frac{۷}{۱۵}۰/۴۶۶۶۶۶۶۶۶۶ \simeq ۰/۴۶۷(A)$$

$$P_۱ = R_۱I_۱^۲ = \frac{۱}{۳}(۰/۷)^۲ = ۰/۱۶۳ \quad (\text{وات})$$

$$P_۲ = R_۲I_۲^۲ = ۲۰(۰/۱۴۰)^۲ = ۰/۳۹۲ \quad (\text{وات})$$

$$P_۳ = R_۳I_۳^۲ = ۳۰(۰/۰۹\overline{۳})^۲ = ۰/۲۶۱ \quad (\text{وات})$$

$$P_۴ = R_۴I_۴^۲ = ۸(۰/۲\overline{۳})^۲ = ۰/۴۳۶ \quad (\text{وات})$$

$$P_۵ = R_۵I_۵^۲ = ۱۰(۰/۴۶۷)^۲ = ۲/۱۷۸ \quad (\text{وات})$$

مسئله ۶: برق آسمانی، به یک کره دی‌الکتریک دارای اتلاف ـ $\sigma = ۱۰(S/m), \epsilon = ۱/۲\epsilon_۰$ ـ به شعاع $۰/۱(m)$ در لحظه $t = ۰$ اصابت می‌کند؛ و بار کل $۱(mC)$ را در کره به طور یکنواخت قرار می‌دهد. برای تمام زمانهای t،

الف) شدت میدان الکتریکی را هم در درون و هم در بیرون کره تعیین کنید.

ب) چگالی جریان در کره را تعیین کنید.

پاسخ قسمت الف)

با مراجعه به رابطه (۵ـ۴۹) صفحه ۲۵۱ کتاب درسی داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta}{\epsilon} = ۰ \\ \epsilon = ۱/۲\epsilon_۰ \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta}{۱/۲\epsilon_۰}\rho = ۰$$

$$\Rightarrow \rho = ke^{-\frac{\delta}{۱/۲\epsilon_۰}t}$$

پاسخ قسمت ت)

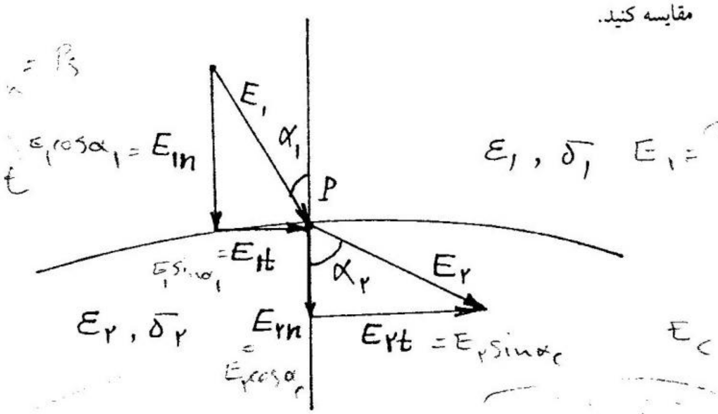
$$U = -\mu_e \cdot E = -(۱/۴ \times ۱۰^{-۳})(۶ \times ۱۰^{-۳}) = -۸/۴ \times ۱۰^{-۶}(\frac{m}{s})$$

مسئله ۹: دو ناحیه دی‌الکتریک دارای اتلاف، بارگذردهی و رسانندگی (ϵ_1, σ_1) و (ϵ_2, σ_2) در تماس با یکدیگر هستند. مطابق شکل ۵ـ۱۰، یک میدان الکتریکی با اندازه E_1 در زاویه α_1 که نسبت به عمود مشترک اندازه‌گیری می‌شود. از ناحیه ۱ وارد فصل مشترک می‌شود.

الف) اندازه و جهت E_2 را در ناحیه ۲ پیدا کنید.

ب) چگالی بار سطحی را در فصل مشترک بیابید

پ) نتایج قسمت‌های (الف) و (ب) را با حالتی که در آن هر دو ناحیه، دی‌الکتریک کامل هستند، مقایسه کنید.

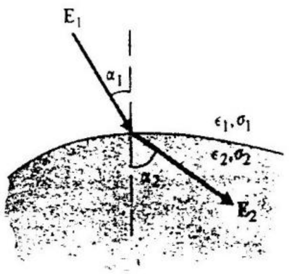


شکل ۵.۴ مسئله ۹ـ(۱)

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} E_{1n} = E_1 \cos\alpha_1 \\ E_{1t} = E_1 \sin\alpha_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{2n} = E_2 \cos\alpha_2 \\ E_{2t} = E_2 \sin\alpha_2 \end{cases}$$



شکل ۵.۵ مسئله ۹ـ(۲)

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \delta_1 E_{1n} = \delta_2 E_{2n} \Rightarrow \delta_1 E_1 \cos\alpha_1 = \delta_2 E_2 \cos\alpha_2 \quad (*)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \underbrace{E_1 \sin\alpha_1}_{K} = \underbrace{E_2 \sin\alpha_2}_{K} = K \quad \text{بفرض}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{\delta_1 E_1 \cos\alpha_1}{K} = \frac{\delta_2 E_2 \cos\alpha_2}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_1 E_1 \cos\alpha_1}{E_1 \sin\alpha_1} = \frac{\delta_2 E_2 \cos\alpha_2}{E_2 \sin\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{\delta_2}{\delta_1}\tan\alpha_1)}$$

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_1 \sin\alpha_1)^2 + (\frac{\delta_1}{\delta_2} E_1 \cos\alpha_1)^2}$$

$$\boxed{E_2 = E_1[\sin^2\alpha_1 + (\frac{\delta_1}{\delta_2}\cos\alpha_1)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

(توضیح اینکه در قسمت "جوابهای مسائل منتخب" از کتاب درسی، صفحهٔ ۸۱۹ در پاسخ مسئله ۹ از فصل پنجم بند محاسبه E_2، مقدار E_1 در طرف دوّم از قلم افتاده است در قسمت محاسبه ρ_s نیز عبارت $\cos\alpha_1$ بجای $\sin\alpha_1$ صحیح می‌باشد.)

پاسخ قسمت ب)

$$\rho_s = (\epsilon_1 - \epsilon_2\frac{\delta_1}{\delta_2})(-E_{1n}) = (\epsilon_2\frac{\delta_1}{\delta_2} - \epsilon_1)E_1\cos\alpha_1$$

(رجوع کنید به رابطه (۵_۶۹) صفحه ۲۵۶)

علامت منفی مقابل E_{1n} بدین دلیل بکار رفته است که اگر نقطه P را مبدأ بگیریم E_{1n} در جهت منفی مبدا حرکت می‌کند در صورتیکه رابطه (۵_۶۹) صفحه ۲۵۶ برای حرکت در جهت مثبت مبدا نوشته شده است.

برای نمونه، قسمت (پ) مثال (۵_۴) حل شده در صفحه ۲۵۷ کتاب درسی را ببینید.

پاسخ قسمت پ)

در حالت اخیر : $E_2 = E_1[\sin^2\alpha_1 + (\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})^2\cos^2\alpha_1]^{\frac{1}{2}}$

$\alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\tan\alpha_1)$, $\rho_s = 0$

حال نتایج این قسمت را با نتایج بدست آمده از بند (الف) و (ب) مقایسه می‌کنیم: $\sigma = ay + b$

حالت اوّل : $E_2 = E_1[\sin^2\alpha_1 + (\frac{\delta_1}{\delta_2}\cos\alpha_1)^2]^{\frac{1}{2}}$

حالت دوّم : $E_2 = E_1[\sin^2\alpha_1 + (\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\cos\alpha_1)^2]^{\frac{1}{2}}$

حالت اوّل : $\alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{\delta_2}{\delta_1}\tan\alpha_1)$

حالت دوّم : $\alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\tan\alpha_1)$

حالت اوّل : $\rho_s = (\epsilon_2\frac{\delta_1}{\delta_2} - \epsilon_1)E_1\cos\alpha_1$

حالت دوّم : $\rho_s = 0$

مهم

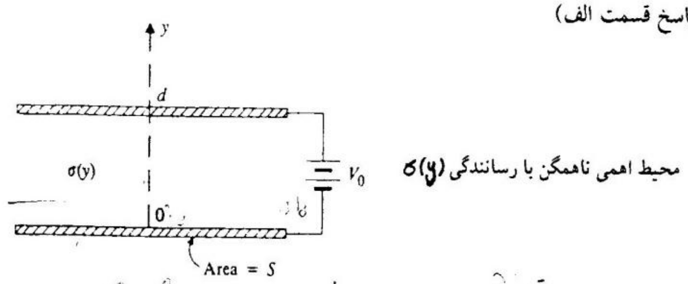
مسئله ۱۰: فضای بین دو صفحه هادی موازی، هر یک با سطح S، با یک محیط اهمی ناهمگن که رسانندگی آن به طور خطی از σ_1 در یک صفحه $(y = 0)$ تا σ_2 در صفحه دیگر $(y = d)$ تغییر می‌کند پر شده است. یک ولتاژ $d - c$، V_0، مطابق شکل ۵_۱۱ به صفحات اعمال می‌شود.

الف) مقاومت کل بین صفحات را تعیین کنید.

ب) چگالی‌های بار سطحی روی صفحات راتعیین کنید.

پ) چگالی بار حجمی و کل مقدار بار بین صفحات را تعیین نمایید.

پاسخ قسمت الف)



شکل ۵.۶ مسئله ۱۰

$$R = \frac{l}{\delta S} \Rightarrow R = \int_0^d \frac{dl}{\delta S} \; , \; dl = dy$$

امّا بنا به گفته مسئله δ بطور خطی از $y = 0$ تا $y = d$ تغییر می‌کند لذا:

$$\begin{cases} \delta = ay + b \\ \delta(y = 0) = \delta_1 \\ \delta(y = d) = \delta_2 \end{cases} \Rightarrow \delta = (\frac{\delta_2 - \delta_1}{d})y + \delta_1$$

$$R = \int_0^d \frac{dl}{S[(\frac{\delta_2 - \delta_1}{d})y + \delta_1]} = \int_0^d \frac{dy}{S[\frac{(\delta_2 - \delta_1)y + d\delta_1}{d}]}$$

$$= \frac{d}{S}\int_0^d \frac{dy}{(\delta_2 - \delta_1)y + d\delta_1} = \frac{d\ln[(\delta_2 - \delta_1)y + d\delta_1]}{S(\delta_2 - \delta_1)}\Big|_0^d$$

$$\Rightarrow \boxed{R = d\frac{\ln(\frac{\delta_2}{\delta_1})}{S(\delta_2 - \delta_1)}}$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} I = \dfrac{V_\circ}{R} \\ I = JS \end{cases} \Rightarrow J = \frac{V_\circ}{RS} \Rightarrow \vec{J} = -\frac{V_\circ}{RS}\vec{a}_y$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\delta} = \dfrac{-v_\circ}{RS\delta}\vec{a}_y \\ \rho_s = E \cdot \epsilon \end{cases} \Rightarrow \rho_{s1} = \frac{-v_\circ \epsilon}{RS\delta_1}, \quad \rho_{s2} = \frac{+v_\circ \epsilon}{RS\delta_2}$$

پاسخ قسمت پ)

$$\rho_v = \epsilon \cdot \nabla . E$$

$$\vec{E} = \frac{V_\circ \vec{a}y}{SR[(\frac{\delta_2 - \delta_1}{d})y + \delta_1]}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{V_\circ}{RS}\frac{dE}{dy} = \frac{V_\circ}{RS}(\frac{\delta_2 - \delta_1}{d})/[(\frac{\delta_2 - \delta_1}{d})y + \delta_1]^2$$

$$\Rightarrow \rho_v = \frac{\epsilon V_\circ(\frac{\delta_2 - \delta_1}{d})}{RS[(\frac{\delta_2 - \delta_1}{d})y + \delta_1]^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_v = \frac{\epsilon_\circ V_\circ (\delta_2 - \delta_1)d}{RS[(\delta_2 - \delta_1)y + d\delta_1]^2}}$$

$$\begin{cases} Q = \displaystyle\int_v \rho_v \cdot dv = \int\int\int_\circ^d \frac{\epsilon V_\circ(\delta_2 - \delta_1)d(dydzdx)}{RS[(\delta_2 - \delta_1)y + d\delta_1]^2} \\ dxdz = S \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = \int_\circ^d \frac{\epsilon V_\circ (\delta_2 - \delta_1)d(dy)}{R[(\delta_2 - \delta_1)y + d\delta_1]^2}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\epsilon v_\circ (\delta_2 - \delta_1)d}{R}\int_\circ^d \frac{dy}{[(\delta_2 - \delta_1)y + \delta_1 d]^2}$$

با تغییر متغیر

$$\begin{cases} [(\delta_2 - \delta_1)y + \delta_1 d] = u \\ (\delta_2 - \delta_1)dy = du \end{cases}$$

داریم :

$$Q = \frac{\epsilon V_\circ d}{R}\int_\circ^d \frac{(\delta_2 - \delta_1)dy}{[(\delta_2 - \delta_1)y + \delta_1 d]^2}$$

$$= \frac{\epsilon V_\circ d}{R}\int \frac{du}{u^2} = \frac{\epsilon V_\circ d}{R}\int u^{-2}du = \frac{\epsilon V_\circ d}{R}\frac{u^{-1}}{(-1)}$$

$$= \frac{-\epsilon V_\circ d}{R[(\delta_2 - \delta_1)y + \delta_1 d]}\Big|_\circ^d = \frac{\epsilon V_\circ}{R}(\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_2})$$

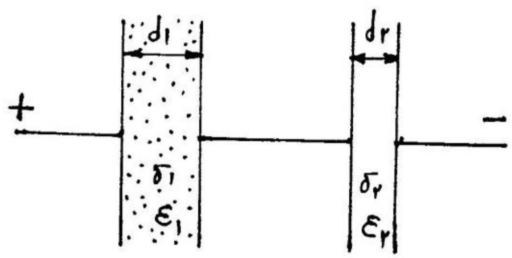
$$\Rightarrow \boxed{Q = \frac{\epsilon v_\circ}{R}(\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_2})}$$

مسئله ۱۱: با مراجعه به مثال ۵_۴

الف) مدار معادل خازن صفحه‌ای موازی دو لایه‌ای با دی‌الکتریک دارای اتلاف را رسم کرده، مقدار هر مولفه را تشخیص دهید.

ب) توان تلف شده در خازن را تعیین کنید.

پاسخ قسمت الف)



شکل ۵.۷ مسئله ۱۱

$$V = V_1 + V_2 \text{ (ولتاژ کل)}$$

$$E_1 = \frac{V_1}{d_1}\ ,\ E_2 = \frac{V_2}{d_2}$$

پاسخ قسمت ب)

$$P = \frac{V^2}{R} = V^2\left[\frac{1}{(\frac{d_1}{\delta_1 S}) + (\frac{d_2}{\delta_2 S})}\right]$$

که در روابط فوق R (معادل) بصورت زیر محاسبه می‌شود:

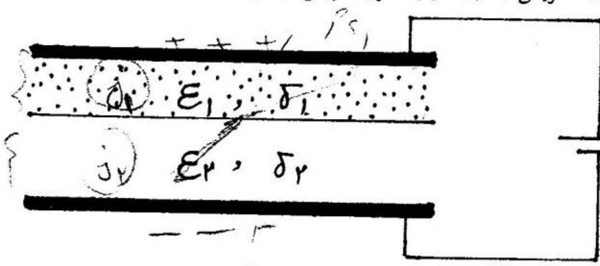
$$R = R_1 + R_2 = \frac{d_1}{\delta_1 S} + \frac{d_2}{\delta_2 S} = \frac{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2}{S\delta_1\delta_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{V^2 S\delta_1\delta_2}{\delta_1 d_2 + \delta_2 d_1}}$$

مسئله ۱۲: بار دیگر به مثال ۵_۴ مراجعه کرده و فرض کنید که ولتاژ V_0 به دو سر خازن صفحه‌ای موازی با دو لایه دی‌الکتریک با اتلاف متفاوت در $t = 0$ اعمال شود.

الف) چگالی بار سطحی ρ_{si} را در سطحوح دی‌الکتریک به صورت تابعی از t بیان کنید.

ب) شدت میدان الکتریکی E_2, E_1 را به صورت توابعی از t بیان نمایید.



شکل ۵.۸ مسئله ۱۲

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2 \\ \delta_1 E_1 = \delta_2 E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{\delta_2 V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2} \\ E_2 = \dfrac{\delta_1 V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 + d_2} \end{cases}$$

$$\rho_{(s1)0} = D_1 = \epsilon_1 E_1 \Rightarrow \rho_{(s1)0} = \frac{\epsilon_1\delta_2 V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2}$$

نیز می‌دانیم:
$$\rho_{(s1)} = \rho_{(s1)0}\, e^{-\frac{\delta_1}{\epsilon_1}t}$$

لذا:
$$\rho_{(s1)} = \frac{\epsilon_1\delta_2 V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2} e^{-\frac{\delta_1}{\epsilon_1}t}$$

و بهمین ترتیب:
$$\rho_{(s2)} = \frac{\epsilon_2\delta_1 V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2} e^{-\frac{\delta_2}{\epsilon_2}t}$$

$$\begin{aligned}\rho_{(si)0} &= D_{1n} - D_{2n} = \epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2 \\ &= \frac{\epsilon_1\delta_2 V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2} - \frac{\epsilon_2\delta_1 V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2} = \frac{V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2}(\epsilon_1\delta_2 - \epsilon_2\delta_1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho_{(si)} = \frac{V_0}{\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2}(\epsilon_1\delta_2 - \epsilon_2\delta_1)\left(e^{-(\frac{\delta_1}{\epsilon_1})t} + e^{-(\frac{\delta_2}{\epsilon_2})t}\right)$$

پاسخ قسمت ب)

$$E_1 = \frac{\rho_{s1}}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_1\delta_2 V_0}{\epsilon_1(\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2)} e^{-(\frac{\delta_1}{\epsilon_1})t}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\delta_2 V_0 e^{-(\frac{\delta_1}{\epsilon_1})t}}{(\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2)}}$$

$$E_2 = \frac{-\rho_{s2}}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_2 \delta_1 V_0}{\epsilon_2(\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2)} e^{-(\frac{\delta_2}{\epsilon_2})t}$$

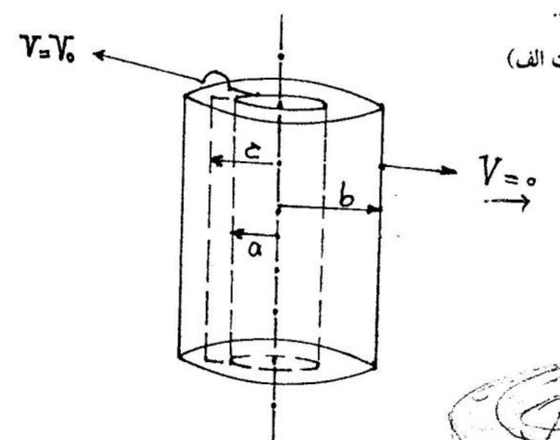
$$\Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\delta_1 V_0 e^{-(\frac{\delta_2}{\epsilon_2})t}}{(\delta_2 d_1 + \delta_1 d_2)}}$$

مسئله ۱۳: ولتاژ V_0، $d-c$ به دو سر خازن استوانه‌ای به طول l اعمال شده است. شعاع هادیهای درونی و بیرونی به ترتیب a و b است. فضای بین هادیهای با دو دی‌الکتریک متفاوت دارای اتلاف، به ترتیب با گذردهی ϵ_1 و رسانندگی σ_1 در ناحیه $a < r < c$ و گذردهی ϵ_2 و رسانندگی σ_2 در ناحیه $c < r < b$ پر شده است.

الف) چگالی جریان را در هر ناحیه تعیین کنید.

ب) چگالی‌های بار سطحی روی هادیهای درونی و بیرونی و فصل مشترک بین دو دی‌الکتریک را تعیین نمایید.

پاسخ قسمت الف)



شکل ۵.۹ مسئله ۱۳

چون E فقط مولفه شعاعی دارد در نتیجه J هم فقط مولفه شعاعی خواهد داشت لذا:

$: a < r < c$ $\quad J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow J_1 = J_2 \ (*)$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{rdV}{dr} = c_1 \Rightarrow V_1(r) = c_1(r) = c_1 \ln r + c_1'$$

$: c < r < b$

بهمین ترتیب: $V_2(r) = c_2 \ln r + c_2'$

$$E = -\nabla V \begin{cases} E_1 = -\frac{c_1}{r} a_r \\ E_2 = -\frac{c_2}{r} a_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{-c_1\delta_1}{r} a_r \\ J_2 = \frac{-c_2\delta_2}{r} a_r \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} c_1\delta_1 = c_2\delta_2 \quad (1)$$

حال شرایط مرزی را جاگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} c_1 \ln a + c_1' = V_0 & (2) \\ c_2 \ln b + c_2' = 0 & (3) \end{cases}$$

$$c_1 \ln c + c_1' = c_2 \ln c + c_2' = V_c \quad (4)$$

با حل چهار معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{V_0\delta_1}{\delta_2 \ln(\frac{a}{c}) + \delta_1 \ln(\frac{c}{b})} \\ c_1 = \dfrac{V_0\delta_2}{\delta_2 \ln(\frac{a}{c}) + \delta_1 \ln(\frac{c}{b})} \end{cases} \Rightarrow J_1 = J_2 = \frac{V_0\delta_1\delta_2}{r[\delta_1 \ln(\frac{b}{c}) + \delta_2 \ln(\frac{c}{a})]}$$

پاسخ قسمت ب)

$$\rho_{sa} = \epsilon_1 E_1 = -\frac{\epsilon_1\delta_2 V_0}{a[\delta_2 \ln\frac{a}{c} + \delta_1 \ln\frac{c}{b}]} \quad :(r = a \text{ در})$$

$$= \frac{+\epsilon_1\delta_2 V_0}{a[\delta_2 \ln\frac{c}{a} + \delta_1 \ln\frac{b}{c}]}$$

$$\rho_{sb} = -\epsilon_2 E_2 = \frac{-\epsilon_2 V_0 \delta_1}{b[\delta_2 \ln\frac{c}{a} + \delta_1 \ln\frac{b}{c}]} \quad :(r = b \text{ در})$$

دقّت کنید: آیا تا بحال به این نکته توجّه کرده‌اید که چرا گاهی $\rho_s = \epsilon E$ و گاهی $\rho_s = -\epsilon E$ است؟

صورت کلّی رابطهٔ فوق $\rho_s = \epsilon(E \cdot a_n)$ می‌باشد که a_n بردار عمود بر سطح می‌باشد. علامت ρ_s مثبت است اگر a_n با شدت میدان الکتریکی همجهت باشد و منفی است اگر a_n با شدت میدان الکتریکی زاویه 180° داشته باشد.

حال می‌توانید علامتهای ρ_{sa}, ρ_{sb} در قسمت ب) را توجیه کنید.

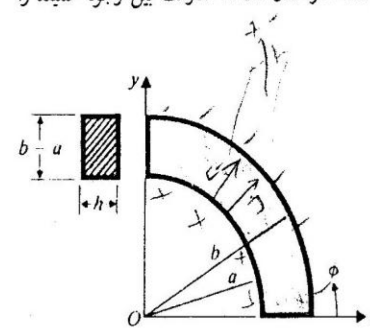
$$\rho_{sc} + \rho_{sa} + \rho_{sb} = 0 \Rightarrow \rho_{sc} = -(\rho_{sa} + \rho_{sb})$$

$$\Rightarrow \rho_{sc} = \frac{V_0(\epsilon_2\delta_1 - \epsilon_1\delta_2)}{(b-a)[\delta_1 \ln(\frac{b}{c}) + \delta_2 \ln(\frac{c}{a})]}$$

$(b-a)$ منطقه‌ای را شامل است که شعاع c در آن ناحیه انتخاب شده است لذا برای هر c در فاصله a تا b:

$$\Rightarrow \rho_{sc} = \frac{V_0(\epsilon_2\delta_1 - \epsilon_1\delta_2)}{c[\delta_1 \ln(\frac{b}{c}) + \delta_2 \ln(\frac{c}{a})]}$$

مسئله ۱۴: با مراجعه به ربع واشر مسطح شکل ۵_۸ در مثال ۵_۶، مقاومت بین وجوه خمیده را پیدا کنید.



یک چهارم یک واشر مدور سطح هادی

شکل ۵.۱۰ مسئله ۱۴

شکل فوق را می‌توان $\frac{1}{4}$ یک خازن استوانه‌ای تصور نمود لذا:

روش اول (تستی):

صفحه ۱۴۹ رابطه (۳_۱۳۹): $C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(\frac{b}{a})}$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln(\frac{b}{a})} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi\epsilon h}{2\ln(\frac{b}{a})}$$

میدانیم: $R = \frac{\epsilon}{\delta c}$

$$\Rightarrow R = \frac{2\epsilon \ln(\frac{b}{a})}{\delta\pi\epsilon h} \Rightarrow \boxed{R = \frac{2\ln(\frac{b}{a})}{\pi h\delta}}$$

روش دوم (تشریحی):

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dV}{dr}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\frac{dV}{dr}) = 0$$

$$r\frac{dV}{dr} = A \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow V = A\ln r + B$$

$$V = 0 \Rightarrow A\ln a + B = 0 \Rightarrow B = -A\ln a \qquad (*)$$

$$V = V_0 \Rightarrow A\ln b + B = V_0 \overset{(*)}{\Rightarrow} A\ln b - A\ln a = V_0$$

$$\Rightarrow A\ln(\frac{b}{a}) = V_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{V_0}{\ln(\frac{b}{a})}}$$

$$B = -A\ln a \Rightarrow \boxed{B = \frac{-V_\circ \ln a}{\ln(\frac{b}{a})}}$$

$$V = A\ln r + B \Rightarrow V = \frac{V_\circ}{\ln(\frac{b}{a})}\ln r - \frac{V_\circ \ln a}{\ln(\frac{b}{a})}$$

$$= \frac{V_\circ \ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{b}{a})} \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{-V_\circ}{\ln(\frac{b}{a})}\ln(\frac{r}{a})}$$

$$E = -\nabla V \Rightarrow E = \frac{-dV}{dr}\vec{a}_r = -\frac{V_\circ}{\ln(\frac{b}{a})}\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{r}{a}}\right)\vec{a}_r$$

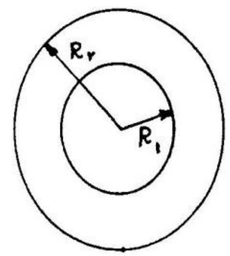
$$\Rightarrow E = -\frac{V_\circ}{r\ln(\frac{b}{a})}\vec{a}_r \Rightarrow \boxed{J = \frac{-V_\circ\delta}{r\ln(\frac{b}{a})}\vec{a}_r}$$

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s} = \int \vec{J}\cdot(ds(-\vec{a}_r)) = \int \frac{V_\circ\delta}{r\ln(\frac{b}{a})}ds$$

$$= \frac{V_\circ\delta}{\ln(\frac{b}{a})}\int_\circ^h\int_\circ^{\frac{\pi}{2}}\frac{r\,d\phi\,dz}{r} = \frac{h\pi V_\circ\delta}{2\ln(\frac{b}{a})}$$

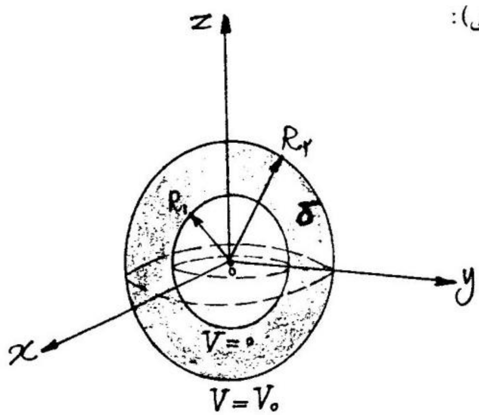
$$R = \frac{V_\circ}{I} = \frac{2\ln(\frac{b}{a})V_\circ}{h\pi V_\circ\delta} \Rightarrow \boxed{R = \frac{2\ln(\frac{b}{a})}{h\pi\delta}}$$

مسئله ۱۵ مقاومت بین دو سطح کروی هم مرکز به شعاعهای R_1, R_2 $(R_1 < R_2)$ را با فرض اینکه فضای بین سطوح با یک مادهٔ همگن و همسو یکسان با رسانندگی σ پر شده باشد، تعیین کنید.



شکل ۵.۱۱ مسئله ۱۵_(۱)

روش اول (تستی):



شکل ۵.۱۲ مسئله ۱۵_(۲)

بنابه رابطه (۳_۱۴۰) صفحه ۱۵۰:

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})}, \quad R = \frac{\epsilon}{\sigma C}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{4\pi\sigma}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})}$$

روش دوم (تشریحی):

$\nabla^2 V = 0$ توجه کنید: V فقط با R تغییر می‌کند $\Longrightarrow$ $\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{d}{dR}(R^2\sin\theta\frac{dV}{dR})$

$$= \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = 0$$

$$\Rightarrow R^2\frac{dV}{dR} = A \Rightarrow \frac{dV}{dR} = \frac{A}{R^2} \Rightarrow \underline{V = -\frac{A}{R} + B}$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{R_1} + B = 0 \\ -\frac{A}{R_2} + B = V_0 \end{cases} \Rightarrow V_0 = \frac{-A}{R_2} + \frac{A}{R_1} \Rightarrow V_0 = \frac{(R_2 - R_1)A}{R_1R_2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{V_0R_1R_2}{R_2 - R_1} \quad , \quad B = \frac{A}{R_1} \Rightarrow B = \frac{V_0R_2}{R_2 - R_1}$$

$$\Rightarrow V(R) = \frac{V_0R_1R_2}{(R_2 - R_1)R} + \frac{V_0R_2}{(R_2 - R_1)}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dR}\vec{a}_R \Rightarrow \vec{E} = \frac{-V_0R_1R_2\vec{a}_R}{(R_2 - R_1)R^2}$$

$$\vec{J} = \delta\vec{E} \Rightarrow \vec{J} = \frac{-V_0\delta R_1R_2}{(R_2 - R_1)R^2}\vec{a}_R \Rightarrow I = \int J ds$$

و $ds = R^2 \sin\theta d\phi d\theta(-\vec{a}_R)$

$$I = \frac{V_0\delta R_1R_2}{(R_2 - R_1)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{R^2}R^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{V_0\delta R_1R_2}{(R_2 - R_1)}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{V_0\delta R_1R_2(2 \times 2\pi)}{(R_2 - R_1)}$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{(R_2 - R_1)}{\delta R_1R_2(4\pi)} = \boxed{\frac{1}{4\pi\delta}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

مسئله ۱۶: مقاومت بین دو سطح کروی هم مرکز به شعاع‌های R_1 و R_2 $(R_1 < R_2)$ را با فرض اینکه ماده‌ای با رسانندگی $\sigma = \sigma_0(1 + k/R)$ فضای بین آنها را پر می‌کند، تعیین کنید. (نکته : معادله لاپلاس در مورد V اینجا بکار نمی‌آید.)

$$R = \frac{l}{\delta S} \Rightarrow dR = \frac{dl}{\delta S} \Rightarrow R = \int\frac{dl}{\delta S}$$

$$\begin{cases} dl = dR \\ S = 4\pi R^2 \end{cases} \Rightarrow -\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{\delta(4\pi R^2)}$$

اما $\delta = \delta_0(1 + \frac{k}{R})$ لذا:

$$R = \int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{\delta_0(1 + \frac{k}{R})R^2(4\pi)} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{\delta_0(R^2 + kR)(4\pi)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\delta_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R(R + k)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\delta_0 k}\left[\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R} - \int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R + k}\right]$$

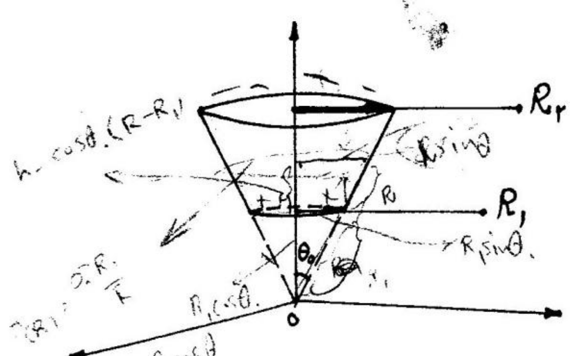
$$= \frac{1}{4\pi\delta_0 k}\left[\ln R|_{R_1}^{R_2} - \ln(R + k)|_{R_1}^{R_2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\delta_0 k}\ln\left[\frac{(R_2)(R_1 + k)}{(R_1)(R_2 + k)}\right]$$

مسئله ۱۷: ماده همگنی با رسانندگی یکنواخت σ به صورت یک قطعه مخروط ناقص در آمده است و در مختصات کروی با

$$R_1 \le R \le R_2 \quad , \quad 0 \le \theta \le \theta_0$$

تعریف می‌شود. مقاومت بین سطوح $R = R_1$ و $R = R_2$ را تعیین کنید.



شکل ۵.۱۳ مسئله ۱۷

$\cos\theta_0(R-R_1)$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dR} = \frac{A}{R^2} \Rightarrow V = -\frac{A}{R} + B$$

$$\begin{cases} V(R_1) = 0 \Rightarrow -\dfrac{A}{R_1} + B = 0 \\ V(R_2) = V_0 \Rightarrow -\dfrac{A}{R_2} + B = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{V_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ B = \dfrac{V_0 R_2}{R_2 - R_1} \end{cases}$$

$$V = -\frac{V_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{V_0 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial R} \Rightarrow E = \frac{-V_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}\frac{1}{R^2} a_R$$

$$J = \delta E \Rightarrow J = \frac{-V_0 R_1 R_2 \delta}{R^2 (R_2 - R_1)} a_R$$

$$\begin{cases} I = \oint J \cdot ds \\ ds = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi (-a_R) \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{V_0 R_1 R_2 \delta R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{(R_2 - R_1) R^2}$$

$$= \frac{2\pi V_0 R_1 R_2 \delta}{R_2 - R_1}(1 - \cos\theta_0)$$

$$R = \frac{V_0}{I} \Rightarrow R = \frac{V_0 (R_2 - R_1)}{2\pi \delta R_1 R_2 V_0 (1 - \cos\theta_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{(R_2 - R_1)}{2\pi \delta R_1 R_2 (1 - \cos\theta_0)}}$$

مسئله ۱۸: مسئله ۵_۱۷ را با فرض اینکه قطعه مخروط ناقص از ماده غیرهمگنی با رسانندگی غیریکنواخت $\sigma(R) = \sigma_0 R_1 / R$ و $R_1 \le R \le R_2$ تشکیل شده است تکرار کنید.

$$I = \oint J ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} J R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi J R^2 (1 - \cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow J = \frac{I}{2\pi R^2 (1 - \cos\theta_0)}$$

$$J = E \cdot \delta \Rightarrow E = \frac{J}{\delta} = \frac{IR}{2\pi R^2 (1 - \cos\theta_0)\delta_0 R_1}$$

$$\Rightarrow E(R) = \frac{I}{2\pi R(1 - \cos\theta_0)\delta_0 R_1}\vec{a}_R$$

$$V = -\int E \cdot dl = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{I dR}{2\pi R(1 - \cos\theta_0)\delta_0 R_1}$$

$$= \frac{-I(\ln R_1 - \ln R_2)}{2\pi(1 - \cos\theta_0)\delta_0 R_1} = \frac{I(\ln R_2 - \ln R_1)}{2\pi(1 - \cos\theta_0)\delta_0 R_1}$$

$$= \frac{I \ln(\frac{R_2}{R_1})}{2\pi(1 - \cos\theta_0)\delta_0 R_1}$$

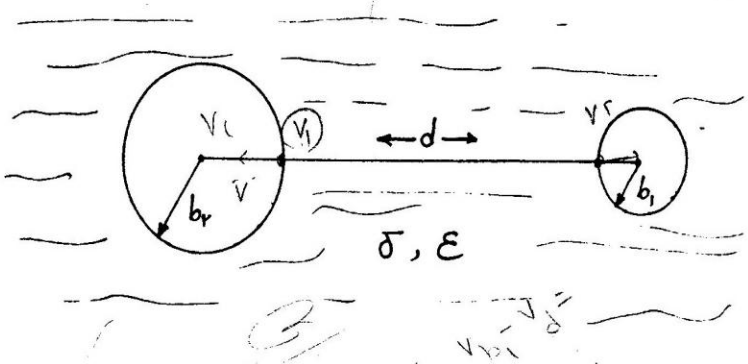
$$R = \frac{V}{I} = \frac{(I)\ln(\frac{R_2}{R_1})}{(I)2\pi(1 - \cos\theta_0)\delta_0 R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{\ln(\frac{R_2}{R_1})}{2\pi(1 - \cos\theta_0)\delta_0 R_1}}$$

$RC = \varepsilon/\sigma$

مسئله ۱۹: دو کره هادی به شعاعهای b_1 و b_2 که رسانندگی بسیار بالائی دارند، در محیط هادی ضعیفی با رسانندگی σ و گذردهی ϵ فرو برده شده‌اند (برای مثال، دو کره هادی در قعر زمین دفن شده‌اند). فاصله d بین کره‌ها، در مقایسه با شعاع آنها بسیار بزرگ است. مقاومت بین کره‌های هادی را پیدا کنید. (راهنمایی: ظرفیت بین کره‌ها را با پیگیری روش بخش ۳_۱۰ پیدا کرده، و معادله (۵_۸۱) را بکار برید).

پاسخ مسئله ۱۹



شکل ۵.۱۴ مسئله ۱۹

$V_1 - V_2 = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{d}\right)$ $V = -\int E \cdot dl$ $V_{12} = -\int_{\lambda}^{b_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} dR$

مطابق مثال (۳ـ۱۹) حل شده در صفحه ۱۵۰ کتاب درسی :

$$V_i - V_o = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}\right)$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{d}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{d}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{2}{d}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon}{\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{2}{d}\right)} \quad (*)$$

$$R = \frac{\epsilon}{\delta C} \overset{(*)}{\Rightarrow} \boxed{R = \frac{1}{4\pi\delta}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{2}{d}\right)}$$

$V_1 - V_d = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{d}$

$V_1 - ($

$V_d = V_1 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{b_1} -$

مسئله ۲۰: درستی این مطلب را بررسی کنید که مسئله جریان دائم در ارتباط با یک هادی فرو برده شده در یک محیط هادی ضعیف، در نزدیکی یک مرز مسطح با هوا را می‌توان مطابق شکل ۵ـ۱۲ (ب) جایگزین کرد.

$V_{b_2} - V_d$

$V_2 - V_d = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{d}$

$V_{b_1} - V_d$

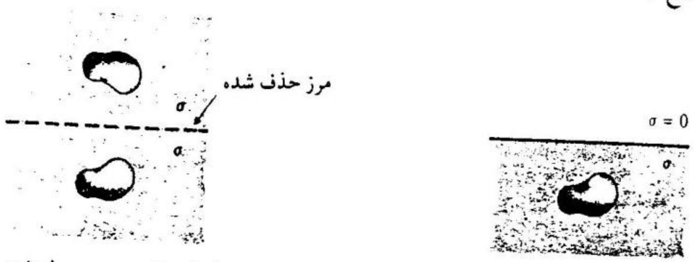
$= V_2 - V_1 +$

$j =$

$V_2 - (V_1 -$

$V_2 - V_1 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{d})$

پاسخ مسئله ۲۰)

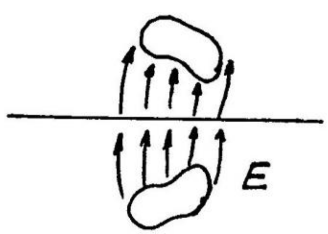


ب) هادی تصویر در محیط هادی جایگزین کننده مرز مسطح

الف) هادی در یک محیط هادی ضعیف نزدیک یک سطح مسطح

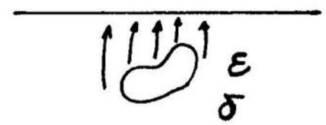
شکل ۵.۱۵ مسئله ۲۰

بعلت اینکه جریان دائم است پس در محیط J ثابت است و به علت ثابت بودن δ می‌توان گفت E در محیط ثابت است.



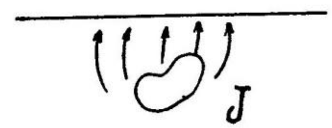
شکل ۵.۱۶ مسئله ۲۰ـ(۱)

(می‌دانیم : $J = \delta E$) بنابراین یک اختلاف پتانسیل روی سطح موجود خواهد بود.



شکل ۵.۱۷ مسئله ۲۰ـ(۲)

برای وجود یک شدت میدان ثابت و یک اختلاف پتانسیل، می‌توان یک خازن را تصور کرد که دارای دو هادی است. (مراحل فوق در اشکال ۱ تا ۳ طی شده‌اند)

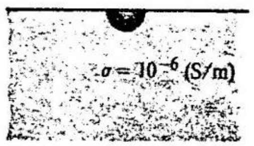


شکل ۵.۱۸ مسئله ۲۰ـ(۳)

با توجه به توضیحات فوق و در نظر داشتن مفروضات مسئله، می‌توان شکل (الف) را با شکل (ب) جایگزین کرد.

مسئله ۲۱: با دفن هادی نیم کروی به شعاع $25(mm)$ در زمین به صورتی که قاعده آن به سمت بالا قرار گیرد، مطابق شکل ۵ـ۱۳ یک اتصال زمین ساخته شده است. با فرض اینکه رسانندگی زمین $10^{-6} S/m$ باشد، مقاومت بین هادی و نقاط بسیار دور در زمین پیدا کنید. (راهنمایی : روش

تصاویر در م. ۵ـ۲۰ را بکار ببرید)



هادی نیم کروی در زمین

شکل ۵.۱۹ مسئله ۲۱

چناچه در مسئله ۱۹ بدست آوردیم :

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{2}{d})}$$

چون نصف کره مورد نظر است لذا :

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{2}{d})}$$

از طرفی

$$\left\{ \begin{array}{l} d \to \infty \\ b_2 \to \infty \end{array} \right. \quad ص$$

و

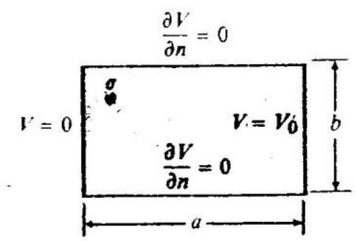
$$\Rightarrow C' = \frac{2\pi\epsilon}{(\frac{1}{b_1} + 0 + 0)} = 2\pi\epsilon b_1$$

$$R = \frac{\epsilon}{\delta C'} = \frac{1}{2\pi\delta b_1} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-6} \times 25 \times 10^{-3}} = 6/36 \text{ (مگا اهم)}$$

مسئله ۲۲: ورقه هادی مستطیل شکلی با رسانندگی σ، پهنای a و ارتفاع b را در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل V_0، مطابق شکل ۵ـ۱۴ به لبه‌های کناری اعمال می‌شود.

الف) توزیع پتانسیل را تعیین کنید.

ب) چگالی جریان را در هر نقطه درون ورقه پیدا کنید. (راهنمایی: معادله لاپلاس را در مختصات کارتزین با شرایط مرزی مناسب حل کنید)



یک ورقه هادی

شکل ۵.۲۰ مسئله ۲۲

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow E_y = 0 \Rightarrow J_y = 0$$

$$\text{شرایط مرزی} \Rightarrow \vec{J} = f(x)\vec{a}_x \Rightarrow V = V(x)$$

$$V = c_1 x + c_2 \Rightarrow V = \frac{V_0}{b}x$$

(که از شرایط مرزی در سمت چپ و راست ناشی می‌شود.)

$$\Rightarrow \vec{J} = -\frac{\delta V_0}{b}\vec{a}_x$$

مسئله ۲۳: چگالی جریان یکنواخت $J = a_x J_0$ در یک قطعه مستطیلی بسیار بزرگ، از ماده‌ای همگن با ضخامت یکنواخت و رسانندگی σ جاری است، سوراخی به شعاع b در ماده ایجاد می‌شود. چگالی جدید جریان، J' را در ماده هادی پیدا کنید. (راهنمایی: معادله لاپلاس را در مختصات

استوانه‌ای حل کنید و توجه داشته باشید که وقتی $r \to \infty$ میل کند، V به سوی $-(J_0 r/\sigma)\cos\phi$ نزدیک می‌شود که در آن ϕ زاویه سنجیده شده از محور x است.)

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \\ V(r,\phi) = -\frac{J_0 r}{\delta}\cos\phi \\ r \to \infty \qquad \frac{\partial v}{\partial r}(b,\phi) = 0 \end{cases}$$

$$V(r,\phi) = -\frac{J_0}{\delta} r\cos\phi + \sum r^{-n}(A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi)$$

$$0 = \frac{-J_0}{\delta}\cos\phi - \sum_0^\infty n b^{-n+1}(A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi)$$

$$\frac{J_0 \cos\phi}{\delta} = -\sum_0^\infty n b^{-(n+1)}(A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi)$$

$$\forall_r (n \neq 1) A_n = B_n = 0$$

$$n = 1 \Rightarrow A_1 = 0 \,, \; B_1 = \frac{-J_0 b^2}{\delta}$$

$$V(r,\phi) = -\frac{J_0 r\cos\phi}{\delta} - \frac{J_0 b^2 r^{-1}\cos\phi}{\delta} = -\frac{J_0 \cos\phi(r + b^2 r^{-1})}{\delta}$$

$$E = +\frac{J_0}{\delta}\cos\phi(1 - b^2 r^{-2})a_r - \frac{J_0}{\delta}\sin\phi(1 + b^2 r^{-2})a_\phi$$

$$J = J_0 \cos\phi(1 - b^2 r^{-2})a_r - J_0 \sin\phi(1 + b^2 r^{-2})a_\phi$$

$$J = J_0(\cos\phi a_r - \sin\phi a_\phi) - \frac{b^2 J_0}{r^2}(\cos\phi a_r + \sin\phi a_\phi)$$

$$J = J_0 a_x - \frac{b^2 J_0}{r^2}(\cos\phi a_r + \sin\phi a_\phi)$$