باشگاه مهندسان سمنان

حل المسائل الکترومغناطیس چنگ

www.sem-eng.com

تهیه کتاب : عارف ناصری

اسکن: محمدرضا خالصی

ارسال: ایمان شریعت پناهی

فصل اول و دوم: مدل الکترومغناطیس و آنالیز برداری

فهرست

۱

پاسخ به پرسشهای فصل اوّل

مدل الکترو مغناطیس

فصل ۱

۱.۱ مدل الکترومغناطیس

پرسش ۱ـ۱ : الکترومغناطیس چیست؟

پاسخ پرسش ۱ـ۱ : الکترومغناطیس، مطالعه تاثیرات بارهای الکتریکی ساکن و متحرّک است.

پرسش ۱ـ۲ : علاوه بر موارد شکلهای ۱ـ۱ و ۱ـ۲ دو پدیده یا مورد دیگر، بیان کنید که توسط نظریه مدار، بطور مناسب قابل توضیح نباشند.

پاسخ پرسش ۱ـ۲ : اصول نظریه مدار بر معادلات ماکسول استوارند، امّا باید مسیر بسته داشته باشیم. ابعاد مدار در مقایسه با طول موج باید کوچک باشند و لازم است که از عناصر تعریف شده استفاده کنیم.

اِکنون وسیله‌ای را در نظر می‌گیریم که بیشتر این الزامها در موردش صدق نمی‌کند اما هنوز بسیاری از نتایج تحلیلی را می‌توان با تفسیر جملات نظری مدار برایش بدست آورد.

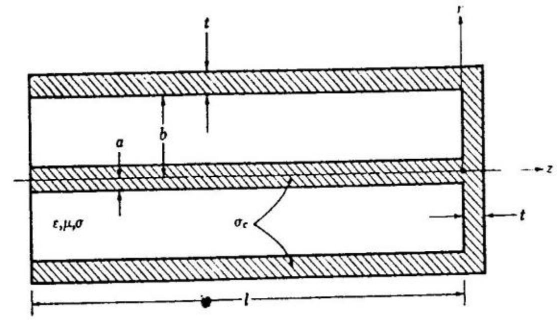
وسیله‌ای که ما بعنوان مثال مدار معادلی برایش می‌کشیم حفرهٔ تشدید هم محور است. چنین تشدید کننده‌هایی نسبت به فرکانس فوق‌العاده حساس هستند.

بنابراین در فرکانس مترها، آمپلی فایرهای تطبیق شده و نوسان سازها مورد استفاده قرار می‌گیرند. حتی می‌توان از آنها برای تعیین ضریب پذیرش و نفوذ مواد عایق مثلاً در کنترل یک فرآیند تولید یا برای تشخیص ویژگیهای خاک استفاده کرد.

۲

پاسخ به مسائل فصل دوّم

آنالیز برداری



شکل ۱.۱ پرسش ۲

پرسش ۱ـ۳ : سه گام اساسی در بنا نهادن یک مدل ایده‌آل در مطالعه موضوعات علمی کدامند؟

پاسخ پرسش ۱ـ۳ : در بنانهادن نظریه‌ای بر روی یک مدل ایده‌آل سه‌گام اساسی مطرح است:

۱ ـ کمیتهای بنیادی مربوط به موضوع مطالعه تعریف می‌شوند.

۲ ـ قواعد عملیّاتی (ریاضیّات) این کمیّات مشخص می‌گردند.

۳ ـ روابط اساسی چندی فرض می‌شوند.

پرسش ۱ـ۴ : چهار واحد اصلی SI در الکترومغناطیس کدامند؟

جدول ۱.۱ : ۱ـ۱

نام کمیّت	واحد	علامت اختصاری
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	Kg
زمان	ثانیه	s
جریان	آمپر	A

پرسش ۱ـ۵ : چهار کمیّت اصلی میدان در مدل الکترومغناطیسی کدامند؟ واحد آنها چیست؟

جدول ۱.۲ : ۲ـ۱

نام کمیّت میدان	واحد	علامت اختصاری
شدت میدان الکتریکی	$\frac{V}{m}$	E
چگالی شارالکتریکی	$\frac{C}{m^2}$	D
چگالی شارژ مغناطیسی	T	B
شدت میدان مغناطیسی	$\frac{A}{m}$	H

پرسش ۱ـ۶ : سه ثابت جهانی مدل الکترومغناطیس کدامند، و رابطه آنها چیست؟

جدول ۱.۳ : ۳ـ۱

نام ثابتهای جهانی	مقدار ثابت	واحد	علامت اختصاری
سرعت نور در فضای آزاد	3×10^{8}	$\frac{m}{s}$	c
نفوذ پذیری فضای آزاد	$4\pi \times 10^{-7}$	$\frac{H}{m}$	μ_0
گذردهی فضای آزاد	$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$	$\frac{F}{m}$	ϵ_0

پرسش ۱ـ۷ : کمیات منبع در مدل الکترو مغناطیس کدامند؟

منبع الکترومغناطیسی همواره بارهای الکتریکی در حال سکون یا متحرّک است.

فصل ۲

۱.۲ آنالیز برداری

مسئله ۱: سه بردارد A، B و C به صورت زیر داده شده‌اند:

$$A = a_x + a_y ۲ - a_z ۳$$

$$B = -a_y ۴ + a_z$$

$$C = a_x ۵ - a_z ۲$$

مطلوب است

الف) a_A ب) $|A - B|$

پ) $A \cdot B$ ت) θ_{AB}

ث) مؤلفهٔ A در جهت C ج) $A \times C$

چ) $A \cdot (B \times C)$ و $(A \times B) \cdot C$ ح) $(A \times B) \times C$ و $A \times (B \times C)$

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} a_A = \dfrac{\vec{A}}{|A|} \\ \vec{A} = a_x + ۲a_y - ۳a_z \Rightarrow \vec{a}_A = \dfrac{(a_x + ۲a_y - ۳a_z)}{\sqrt{۱۴}} \\ |A| = \sqrt{۱ + ۴ + ۹} = \sqrt{۱۴} \end{cases}$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} A = a_x + ۲a_y - ۳a_z \\ B = -۴a_y + a_z \end{cases}$$

$$A - B = (a_x + ۲a_y - ۳a_z) - (۰a_x - ۴a_y + a_z)$$

$$A - B = (۱ - ۰)a_x + (۲ + ۴)a_y + (-۳ - ۱)a_z$$

$$A - B = a_x + ۶a_y - ۴a_z \Rightarrow |A - B| = \sqrt{۱ + ۳۶ + ۱۶} = \sqrt{۵۳}$$

پاسخ قسمت پ)

$$\begin{cases} A = a_x + ۲a_y - ۳a_z \\ B = ۰a_y - ۴a_y + a_z \end{cases}$$

$$A \cdot B = (۱ \times ۰) + (-۴ \times ۲) + (-۳ \times ۱) = ۰ - ۸ - ۳ = -۱۱$$

پاسخ قسمت ت)

می‌دانیم : $A \cdot B = |A||B|\cos(\theta_{AB})$

بنابه پاسخ قسمت الف): $|A| = \sqrt{۱۴}$ و داریم : $|B| = \sqrt{۰ + ۱۶ + ۱}$

$$\Rightarrow \cos(\theta_{AB}) = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = \frac{-۱۱}{\sqrt{۱۴} \times \sqrt{۱۷}} = -۰/۷۱۳۰۲۴۰۹۵$$

$$\Rightarrow \theta^\circ_{AB} = \cos^{-۱}(-۰/۷۱۳۰۲۴۰۹۵۹) = ۱۳۵/۴۸۱۴۹۹۸$$

$$\Rightarrow \theta^\circ_{AB} \simeq ۱۳۵/۵^\circ$$

پاسخ قست ث)

$$\boxed{A_{\vec{c}} = \vec{A} \cdot \vec{a}_c}$$

$$\Rightarrow A_{\vec{c}} = \vec{A} \cdot \left(\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}\right) \qquad (*)$$

$$\vec{C} = ۵a_x + ۰a_y - ۲a_z$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{۲۵ + ۰ + ۴} = \sqrt{۲۹}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{۵a_x + ۰a_y - ۲a_z}{\sqrt{۲۹}}$$

$$(*) \text{ بنابه رابطه } \Rightarrow A_{\vec{c}} = \frac{(a_x + ۲a_y - ۳a_z) \cdot (۵a_x + ۰a_y - ۲a_z)}{\sqrt{۲۹}}$$

$$= \frac{(۱ \times ۵) + (۲ \times ۰) + (-۳ \times -۲)}{\sqrt{۲۹}}$$

$$= \frac{۵ + ۰ + ۱۶}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۱۱}{\sqrt{۲۹}}$$

پاسخ قسمت ج)

$$\begin{cases} A = a_x + ۲a_y - ۳a_z \\ C = ۵a_x + ۰a_y - ۲a_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_x = ۱ \quad ,A_y = ۲ \quad ,A_z = -۳ \\ C_x = ۵ \quad ,C_y = ۰ \quad ,C_z = -۲ \end{cases}$$

$$A \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ ۵ & ۰ & -۲ \end{vmatrix}$$

حلّ دترمینان فوق بروش مثلث بصورت زیر خواهد بود:

$$-۴a_z + ۰a_z - ۱۵a_y - ۱۰a_z + ۰a_x + ۲a_y$$

$$= -۴a_x - ۱۳a_y - ۱۰a_z = -(۴a_x + ۱۳a_y + ۱۰a_z)$$

پاسخ قسمت چ)

$$A \cdot (B \times C) = ?$$

$$B \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ ۰ & -۴ & ۱ \\ ۵ & ۰ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$۸a_x + ۰a_z + ۵a_y + ۲۰a_z + ۰a_x + ۰a_y$$

$$= ۸a_x + ۵a_y + ۲۰a_z$$

$$A = a_x + ۲a_y - ۳a_z$$

$$\Rightarrow A \cdot (B \times C) = (a_x + ۲a_y - ۳a_z) \cdot (۸a_x + ۵a_y + ۲۰a_z)$$

$$= (۱ \times ۸) + (۲ \times ۵) + (-۳ \times ۲۰)$$
$$= ۸ + ۱۰ - ۶۰ = -۴۲$$

$$(A \times B) \cdot C = ?$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ ۰ & -۴ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۲a_x - ۴a_z + ۰a_y + ۰a_z - ۱۲a_x - a_y$$
$$= -۱۰a_x - a_y - ۴a_z$$
$$C = ۵a_x + ۰a_y - ۲a_z$$
$$\Rightarrow (A \times B) \cdot C = (-۱۰a_x - a_y - ۴a_z) \cdot (۵a_x + ۰a_y - ۲a_z)$$
$$= -۵۰ + ۰ + ۸ = -۴۲$$

پاسخ قسمت ح) $A \times (B \times C) = ?$

$$B \times C = ۸a_z + ۵a_y + ۲۰a_z$$

(این بردار یعنی $B \times C$ در قسمت چ بتفصیل محاسبه شده است).
لذا : $A \times (B \times C) = (a_x + ۲a_y - ۳a_z) \times (۸a_x + ۵a_y + ۲۰a_z)$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ (B \times C)_z & (B \times C)_y & (B \times C)_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ ۸ & ۵ & ۲۰ \end{vmatrix}$$

$$۴۰a_x + ۵a_z - ۲۴a_y - ۱۶a_z + ۱۵a_x - ۲۰a_y$$
$$= ۵۵a_x - ۴۴a_y - ۱۱a_z$$
$$(A \times B) \times C = ?$$
$$A \times B = -۱۰a_x - a_y - ۴a_z$$

(این بردار یعنی $A \times B$ در قسمت چ بتفصیل محاسبه شده است).
لذا :

$$(A \times B) \times C = (-۱۰a_x - a_y - ۴a_z) \times (۵a_x + ۰a_y - ۲a_z)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ (A \times B)_x & (A \times B)_y & (A \times B)_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ -۱۰ & -۱ & -۴ \\ ۵ & ۰ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۲a_x + ۰a_z - ۲۰a_y + ۵a_z - ۲۰a_y + ۰a_x$$
$$= ۲a_x - ۴۰a_y + ۵a_z$$

مسئله ۲: بردارهای زیر داده شده‌اند

$$A = a_x - a_y ۲ + a_z ۳$$
$$B = a_x + a_y - a_z ۲$$

عبارتی برای بردار واحد C، که هم بر A و هم بر B عمود پیدا کنید.

پاسخ مسئله ۲:

بردار واحدی که هم بر A و هم بر B عمود است، بردار حاصل ضرب خارجی آنهاست که تبدیل به واحد شده باشد.

$$A \times B = D = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = a_x + ۵a_y + ۳a_z$$

$$C = \frac{D}{|D|} = \frac{a_x + ۵a_y + ۳a_z}{\sqrt{۳۵}}$$

مسئله ۳: دو میدان برداری با $A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$ و $B = a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z$ داده شده است که در آن، تمام مؤلفه‌ها می‌توانند توابعی از مختصات فضایی باشند. اگر این دو میدان در تمام نقاط با یکدیگر موازی باشند، چه رابطه‌ای باید بین مؤلفه‌های آنها برقرار باشد؟

پاسخ مسئله ۳:

تعریف ـ دو بردار را موازی هم گویند هرگاه مضارب عددی مثبت یا منفی یکدیگر باشند. یعنی :

$$\vec{A} \| \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} = k\vec{B} \\ k \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین :

$$a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z = k(a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z)$$

$$a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z = k a_x B_x + k a_y B_y + k a_z B_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_x = kB_x \\ A_y = kB_y \\ A_z = kB_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A_x}{B_x} = k \\ \frac{A_y}{B_y} = k \\ \frac{A_z}{B_z} = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = k$$

مسئله ۴: نشان دهید اگر $A \cdot B = A \cdot C$ و $A \times B = A \times C$، که در آنها A بردار صفر نیست، آنگاه $B = C$

پاسخ مسئله ۴:

$$\begin{cases} A \cdot B = A \cdot C & (*) \\ A \times B = A \times C & (**) \\ \vec{A} \neq \vec{O} & (***) \end{cases}$$

$$A \times B = A \times C \Rightarrow A \times (A \times B) = A \times (A \times C)$$

بنابه قاعده «$back - cab$» مذکور در صفحه ۲۴ کتاب درسی دیوید چنگ داریم :

$$A \times (B \times C) = B \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot B)$$

$$\begin{cases} A \times (A \times B) = A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) \\ A \times (A \times C) = A \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot A) \end{cases}$$

بنابه $(**)$: $A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) = A \times (A \cdot C) - C(A \cdot A)$

بنابه $(*)$: $A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) = A \times (A \cdot B) - C(A \cdot A)$

بنابه $(***)$: $B \times |A|^2 = C \times |A|^2 \Rightarrow \vec{B} = \vec{C}$

مسئله ۵: یک بردار مجهول را می‌توان تعیین کرد، اگر هم ضرب عددی و هم ضرب برداری آن با یک بردار معلوم داده شده باشد، با فرض اینکه A یک بردار معلوم است، بردار مجهول X را تعیین کنید اگر هم p و هم B داده شده باشند $p = A \cdot X$ و $B = A \times X$

پاسخ مسئله ۵:

$$P = A \cdot X \Rightarrow \underline{PA = (A \cdot X)A} \qquad (*)$$

$$B = A \times X \Rightarrow B \times A = (A \times X) \times A \qquad (**)$$

$$A \times (B \times C) = B \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot B)$$

$$\Rightarrow (B \times C) \times A = -[B(A \cdot C) - C(A \cdot B)]$$

$$\Rightarrow (B \times C) \times A = C(A \cdot B) - B(A \cdot C) \qquad (***)$$

$$(***), (**) \Rightarrow B \times A = (A \times X) \times A$$

$$= X(A \cdot A) - A(A \cdot X)$$

$$= XA^2 - A(A \cdot X)$$

$$(*) \Rightarrow B \times A = XA^2 - PA$$

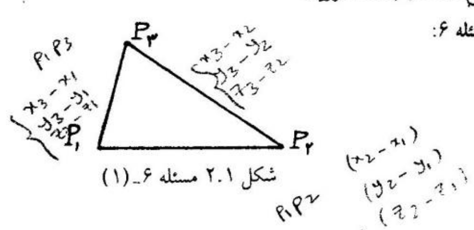
$$\Rightarrow X = \frac{PA + B \times A}{A^2}$$

مسئله ۶: سه رأس مثلثی عبارتند از $P_1(0, 1, -2)$، $P_2(4, 1, -3)$ و $P_3(6, 2, 5)$.

الف) تعیین کنید آیا $\Delta P_1P_2P_3$ قائم الزاویه است یا نه.

ب) سطح مثلث را بدست آورید.

پاسخ مسئله ۶:



شکل ۲.۱ مسئله ۶_(۱)

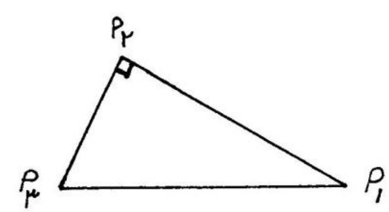
پاسخ قسمت الف)

بردارهای P_1P_2، P_1P_3، P_2P_3 را تشکیل می‌دهیم. می‌دانیم هرگاه دو برداربرهم عمود باشند، حاصل ضرب داخلی آنها مساوی صفر است. لذا حاصل ضرب داخلی دوبدوی بردارهای فوق را تشکیل می‌دهیم هر کدام صفر شد آن دو بردار بر هم عمودند یعنی :

$$\begin{cases} P_1P_2 = 4a_x + 0a_y - a_z \\ P_1P_3 = 6a_x + a_y + 7a_z \\ P_2P_3 = 2a_x + a_y + 8a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P_1P_2)\cdot(P_1P_3) = 24 + 0 - 7 \neq 0 \\ (P_1P_2)\cdot(P_2P_3) = 8 + 0 - 8 = 0 \\ (P_1P_3)\cdot(P_2P_3) = 12 + 1 + 56 \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین مثلث $P_1P_2P_3$ در راس P_2 قائم الزاویه است.



شکل ۲.۲ مسئله ۶_(۲)

پاسخ قسمت ب)

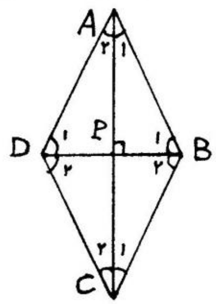
$$S = \frac{1}{2}|P_1P_2|\cdot|P_2P_3|$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{16+0+1})(\sqrt{4+1+64}) = \frac{(\sqrt{17})(\sqrt{69})}{2} = 17/122454379$$

مسئله ۷: نشان دهید که قطرهای یک لوزی برهم عمودند. (لوزی یک متوازی الاضلاع با اضلاع متساوی است.)

پاسخ مسئله ۷:

$$\begin{cases} AB \| DC \\ DB \ \text{مورّب} \end{cases} \Rightarrow \quad <B_1 = <D_2$$



شکل ۲.۳ مسئله ۷

$$\Delta ABD : AB = AD \Rightarrow <B_1 = <D_1$$

$$ABCD : (\text{متوازی الاضلاع}) \Rightarrow <B = <D$$

$$\begin{cases} <B_1 = <D_2 \\ <B_1 = <D_1 \end{cases} \Rightarrow <D_1 = <D_2 \qquad .\text{است} \Rightarrow D \text{نیمساز زاویه} DB$$

بهمین ترتیب ثابت می‌شود DB نیمساز زاویه B و AC نیمساز زوایای A و C است یعنی :

$$\begin{cases} <A_1 = <A_2 \\ <B_1 = <B_2 \\ <C_1 = <C_2 \end{cases}$$

$$ABCD : (\text{متوازی الاضلاع}) \Rightarrow <A + <B = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \left(\frac{<A + <B}{2}\right) = 90^\circ$$

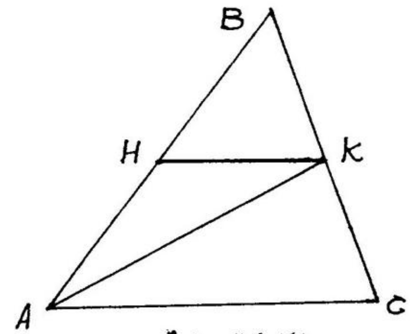
$$\Rightarrow (<A_1 + <B_1) = 90^\circ$$

$$\Delta APB : \begin{cases} <A_1 + <B_1 + <P = 180^\circ \\ <A_1 + <B_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow <P = 90^\circ \Rightarrow AC \perp DB$$

مسئله ۸: ثابت کنید خطی که نقاط وسط دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

پاسخ مسئله ۸:

$$\begin{cases} BH = AH \\ BK = CK \end{cases}$$



شکل ۲.۴ مسئله ۸

$$HK = AK - AH = (AB + BK) - AH$$

$$= (AB + \frac{1}{2}BC) - \frac{1}{2}AB$$

$$\frac{1}{2}(AB + BC) = \frac{1}{2}AC$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که بردار HK مضرب عددی مثبتی از بردار AC است لذا این دو بردار موازی هم هستند. ضریب $\frac{1}{2}$ نیز نشان می‌دهد که اندازه بردار HK نصف اندازه بردار AC است.

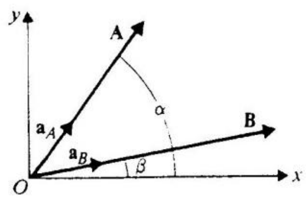
مسئله ۹: بردارهای واحد a_A و a_B جهت‌های بردارهای دوبعدی A و B را نشان می‌دهند که مطابق شکل ۲ـ۳۴ با محور مرجع، x، به ترتیب زاویهٔ α و β را می‌سازند.

الف) با در نظر گرفتن ضرب عددی $A \cdot a_B$، فرمولی برای بسط کسینوس اختلاف دو زاویه، $\cos(\alpha - \beta)$ بیابید.

ب) فرمولی برای $\sin(\alpha - \beta)$ بدست آورید.

پاسخ مسئله ۹:

قسمت الف)



شکل ۲.۵ مسئله ۹

$$A \cdot a_B = |A||a_B|\cos(\alpha - \beta) = |A|\cos(\alpha - \beta)$$

$$A \cdot a_B = (A_x a_x + A_y a_y) \cdot a_B = |A|\cos(\alpha - \beta)$$

$$A_x(a_x \cdot a_B) + A_y(a_y \cdot a_B) = A_x|a_y||a_B|\cos\beta + A_y|a_y||a_B|\cos(90^\circ - \beta)$$

$$= A_x\cos\beta + A_y\sin\beta = |A|\cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} A_x = |A|\cos\alpha\ ,\ A_y = |A|\sin\alpha \\ A_x\cos\beta + A_y\sin\beta = |A|\cos(\alpha - \beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

پاسخ قسمت ب)

$$A \times a_B = |A|\sin(\alpha - \beta)$$

$$A \times a_B = (A_x a_x + A_y a_y) \times a_B = A_x(a_x \times a_B) + A_y(a_y \times a_B)$$

$$= A_x\sin\beta + A_y\sin(90^\circ - \beta)$$

$$= |A|\sin(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} A_x = |A|\cos\alpha\ ,\ A_y = |A|\sin\alpha \\ A_x\sin\beta + A_y\cos\beta = |A|\sin(\alpha-\beta) \end{cases}$$

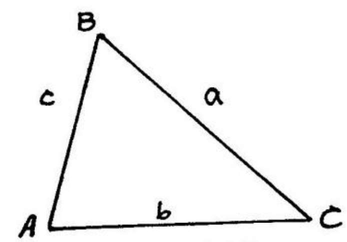
$$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

مسئله ۱۰: قانون سینوس‌ها را در یک مثلث اثبات کنید.

پاسخ مسئله ۱۰:

$$\begin{cases} |AB| = c \\ |BC| = a \\ |AC| = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB \times AC = |AB|\cdot|AC|\cdot|\sin A|\vec{a}_N = 2S \\ AC \times BC = |AC|\cdot|BC|\cdot|\sin C|\vec{a}_N = 2S \end{cases}$$



شکل ۲.۶ مسئله ۱۰

(S مساحت مثلث ABC می‌باشد).

$$|AB|\cdot|AC|\cdot|\sin A|\vec{a}_N = |AC||BC||\sin C|\vec{a}_N$$

$$|AB|\cdot|\sin A| = |BC|\cdot|\sin C|$$

$$c\cdot\sin A = a\sin C \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} AC \times BC = |AC|\cdot|BC|\cdot|\sin C|\vec{a}_N = 2S \\ AB \times BC = |AB|\cdot|BC|\cdot|\sin B|\vec{a}_N = 2S \end{cases}$$

$$|AB||BC||\sin B|\vec{a}_N = |AC||BC||\sin C|\vec{a}_N$$

$$|AB||\sin B| = |AC||\sin C|$$

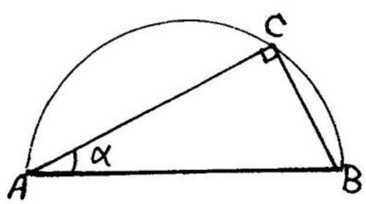
$$c\cdot\sin B = b\sin C \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (**)$$

$$(**),(*) \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

مسئله ۱۱: ثابت کنید زاویه محاطی در یک نیم دایره قائمه است.

پاسخ مسئله ۱۱:

$$AC\cdot CB = AC(CA + AB)$$
$$= AC\cdot CA + AC\cdot AB$$



شکل ۲.۷ مسئله ۱۱

$$= -|AC|^2 + |AC||AB|\cos\alpha$$
$$= -|AC|^2 + |AC||AB|\frac{|AC|}{|AB|}$$
$$= -|AC|^2 + |AC|^2 = 0$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار AC و CB مساوی با صفر شد، لذا زاویه بین این دو بردار ۹۰° است.

مسئله ۱۲: درستی قاعدهٔ $back - cab$ را در مورد ضرب سه‌گانه برداری سه بردار، طبق معادلهٔ

(۲_۲۰) در مختصات کارتزین تحقیق نمایید.

پاسخ مسئله ۱۲:

فرض کنیم : $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$B \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

$$= a_x(y_B z_C - z_B y_C) + a_y(z_B x_C - x_B z_C) + a_z(x_B y_C - y_B x_C)$$

$$A \times (B \times C) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ x_A & y_A & z_A \\ y_B z_C - z_B y_C & z_B x_C - x_B z_C & x_B y_C - y_B x_C \end{vmatrix}$$

$$= (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B)a_x$$
$$+(y_B z_A z_C - y_C z_A z_B - x_A x_B y_C + x_A x_C y_B)a_y$$
$$+(x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C z_B)a_z \qquad (*)$$

$$A \cdot C = x_A x_C + y_A y_C + z_A z_C$$

$$A \cdot B = x_A x_B y_A + y_B + z_A z_B$$

$$B(A \cdot C) = (x_A x_B x_C + x_B y_A y_C + x_B z_A z_C \,,\, x_A x_C y_B + y_A y_B y_C + y_B z_A z_C$$
$$,\, x_A x_C z_B + y_A y_C z_B + z_A z_B z_C) \qquad (**)$$

$$C(A \cdot B) = (x_A x_B x_C + x_C y_A y_B + x_C z_A z_B, x_A x_B y_C + y_A y_B y_C + y_C z_A z_B$$
$$, x_A x_B z_C + y_A y_B z_C + z_A z_B z_C) \qquad (***)$$

رابطه $(***)$ را از $(**)$ کم می‌کنیم:

$$B(A \cdot C) - C(A \cdot B) = (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B$$

$$, y_B z_A z_C - y_C z_A z_B + x_A x_C y_B - x_A x_B y_C$$
$$, x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C y_B)$$
$$= (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B)a_x$$
$$+(y_B z_A z_C - y_C z_A z_B - x_A x_B y_C + x_A x_C y_B)a_y$$
$$+(x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C z_B)a_z \qquad (****)$$
$$(****), (*) \Rightarrow A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

مسئله ۱۳: با روابط برداری ثابت کنید که دو خط در صفحه xy ($L_1 : b_1 x + b_2 y = c$ ؛ $L_2 : b'_1 x + b'_2 y = c'$) برهم عمود هستند اگر شیب آنها منفی معکوس یکدیگر باشد.

پاسخ مسئله ۱۳:

$$\begin{cases} L_1 \text{شیب} = m_1 = -\dfrac{b_1}{b_2} \\ L_2 \text{شیب} = m_2 = -\dfrac{b'_1}{b'_2} \end{cases}$$

بنابه فرض مسئله :

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_1 = -(-\frac{b'_2}{b'_1}) = \frac{b'_2}{b'_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 : -b'_2 x + b'_1 y = \dfrac{cb'_1}{b_2} \\ L_2 \ = b'_1 x + b'_2 y = c' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 \text{بردار هادی خط} = (-b'_2)a_x + (b'_1)a_y + 0 a_z = V_1 \\ L_2 \text{بردار هادی خط} = (b'_1 a_x + (b'_2)a_y + 0 a_z = V_2 \end{cases}$$

$$V_1 \cdot V_2 = -b'_1 b'_2 + b'_1 b'_2 + 0 = 0 \Rightarrow V_1 \perp V_2$$

مسئله ۱۴:

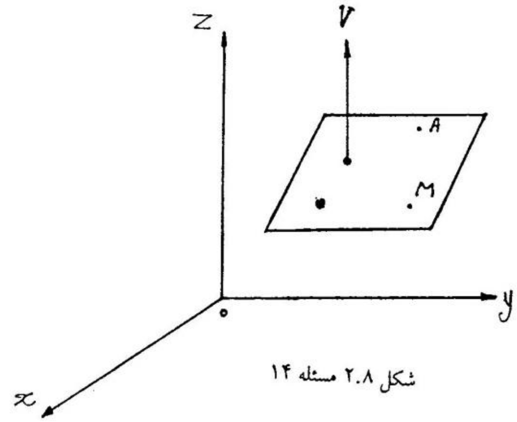
الف) ثابت کنید که معادله هر صفحه در فضا را می‌توان به صورت $b_1 x + b_2 y + b_3 z = c$ نوشت.

(راهنمائی : ثابت کنید ضرب نقطه‌ای بردار مکان به هر نقطه از صفحه و یک بردار عمودی، ثابت است.)

ب) عبارتی را برای عمود واحد گذرنده از مبدأ بیابید.

پ) در مورد صفحهٔ $3x - 2y + 6z = 5$، فاصلهٔ عمودی از مبدأ تا صفحه را پیدا کنید.

پاسخ مسئله ۱۴:



شکل ۲.۸ مسئله ۱۴

پاسخ قسمت الف)

فرض می‌کنیم از نقطه مفروض $M(x_1, y_1, z_1)$ صفحه P عمود بر بردار $\vec{V}(b_1, b_2, b_3)$ رسم شده باشد. در این صورت بردار $\vec{V}$ همان بردار نرمال صفحه خواهد بود. بنابراین اگر نقطه $A(x, y, z)$ نقطه‌ای اختیاری از صفحه P باشد نتیجه می‌گیریم:

$$\vec{MA}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\forall A \in P \Rightarrow \vec{V} \perp \vec{MA} \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{MA} = 0$$

$$\Rightarrow b_1(x - x_1) + b_2(y - y_1) + b_3(z - z_1) = 0$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z = \underbrace{b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1}_{C}$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z = c$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} \vec{V}(b_1, b_2, b_3) = \text{بردار نرمال صفحه} = b_1 a_x + b_2 a_y + b_3 a_z \\ |V| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \end{cases}$$

$$a_v = \frac{\vec{V}}{|V|} = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}(b_1 a_x + b_2 a_y + b_3 a_z)$$

پاسخ قسمت پ)

بشرطی که معادله صفحه بصورت $ax + by + cz = d$ و مختصات نقطه بصورت (x_0, y_0, z_0) باشد، فاصله این نقطه از صفحه فوق از رابطه $h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ بدست می‌آید.

$$\begin{cases} P : 3x - 2y + 6z = 5 \\ (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow h = \frac{|3(0) + (-2)(0) + 6(0) - 5|}{\sqrt{9 + 4 + 36}}$$

$$= \frac{5}{7} = 0/7142857143$$

مسئله ۱۵: مؤلفه بردار $A = -a_y z + a_z y$ را در نقطه $P_1(0, -2, 3)$ که به سمت نقطه $P_2(\sqrt{3}, -60, 1)$ جهت گرفته است، بیابید.

پاسخ مسئله ۱۵:

P_2 در مختصات استوانه‌ای داده شده است لذا:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi = \sqrt{3}\cos(-60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = r\sin\phi = \sqrt{3}\sin(-60°) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$P_2(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 1) \Rightarrow \vec{P_1P_2} \ (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -2)$$

$$\vec{P_1P_2} \text{ مولفه بردار} A \text{در جهت } = \frac{(A \cdot \vec{P_1P_2})}{|P_1P_2|}$$

$$= \frac{-\frac{z}{2} - 2y}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 4}} = \frac{-(z + 4y)}{2\sqrt{5}} = \frac{-(3 - 8)}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1/118033989 \simeq 1/12$$

مسئله ۱۶: موقعیت یک نقطه در مختصات استوانه‌ای توسط $(۴، ۲\pi/۳، ۳)$ مشخص شده است.
محل نقطه را در حالتهای زیر تعیین کنید.

الف) در مختصات کارتزین؟

ب) در مختصات کروی؟

پاسخ مسئله ۱۶:

قسمت الف)

$$\begin{cases} x = r\cos\phi = ۴\times\cos\frac{۲\pi}{۳} = -۲ \\ y = r\sin\phi = ۴\times\sin\frac{۲\pi}{۳} = ۲\sqrt{۳} \quad \Rightarrow A(-۲, ۲\sqrt{۳}, ۳) \\ z = z = ۳ \end{cases}$$

پاسخ قسمت ب)

$$R = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = \sqrt{۴+۱۲+۹} = ۵$$

$$\theta = \cos^{-۱}\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} = \cos^{-۱}\frac{۳}{\sqrt{۴+۱۲+۹}}$$

$$= \cos^{-۱}(۰/۶) = (۵۳^\circ, ۷', ۴۸/۳۷'')$$

$$\phi = \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) = \tan^{-۱}(\frac{۲\sqrt{۳}}{-۲}) = ۱۲۰^\circ$$

مسئله ۱۷: یک میدان در مختصات کروی توسط $E = a_R(۲۵/R^۲)$ توصیف شده است.

الف) $|E|$ و E_x را در نقطه $P(-۳, ۴, -۵)$ بیابید.

ب) زاویه‌ای را که E با بردار $B = a_x ۲ - a_y ۲ + a_z$ در نقطه P می‌سازد بدست آورید.

پاسخ مسئله ۱۷:

پاسخ قسمت الف)

$$E = a_R(\frac{۲۵}{R^۲})$$

در مختصات کروی $R = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$

$$\Rightarrow E = a_R(\frac{۲۵}{(x^۲+y^۲+z^۲)})$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{۲۵}{(۹+۱۶+۲۵)} = \frac{۱}{۲}$$: در نقطه P

$$E_x = \vec{E}\cdot a_x = \frac{۲۵}{R^۲}(a_R\cdot a_x) = \frac{۲۵}{R^۲}(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}})$$

$$= \frac{۲۵}{R^۲}(\frac{-۳}{\sqrt{۹+۱۶+۲۵}}) = \frac{۲۵(-۳)}{۵۰(\sqrt{۵۰})}$$

$$= \frac{-۳}{۱۰\sqrt{۲}} = -۰/۲۱۲۱۳۲۰۳۴ \simeq -۰/۲۱۲$$

پاسخ قسمت ب)

$$E = a_R(\frac{۲۵}{R^۲}) + a_\theta(۰) + a_\phi(۰)$$

میدان E را به مختصات کارتزین می‌بریم :

$$E = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$$

که در آن :

$$\begin{cases} A_x = \frac{A_R x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} + ۰ - ۰ \\ A_y = \frac{A_R y}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} + ۰ + ۰ \\ A_z = \frac{A_R z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} - ۰ \end{cases}$$

(رجوع کنید به مثال (۲_۱۱) حل شده در صفحه ۴۳ کتاب درسی)

$$\Rightarrow E = a_x(\frac{۲۵x}{R^۳}) + a_y(\frac{۲۵y}{R^۳}) + a_z(\frac{۲۵z}{R^۳})$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = \sqrt{۹+۱۶+۲۵} = \sqrt{۵۰} \\ P(-۳, ۴, -۵) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = a_x\left(\frac{۲۵(-۳)}{۵۰\sqrt{۵۰}}\right) + a_y\left(\frac{۲۵(۴)}{۵۰\sqrt{۵۰}}\right) + a_z\left(\frac{۲۵(-۵)}{۵۰\sqrt{۵۰}}\right)$$

$$= a_x(-۰/۲۱۲۱۳۲۰۳۳۴) + a_y(+۰/۲۸۲۸۴۲۷۱۲۵) + a_z(-۰/۳۵۳۵۵۳۳۹۰۶)$$

$$E \cdot B = |E||B|\cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-۱}\left(\frac{E \cdot B}{|E||B|}\right)$$

$$E \cdot B = ۲(-۰/۲۱۲۳۲۰۳۴۴) - ۲(+۰/۲۸۲۸۴۲۷۱۲۵) + ۱(-۰/۳۵۳۵۵۳۳۹۰۶)$$

$$= -۱/۳۴۳۵۰۲۸۸۴$$

$$\begin{cases} |E| = \frac{۱}{۲} \\ |B| = ۳ \end{cases} \Rightarrow |E||B| = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-۱}\left(\frac{-۱/۳۴۳۵۰۲۸۸۴}{(\frac{۳}{۲})}\right) = ۱۵۳/۵۹۴۴۳۷۶ \simeq ۱۵۴^\circ$$

مسئله ۱۸: بردارهای پایهٔ a_R, a_θ و a_ϕ دستگاه مختصات کروی را در مختصات کارتزین بیان کنید.

پاسخ مسئله ۱۸:

	a_R	a_θ	a_ϕ
a_x	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
a_y	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
a_z	$\cos\theta$	$-\sin\phi$	۰

$$\begin{cases} (a_R \cdot a_x)a_x = \sin\theta\cos\phi a_x \\ (a_R \cdot a_y)a_y = \sin\theta\sin\phi a_y \\ (a_R \cdot a_z)a_z = \cos\theta a_z \end{cases}$$

$$a_R = \sin\theta\cos\phi a_x + \sin\theta a_y + \cos\theta a_z$$

$$x = R\sin\theta\cos\phi \Rightarrow \sin\theta\cos\phi = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$$

$$y = R\sin\theta\sin\phi \Rightarrow \sin\theta\sin\phi = \frac{y}{R} = \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$$

$$z = \cos\theta R \Rightarrow \cos\theta = \frac{z}{R} = \frac{z}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$$

$$\boxed{\Rightarrow a_R = \frac{x a_x + y a_y + z a_z}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}}$$

$$\begin{cases} (a_\theta \cdot a_x)a_x = \cos\theta\cos\phi a_x \\ (a_\theta \cdot a_y)a_y = \cos\theta\sin\phi a_y \\ (a_\theta \cdot a_z)a_z = -\sin\theta a_z \end{cases}$$

$$a_\theta = \cos\theta\cos\phi a_x + \cos\theta\sin\phi a_y - \sin\theta a_z$$

$$\begin{cases} \tan\phi = \frac{y}{x}, \frac{۱}{۱ + \tan^۲\phi} = \cos^۲\phi \\ \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \\ \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \end{cases}$$: بطور مشابه

$$\boxed{\Rightarrow a_\theta = \frac{xz a_x + yz a_y}{\sqrt{x^۲ + y^۲} \times \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} - \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} a_z}$$

$$\begin{cases} (a_\theta \cdot a_x)a_x = -\sin\phi a_x \\ (a_\theta \cdot a_y)a_y = \cos\phi a_y \\ (a_\phi \cdot a_z)a_z = ۰ \end{cases}$$

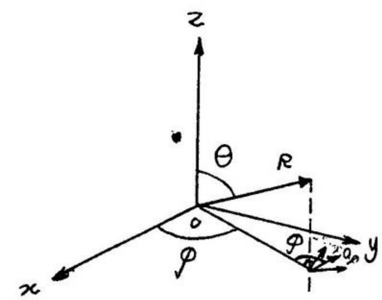
$$a_\phi = -\sin\phi a_x + \cos\phi a_y$$

$$\boxed{\Rightarrow a_\phi = \frac{-y a_x + x a_y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}}$$

مسئله ۱۹: مقادیر ضرب‌های زیر را در مورد بردارهای پایه تعیین کنید:

الف) $a_x \cdot a_\phi$	ب) $a_\theta \cdot a_y$	پ) $a_r \times a_x$
ت) $a_R \cdot a_r$	ث) $a_y \cdot a_R$	ج) $a_R \cdot a_z$
چ) $a_R \times a_z$	ح) $a_\theta \cdot a_z$	خ) $a_z \times a_\theta$

پاسخ مسئله ۱۹:



شکل ۲.۹ مسئله ۱۹ـ(الف)

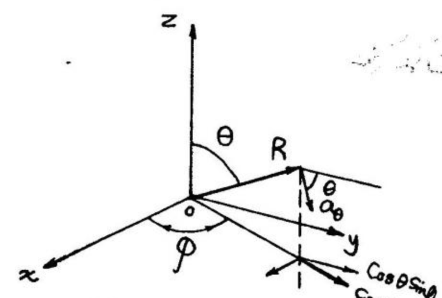
الف) $a_x \cdot a_\phi$

$$a_x \cdot a_\phi = 1 \times 1 \times \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin\phi$$

چون در جهت $(-a_x)$ لذا: $a_x \cdot a_\phi = -\sin\phi$

ب) $a_\theta \cdot a_y$

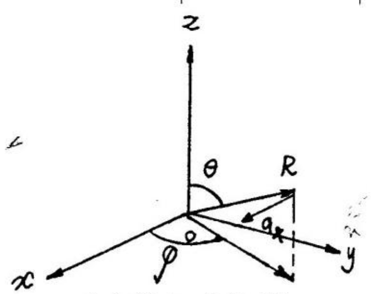
$$a_\theta \cdot a_y = \cos\theta \sin\phi$$



شکل ۲.۱۰ مسئله ۱۹ـ(ب)

پ) $a_r \times a_x$

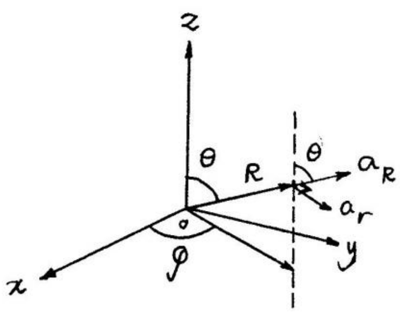
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad a_r \times a_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\sin\phi\, a_z$$



شکل ۲.۱۱ مسئله ۱۹ـ(پ)

ت) $a_R \cdot a_r$

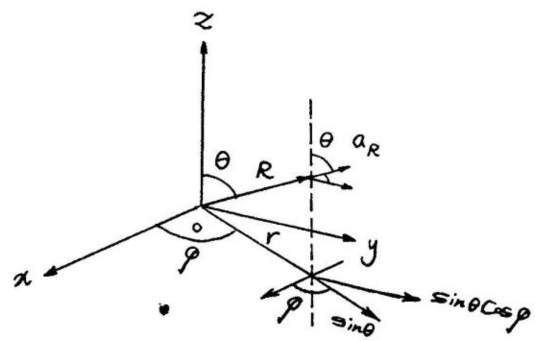
$$a_R \cdot a_r = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$



شکل ۲.۱۲ مسئله ۱۹ـ(ت)

ث) $a_y \cdot a_R$

$$a_y \cdot a_R = \sin\theta \sin\phi$$



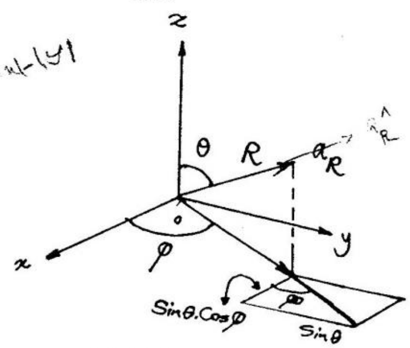
شکل ۲.۱۳ مسئله ۱۹_(ث)

ج) $a_R \cdot a_z$

$$a_R \cdot a_z = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\widehat{a_R, a_Z})$$
$$= \cos\theta$$

|x+y|<|x|-|y|

x<0



شکل ۲.۱۴ مسئله ۱۹_(ج)

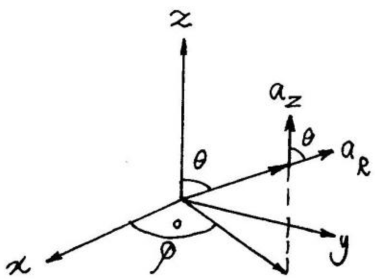
چ) $a_R \times a_z$

$$\begin{cases} a_R = (\sin\theta\cos\phi \ , \ \sin\theta\sin\phi \ , \ \cos\theta) \\ a_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

$$a_R \times a_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sin\theta \cdot \sin\phi a_x - \cos\phi \sin\theta a_y$$
$$= \sin\theta(\sin\phi a_x - \cos\phi a_y)$$
$$= -\sin\theta \cdot a_\phi$$

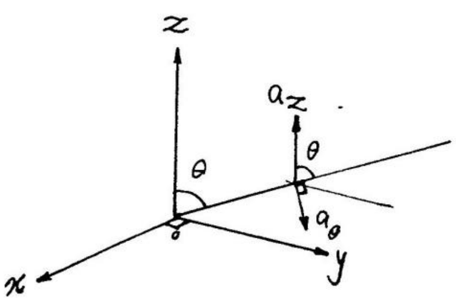
($a_\phi = -\sin\phi a_x + \cos\phi a_y$:زیرا)



شکل ۲.۱۵ مسئله ۱۹_(چ)

ح) $a_\theta \cdot a_z$

$$a_\theta \cdot a_z = |1| \cdot |1| \cos(\widehat{a_\theta, a_z}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$$
$$= -\sin\theta$$



شکل ۲.۱۶ مسئله ۱۹_(ح)

خ) $a_z \times a_\theta$

$$\begin{cases} a_z = (0, 0, 1) \\ a_\theta = (\cos\theta\cos\phi \ , \ \cos\theta\sin\phi \ , \ -\sin\theta) \end{cases}$$

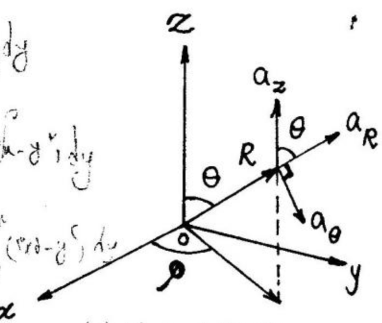
$$a_z \times a_\theta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta\cdot\cos\phi\cdot a_y - \cos\theta\cdot\sin\phi\cdot a_x$$

$$= \cos\theta(-\sin\phi\, a_x + \cos\phi\cdot a_y)$$

$$= \cos\theta\cdot a_\phi$$

(زیرا: $a_\phi = -\sin\phi\cdot a_x + \cos\phi\cdot a_y$)



شکل ۲.۱۷ مسئله ۱۹_(خ)

مسئله ۲۰: تابع برداری $F = a_x xy + a_y(3x - y^2)$ داده شده است، انتگرال $\int F\cdot dl$ را از $P_1(5,6)$ تا $P_2(3,3)$ در شکل ۲_۳۵ محاسبه کنید.

الف) در امتداد مسیر مستقیم P_1P_2.

ب) در امتداد مسیر P_1AP_2.

پاسخ مسئله ۲۰:

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} F = a_x xy + a_y(3x - y^2) \\ dl = a_x dx + a_y dy + a_z dz \end{cases}$$

$$\int F\cdot dl = \int [a_x xy + a_y(3x - y^2)][a_x dx + a_y dy + a_z dz]$$

$$= \int [xydx + (3x - y^2)dy] = \int xydx + \int (3x - y^2)dy$$

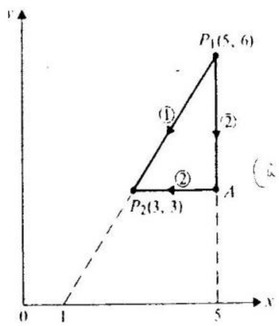
معادله مسیر P_1P_2 بصورت زیر است:

$$\frac{y-6}{x-5} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3+2y}{3} \ , \ y = \frac{3x-3}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{P_1P_2} F\cdot dl = \int_5^3 x\left(\frac{3x-3}{2}\right)dx + \int_6^3 \left[3\left(\frac{3+2y}{3}\right) - y^2\right]dy$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_5^3 + \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{2y^2}{2} + 3y\right)\Big|_6^3$$

$$= \frac{3}{2}\left(9 - \frac{9}{2} - \frac{125}{3} + \frac{25}{2}\right) + (-9 + 9 + 9 + 72 - 36 - 18) = -10$$



شکل ۲.۱۸ مسئله ۲۰

پاسخ قسمت ب)

$$\int_{P_1AP_2} F\cdot dl = \int_{P_1A} F\cdot dl + \int_{AP_2} F\cdot dl$$

$$= \int_{P_1A} xydx + \int_{P_1A}(3x - y^2)dy + \int_{AP_2} xydx + \int_{AP_2}(3x - y^2)dy$$

$$= 0 + \int_6^3 (3(5) - y^2)dy + 3\int_5^3 xdx + 0$$

$$= (15y - \frac{y^3}{3})\Big|_6^3 + \frac{3x^2}{2}\Big|_5^3$$

$$= (۴۵ - ۹) - (۹۰ - ۷۲) + \frac{۳}{۲}(۹ - ۲۵) = -۶$$

مسئله ۲۱: تابع برداری $E = a_x y + a_y x$ داده شده است. انتگرال خطی عددی $\int E \cdot dl$ را از نقطهٔ $P_۱(۲,۱,-۱)$ تا نقطه $P_۲(۸,۲,-۱)$ محاسبه کنید.

الف) در امتداد سهمی $x = ۲y^۲$.

ب) در امتداد خط راست رابط دو نقطه.

آیا E یک میدان ذخیره شونده است؟

پاسخ مسئله ۲۱:

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} E = a_x y + a_y x \\ dl = a_x d_x + a_y d_y \end{cases} \Rightarrow \int_{P_۱}^{P_۲} E \cdot dl = \int_{P_۱}^{P_۲} (y dx + x dy)$$

$$۲y^۲ = x \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x}{۲}}$$

$$\Rightarrow \int_{P_۱}^{P_۲} E \cdot dl = \int_{P_۱}^{P_۲} \sqrt{\frac{x}{۲}} dx + \int_{P_۱}^{P_۲} ۲y^۲ dy$$

$$= \int_۲^۸ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۲}} dx + ۲\int_۱^۲ y^۲ dy = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \int_۲^۸ x^{\frac{۱}{۲}} dx + \frac{۲}{۳} y^۳ |_۱^۲$$

$$= \frac{۲x^{\frac{۳}{۲}}}{۳\sqrt{۲}} |_۲^۸ + \frac{۲}{۳}(۸ - ۱) = \frac{۲}{۳}[\frac{۸\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}} - \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} + ۷] = ۱۴$$

پاسخ قسمت ب)

معادله خط گذرنده از نقاط $P_۲, P_۱$:

$$\begin{cases} \frac{x - ۲}{۶} = \frac{y - ۱}{۱} \\ z = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۶y - ۴ \\ y = \frac{x}{۶} + \frac{۴}{۶} \\ z = -۱ \end{cases}$$

$$\int_{P_۱}^{P_۲} E \cdot dl = \int_{P_۱}^{P_۲} y dx + \int_{P_۱}^{P_۲} x dy$$

$$= \int_۲^۸ (\frac{x}{۶} + \frac{۴}{۶}) dx + \int_۱^۲ (۶y - ۴) dy$$

$$= (\frac{x^۲}{۱۲} + \frac{x}{۶}x)|_۲^۸ + (۳y^۲ - ۴y)|_۱^۲$$

$$= [\frac{۶۴}{۱۲} + \frac{۴(۸)}{۶} - \frac{۴}{۱۲} - \frac{۴(۲)}{۶}] + [۳(۴) - ۴(۲) - ۳ + ۴] = ۹ + ۵ = ۱۴$$

خیر- زیرا کرل ($curl$) آن مخالف صفر است.

مسئلهٔ ۲۲: برای E در مسئله ۲۱ $\int E \cdot dl$ را از $P_۳(۳,۴,-۱)$ تا $P_۴(۴,-۳,-۱)$ با تبدیل E و نیز موقعیت‌های $P_۳$ و $P_۴$ به مختصات استوانه‌ای، محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۲:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \\ \tan\phi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$P_۳ \begin{cases} r_۳ = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵ \\ \phi_۳ = \tan^{-۱}(\frac{۴}{۳}) = (۵۳^\circ, ۷', ۴۸/۳۷'') = ۰/۹۲۷۲۹۵۲۱۸(Rad) \\ z_۳ = -۱ \end{cases}$$

$$P_۴ \begin{cases} r_۴ = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵ \\ \phi_۴ = \tan^{-۱}(-\frac{۳}{۴}) = (-۳۶^\circ, ۵۲', ۱۱/۶۳'') = -۰/۶۴۳۵۰۱۱۰۸۸(Rad) \\ z_۴ = -۱ \end{cases}$$

E را به مختصات استوانه‌ای تبدیل می‌کنیم :

$$E = y a_x + x a_y$$

$$E_r = E \cdot a_r = E_x(a_x \cdot a_r) + E_y(a_y \cdot a_r)$$

$$= y\cos\phi + x\sin\phi = r\sin\phi\cos\phi + r\sin\phi\cos\phi = ۲r\sin\phi\cos\phi$$

$$E_\phi = E \cdot a_\phi = E_x(a_x \cdot a_\phi) + E_y(a_y \cdot a_\phi) = -r\sin^۲\phi + r\cos^۲\phi$$

$$E_z = E \cdot a_z = E_z(a_z \cdot a_z) = ۰(۱) = ۰$$

$$\begin{cases} E(\text{در مختصات استوانه‌ای}) = (r\sin ۲\phi) a_r + (r\cos ۲\phi) a_\phi \\ dl = a_r d_r + a_\phi r d_\phi + a_z dz \end{cases}$$

$$E\cdot dl = r\sin ۲\phi dr + r^{۲}\cos ۲\phi d\phi$$

$$\int E\cdot dl = \int r\sin ۲\phi dr + \int r^{۲}\cos ۲\phi d\phi = ۰ + ۲۵\int \cos ۲\phi d\phi$$

$$\int E\cdot dl = ۲۵\int_{\phi_۳}^{\phi_۴} \cos ۲\phi d\phi = -۲۴$$

(انتگرال گیری در مد رادیان انجام شده است.)

مسئله ۲۳: تابع عددی

$$V = \left(\sin\frac{\pi}{۲}x\right)\left(\sin\frac{\pi}{۳}y\right)\epsilon^{-z}$$

داده شده است.

الف) اندازه و جهت حداکثر نرخ افزایش V را در نقطه $P(۱,۲,۳)$ تعیین کنید.

ب) نرخ افزایش V در P را در جهت مبدأ تعیین کنید.

پاسخ مسئله ۲۳:

پاسخ قسمت الف)

حداکثر نرخ افزایش V در جهت بردار گرادیان است.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$= (\frac{\pi}{۲}\epsilon^{-z}\cos\frac{\pi}{۲}x\sin\frac{\pi}{۳}y)a_x$$

$$+(\frac{\pi}{۳}\epsilon^{-z}\cos\frac{\pi}{۳}y\sin\frac{\pi}{۲}x)a_y - \epsilon^{-z}\sin\frac{\pi}{۲}x\sin\frac{\pi}{۳}y a_z$$

در نقطه P :

$$\nabla V_{(P)} = (\frac{\pi}{۲}\epsilon^{-۳}\cos\frac{\pi}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۳})a_x$$

$$+(\frac{\pi}{۳}\epsilon^{-۳}\cos\frac{۲\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۲})a_y - \epsilon^{-۳}\sin\frac{\pi}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۳}a_z$$

$$= (۰)a_x - ۰/۰۲۶a_y - ۰/۰۴۳a_z$$

$$|\nabla V_P| = \sqrt{(-۰/۰۲۶)^{۲} + (-۰/۰۴۳)^{۲}} = ۰/۰۵$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} P(۱,۲,۳) \\ O(۰,۰,۰) \end{cases} \Rightarrow \overline{PO} = -a_x - ۲a_y - ۳a_z$$

$$|\overline{PO}| = \sqrt{۱۴} \Rightarrow \vec{a}_{PO} = \frac{-a_x - ۲a_y - ۳a_z}{\sqrt{۱۴}}$$

$$\nabla V_P\cdot\vec{a}_{PO} = ((۰)a_x - ۰/۰۲۶a_y - ۰/۰۴۳)\frac{(-a_x - ۲a_y - ۳a_z)}{\sqrt{۱۴}}$$

$$= \frac{(۰/۰۲۶)(۲) + (۰/۰۴۳)(۳)}{\sqrt{۱۴}} = ۰/۰۴۸۳۷ \simeq ۰/۰۴۸۵$$

البته تقریب فوق بادید محاسباتی تقریب خوبی نیست و علّت این امر در گرد کردن مقادیر است وگرنه در یک محاسبه دقیق داریم :

$$\frac{\pi}{۳}\epsilon^{-۳}\cos\frac{۲\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۲} = -۰/۰۲۶۰۶۸۴۴۸۰۴ = A$$

$$-\epsilon^{-۳}\sin\frac{\pi}{۲}\sin\frac{۲\pi}{p}۳ = -۰/۰۴۳۱۱۶۸۶۵۹۹ = B$$

$$\Rightarrow \nabla V_P\cdot\vec{a}_{PO} = \frac{(-۲A - ۳B)}{\sqrt{۱۴}} = ۰/۰۴۸۵۰۴۵۷۳۰۵$$

که دقیق‌تر است.

مسئله ۲۴: انتگرال

$$\oint_s (a_R ۳\sin\theta)\cdot ds$$

را روی سطح کره‌ای به شعاع ۵ و مرکز مبدأ مختصات محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۴:

$$I = \oint_c (a_R ۳\sin\theta)\cdot ds = \oint_c (a_R ۳\sin\theta)(R^{۲}\sin\theta d\theta d\phi)$$

(در مختصات کروی بر روی سطح R ثابت $ds = R^{۲}\sin\theta d\theta d\phi$. برای اطلاع بیشتر رجوع کنید به صفحه ۴۱ کتاب درسی رابطه (۲-۶۷ الف))

$$I = ۳R^{۲}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\sin^{۲}\theta d\theta d\phi = ۳(۲۵)(۲\pi)\int_۰^{\pi}(\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲})d\theta$$

$$= \frac{۷۵(۲\pi)}{۲}(\theta - \frac{\sin ۲\theta}{۲})|_۰^{\pi} = ۷۵\pi(\pi - ۰ - ۰ + ۰) = ۷۵\pi^{۲}$$

مسئله ۲۵: معادله صفحه‌ای در فضا که نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) را در خود داراست، به صورت زیر قابل نوشتن است

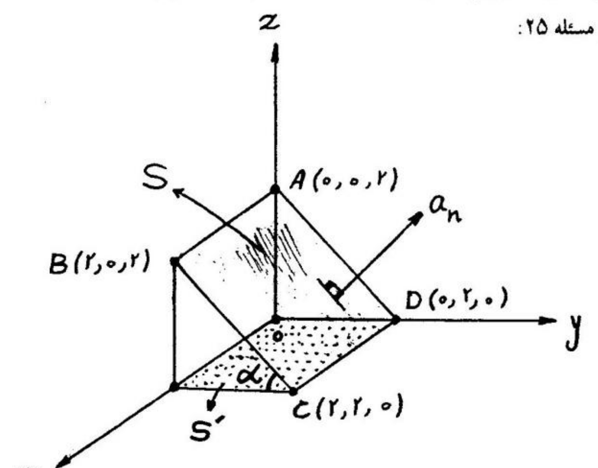
$$l(x-x_1)+m(y-y_1)+p(z-z_1)=0$$

که در آن l, m و p کسینوس‌های جهتی عمود واحد بر سطح هستند:

$$a_n = a_x l + a_y m + a_z p$$

میدان برداری $F = a_x + a_y 2 + a_z 3$ داده شده است، انتگرال $\int_s F \cdot ds$ را روی سطح مسطح مربعی شکلی که رئوس آن در (۰،۰،۲)،(۲،۰،۲)،(۲،۲،۰) و (۰،۲،۰) هستند، محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۵:



شکل ۲.۱۹ مسئله ۲۵

$$AB : (2a_x + 0a_y + 0a_z)$$

$$AD : (0a_x + 2a_y - 2a_z)$$

$$a_N = AB \times AD = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4a_y + 4a_z$$

$$a_n = \frac{a_N}{|a_N|} \text{(تبدیل به واحد)} = \frac{4a_y + 4a_z}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}a_y + \frac{1}{\sqrt{2}}a_z$$

$$\Rightarrow a_n = 0a_x + \frac{1}{\sqrt{2}}a_y + \frac{1}{\sqrt{2}}a_z \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ p = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$s\cos\alpha = s' \Rightarrow ds' = \cos\alpha\, ds \Rightarrow ds = \frac{1}{\cos\alpha}ds' = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

$$\int (F\cdot ds)a_n = \int (a_x + 2a_y + 3a_z)(0a_x + \frac{1}{\sqrt{2}}a_y + \frac{1}{\sqrt{2}}a_z)ds$$

$$\int (\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}})ds = \frac{5}{\sqrt{2}}\int_0^2\int_0^2 \sqrt{2}dxdy = 5(2)(2) = 20$$

روش دوّم :

$$\int (F\cdot ds)a_n = \frac{5}{\sqrt{2}}\int ds$$

که $\int ds$ بیانگر مساحت مربع است یعنی :

$$\int ds = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{2}}\int ds = \frac{5}{\sqrt{2}} \times 4\sqrt{2} = 20$$

مسئله ۲۶: دیورژانس میدانهای برداری شعاعی زیر را پیدا کنید:

الف) $f_1(R) = a_R R^n$.

ب) $f_2(R) = a_R \frac{k}{R^2}$.

پاسخ مسئله ۲۶:

پاسخ قسمت الف)

$$\nabla \cdot f_1 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2 A_R)}{\partial R} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^{n+2})}{\partial R}$$

$$= \frac{(n+2)R^{n+1}}{R^2} = (n+2)R^{n-1}$$

پاسخ قسمت ب)

$$\nabla \cdot f_2 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2 A_R)}{\partial R} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2 K/R^2)}{\partial R} = 0$$

مسئله ۲۷: نشان دهید $\frac{1}{3}\oint_s R\cdot ds = V$ که در آن R بردار شعاعی و V حجم ناحیه در برگرفته شده توسط S است.

پاسخ مسئله ۲۷:

$$\frac{1}{3}\oint_c R\cdot ds = \frac{1}{3}\oint_s R\cdot R^2\sin\theta d\theta d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^3\sin\theta d\theta d\phi = \frac{2\pi(R^3)}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta$$
$$= \frac{2\pi}{3}R^3(-\cos\theta)|_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3 = V \Rightarrow \frac{1}{3}\oint_s R\cdot ds = V$$

مسئله ۲۸: برای تابع عددی f و تابع برداری A، رابطهٔ

$$\nabla\cdot(fA) = f\nabla\cdot A + A\cdot\nabla f$$

را در مختصات کارتزین ثابت کنید.

پاسخ مسئله ۲۸:

$$A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$$

$$\nabla\cdot(fA_x a_x + fA_y a_y + fA_z a_z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z)$$

$$= f\frac{\partial A_x}{\partial x} + f\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{f\partial A_z}{\partial z}$$

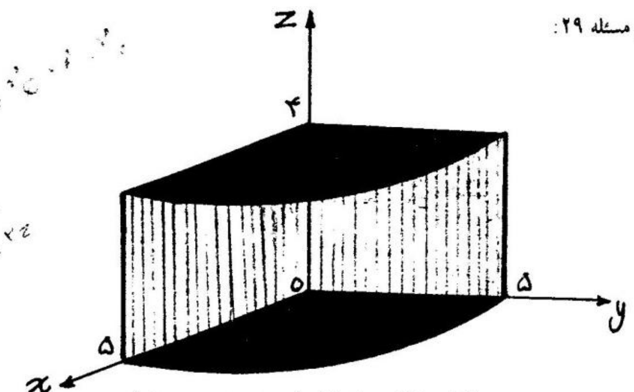
$$\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$+A_x\frac{\partial f}{\partial x} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial z} = f(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z})$$

$$+(A_x + A_y + A_z)\cdot(\nabla f) = f(\nabla\cdot A) + A\cdot\nabla f$$

مسئله ۲۹: برای تابع برداری $A = a_r r^2 + a_z 2z$، قضیه دیورژانس را در مورد ناحیهٔ مدور استوانه‌ای محصور توسط $r = 5$، $z = 0$ و $z = 4$ تحقیق نمایید.

پاسخ مسئله ۲۹:



شکل ۲.۲۰ مسئله ۲۹ـ(ربع استوانه مورد نظر)

$$\oint A\cdot ds = \underbrace{\int_{s_1} A\cdot ds_1}_{\text{(سطح جانبی)}} + \underbrace{\int_{s_2} A\cdot ds_2}_{\text{(سطح بالا)}} + \underbrace{\int_{s_3} A\cdot ds_3}_{\text{(سطح پائین)}}$$

$$\begin{cases} ds_1 = a_r r d\phi dz \\ ds_2 = a_z r d\phi dr \\ ds_3 = -a_z r d\phi dr \end{cases}$$

$$\int_{s_1} A\cdot ds_1 = \int_{s_1}(a_r r^2 + a_z 2z)\cdot(a_r r d\phi dz)$$
$$= \int\int r^3 d\phi dz = 125\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^4 dz = 125(2\pi)(4) = 1000\pi$$

$$\int_{s_2} A\cdot ds_2 = \int_{s_2}(a_r r^2 + a_z 2z)\cdot(a_z r d\phi dr)$$

$$= \iint 2zrd\phi dr = 8\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^5 rdr = 8(2\pi)(\frac{r^2}{2})|_0^5 = 200\pi$$

$$\int_{s_3} A\cdot ds_3 = \int_{s_3}(r^2 a_r + 2z a_z)(-a_z r d\phi dr)$$

$$= \iint -2zrdrd\phi dr = \iint -2(0)rdrd\phi = 0$$

$$\Rightarrow \oint A\cdot ds = 1000\pi + 200\pi + 0 = 1200\pi \qquad (*)$$

$$\int_v divA\cdot dv = ?$$

r dr dφ dz

$$divA = \frac{1}{r}[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A\phi)}{\partial\phi} + \frac{\partial(rA_z)}{\partial z}]$$

$$\Rightarrow divA = \frac{1}{r}[\frac{\partial(r\times r^2)}{\partial r} + 0 + \frac{r\partial(2z)}{\partial z}] = \frac{1}{r}[3r^2 + 2r] = 3r + 2$$

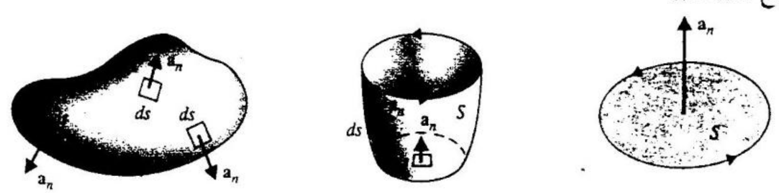
$$\Rightarrow \int_v divA\cdot dv = \iiint(3r+2)rdrd\phi dz = \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^5(3r+2)rdrd\phi dz$$

$$= 8\pi(125+25) = 1200\pi \qquad (**)$$

$$(**),(*) \Rightarrow \oint_s A\cdot ds = \int_v divA\cdot dv$$

مسئله ۳۰: در مورد تابع برداری $F = a_r k_1/r + a_z k_2 z$ داده شده در مثال ۲_۱۵ (صفحهٔ ۵۰)، $\int \nabla\cdot F dv$ را روی حجم توصیف شده در آن مثال محاسبه نمایید، توضیح دهید چرا قضیهٔ دیورژانس در می‌ماند.

پاسخ مسئله ۳۰:



پ) یک سطح بسته ب) یک سطح باز الف) یک قرص

شکل ۲.۲۱ مسئله ۳۰_(۱)

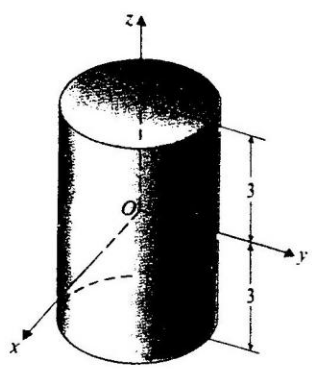
$$\nabla\cdot F = \frac{1}{r}[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\phi)}{\partial\phi} + \frac{r\partial(A_z)}{\partial z}]$$

$$\nabla\cdot F = \frac{1}{r}[\frac{\partial(\frac{rk_1}{r})}{\partial r} + \frac{\partial(0)}{\partial\phi} + \frac{r\partial(k_2 z)}{\partial z}]$$

$$= k_2 \Rightarrow \nabla\cdot F = k_2$$

$$\iiint \nabla\cdot F dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{-3}^{3} k_2 r dr d\phi dz$$

$$= k_2(2\pi)(\frac{r^2}{2})|_0^2 (z)|_{-3}^3 = 24\pi k_2$$

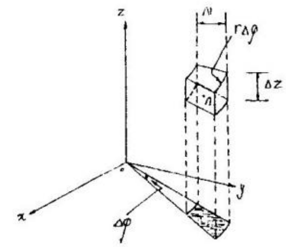


شکل ۲.۲۱ مسئله ۳۰_(۲)

علّت درماندن قضیه دیورژانس عدم پیوستگی F در r است.

مسئله ۳۱: از تعریف معادلهٔ (۲_۹۸) برای نتیجه گرفتن عبارت $\nabla\cdot A$ در مورد میدان برداری $A = a_r A_r + a_\theta A_\theta + a_z A_z$ در مختصات استوانه‌ای استفاده کنید.

پاسخ مسئله ۳۱:



شکل ۲.۲۳ مسئله ۳۱

معادله (۲_۹۸) :

$$\boxed{div A \triangleq \text{حد}_{\Delta v\to 0} \frac{\oint_s A\cdot ds}{\Delta v}}$$

صورت معادله (۲_۹۸) که نمایشگر شار خالص خروجی است، انتگرالی روی کلّ سطح S است که حجم را در بردارد.

$$\oint_s A\cdot ds = \int_{(\text{سطح بالا})} A_1 ds + \int_{(\text{سطح پائین})} A_2 ds + \int_{(\text{سطح پشت})} A_3\cdot ds$$

$$+\int_{(\text{سطح جلو})} A_4\cdot ds + \int_{(\text{سطح چپ})} A_5\cdot ds + \int_{(\text{سطح راست})} A_6\cdot ds$$

$$\int_{(\text{سطح بالا})} A_1\cdot ds = A_1\cdot(r\Delta r\Delta\phi a_z) = A_z(r_0,\phi_0,z_0+\frac{\Delta z}{2})(r\Delta r\Delta\phi a_z)$$

$$=(A_{z_0}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2})r\Delta r\Delta\phi$$

(توصیه می‌شود قبل از حلّ این مسئله، صفحات ۵۷ تا ۶۰ کتاب درسی را دقیقاً مطالعه نمایید.)

$$\int_{(\text{سطح پائین})} A_2\cdot ds = A_2\cdot(-r\Delta r\Delta\phi a_z) = A_z(r_0,\phi_0,z_0-\frac{\Delta z}{2})(-r\Delta r\Delta\phi a_z)$$

$$=(A_{z_0}-\frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2})(-r\Delta r\Delta\phi)$$

$$\int_{(\text{سطح پشت})} A_3\cdot ds = A_3\cdot(\Delta z\Delta r a_\phi) = A_\phi(r_0,\phi_0+\frac{\Delta\phi}{2},z_0)(\Delta z\Delta r a_\phi)$$

$$=(A_{\phi_0}-\frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})(\Delta z\Delta r)$$

$$\int_{(\text{سطح جلو})} A_4\cdot ds = A_4\cdot(\Delta z\Delta r(-a_\phi))$$

$$=A_\phi(r_0,\phi_0-\frac{\Delta\phi}{2},z_0)(-\Delta z\Delta r a_\phi)$$

$$=(A_{\phi_0}-\frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})(-\Delta z\Delta r)$$

$$\int_{(\text{سطح چپ})} A_5\cdot ds = A_5(-r\Delta\phi\Delta z a_r)$$

$$=A_r(r_0-\frac{\Delta r}{2},\phi_0,z_0)(-r\Delta\phi\Delta z a_r)$$

$$=(A_{r_0}-\frac{\Delta r}{2}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r})(-\Delta\phi\Delta z)$$

$$\int_{(\text{سطح راست})} A_6\cdot ds = A_6\cdot(r\Delta\phi\Delta z a_r)$$

$$=A_r(r_0+\frac{\Delta r}{2},\phi_0,z_0)(r\Delta\phi\Delta z a_r)$$

$$=(A_{r_0}+\frac{\Delta r}{2}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r})(\Delta\phi\Delta z)$$

$$\oint_s A\cdot ds(\text{کلّ}) = \frac{\partial A_z}{\partial z}r\Delta r\Delta\phi\Delta z+\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\Delta\phi\Delta z\Delta r$$

$$+\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}\Delta r\Delta\phi\Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta v + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\Delta v$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)\Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rA_z)\Delta v$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\Delta v + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)\Delta v$$

بنا به تعریف :

$$\boxed{div A \triangleq \text{حد}_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s A \cdot ds}{\Delta v}}$$

$$\triangleq \frac{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rA_z)\Delta v + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\Delta v + \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)\Delta v}{\partial r}}{\Delta v}$$

$$\Delta v \to 0$$

$$\triangleq \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(rA_z)] = \nabla \cdot A$$

$$\Delta v \to 0$$

معادله (۲_۱۱۴) را ببینید.

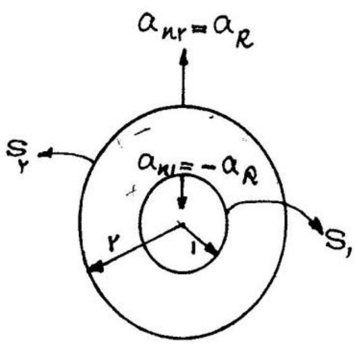
مسئله ۳۲ میدان برداری $D = a_R(\cos^2\phi)/R^3$ در ناحیه‌ای بین دو پوسته کروی توصیف شده توسط $R = 1$ و $R = 2$ موجود است.

الف) $\oint D \cdot ds$

ب) $\int \nabla \cdot D dv$

را محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۳۲:



شکل ۲.۲۴ مسئله ۳۲

پاسخ قسمت الف)

$$D \cdot ds = (a_R(\cos^2\phi)/R^3)(a_R(R^2\sin\theta d\theta d\phi)) = \frac{\cos^2\phi\sin\theta d\theta d\phi}{R}$$

$$\Rightarrow \oint_s D \cdot ds = \oint \frac{\cos^2\phi\sin\theta d\theta d\phi}{R}$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\phi\sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} -(\cos\pi - \cos 0)\cos^2\phi d\phi$$

$$= \frac{2}{R}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi$$

$$= \frac{2}{R}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\phi)d\phi = (\frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4}\sin^2\phi)|_0^{2\pi} \times \frac{2}{R}$$

$$= \frac{2\pi}{R} = \frac{2\pi}{R_2} = \pi(\text{روی سطح } R_2)$$

$$(R_1 = 1 \text{ روی سطح}) : \oint D \cdot ds = -\frac{2\pi}{R} = -\frac{2\pi}{1} = -2\pi$$

$$\oint D \cdot ds_{\text{کل}} = \oint_{s_2} D \cdot ds + \oint_{s_1} D \cdot ds = \pi + (-2\pi) = -\pi$$

توضیح اینکه، برای سطح s_2 بردار a_n بطرف بیرون و مثبت است در حالیکه برای سطح s_1 بردار

a_n بطرف درون و منفی است. این موضوع در شکل مشهود است.

پاسخ قسمت ب)

$$divD = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(R^2\sin\theta\cos^2\phi/R^3)}{\partial R} + 0 + 0\right]$$

$$= \frac{-\cos^2\phi\sin\theta}{R^4\sin\theta} = \frac{-\cos^2\phi}{R^4}$$

$$\int\nabla\cdot D dv = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}\left(\frac{\cos^2\phi R^2\sin\theta dr d\theta d\phi}{R^4}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{R}\cos^2\phi\sin\theta\right)\Big|_1^2 d\theta d\phi$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = -\pi$$

مسئله ۳۳: در مورد توابع برداری دیفرانسیل پذیر E و H ثابت کنید:

$$\nabla\cdot(E\times H) = H\cdot(\nabla\times E) - E\cdot(\nabla\times H)$$

پاسخ مسئله ۳۳:

$$E = E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z$$

$$H = H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z$$

$$E\times H = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= a_x(E_yH_z - E_zH_y) + a_y(E_zH_x - E_xH_z) + a_z(E_xH_y - E_yH_x)$$

$$div(E\times H) = \frac{\partial(E_yH_z - E_zH_y)}{\partial x} + \frac{\partial(E_zH_x - E_xH_z)}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial(E_xH_y - E_yH_x)}{\partial z} = \frac{\partial(E_yH_z)}{\partial x} - \frac{\partial(E_zH_y)}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial(E_zH_x)}{\partial y} - \frac{\partial(E_xH_z)}{\partial y} + \frac{\partial(E_xH_y)}{\partial z} - \frac{\partial(E_yH_x)}{\partial z}$$

$$= E_y\frac{\partial H_z}{\partial x} + H_z\frac{\partial E_y}{\partial x} - H_y\frac{\partial E_z}{\partial x} - E_z\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$+H_x\frac{\partial E_z}{\partial y} - E_x\frac{\partial H_z}{\partial y} - H_z\frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z\frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$+E_x\frac{\partial H_y}{\partial z} + H_y\frac{\partial E_x}{\partial z} - E_y\frac{\partial H_x}{\partial z} - H_x\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$= \left(H_x\frac{\partial E_z}{\partial y} - H_x\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \left(H_y\frac{\partial E_x}{\partial z} - H_y\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

$$+\left(H_z\frac{\partial E_y}{\partial x} - H_z\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - \left(E_x\frac{\partial H_z}{\partial y} - E_x\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)$$

$$-\left(E_y\frac{\partial H_x}{\partial z} - E_y\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) - \left(E_z\frac{\partial H_y}{\partial x} - E_z\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$= (H_xa_x + H_ya_y + H_za_z)(CurlE) - (E_xa_x + E_ya_y + E_za_z)(CurlH)$$

$$= H\cdot(\nabla\times E) - E\cdot(\nabla\times H)$$

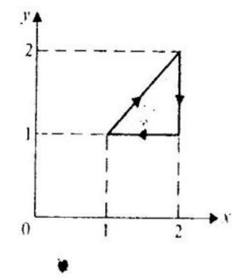
مسئله ۳۴: تابع برداری $A = a_x 3x^2y^2 - a_y x^3y^2$ را در نظر بگیرید.

الف) $\oint A\cdot dl$ را به دور مسیر مثلثی شکل نشان داده شده در شکل ۲ـ۳۶ بیابید.

ب) $\int(\nabla\times A)\cdot ds$ را روی سطح مثلثی فوق محاسبه کنید.

پ) آیا A می‌تواند به صورت گرادیان یک کمیت عددی بیان شود؟ توضیح دهید.

پاسخ مسئله ۳۴:



شکل ۲.۲۶ مسئله ۳۴

پاسخ قسمت الف)

$$\oint_{۱} A\cdot dl=\oint_{۱}(a_x ۳x^۲y^۲-a_y x^۳y^۲)(dx a_x+dy a_y+dz a_z)$$
$$\doteq\int_{۱}^{۲}۳x^۲y^۲dx-\int_{۱}^{۲}x^۳y^۲dy=\int_{۱}^{۲}۳x^۲x^۲dx-\int_{۱}^{۲}y^۳y^۲dy$$
$$=\frac{۳x^۵}{۵}\Big|_{۱}^{۲}-\frac{y^۶}{۶}\Big|_{۱}^{۲}=\frac{۲۴۳}{۳۰}$$
$$\oint_{۲} A\cdot dl=\oint_{۲}(a_x ۳x^۲y^۲-a_y x^۳y^۲)(dx a_x+dy a_y+dz a_z)$$
$$=\int_{۲}^{۲}۳x^۲y^۲dx-\int_{۲}^{۱}x^۳y^۲dy=\circ-۸\int_{۲}^{۱}y^۲dy=\frac{۵۶}{۳}$$
$$\oint_{۳} A\cdot dl=\int_{۲}^{۱}۳x^۲dx-\circ=\frac{۳x^۳}{۳}\Big|_{۲}^{۱}=-۷$$
$$\Rightarrow\oint_{\Delta} A\cdot dl=\frac{۲۴۳}{۳۰}+\frac{۵۶}{۳}-۷=۱۹/۷۶۶۶۶۶۶۷$$

پاسخ قسمت ب)

$$\int(\nabla\times A)\cdot ds=?$$

$$CurlA=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ۳x^۲y^۲ & -x^۳y^۲ & \circ \end{vmatrix}$$

$$=a_z(-۳x^۲y^۲)-a_z(۶x^۲y)=a_z(-۶x^۲y-۳x^۲y^۲)$$

$$ds=-a_z dxdy$$
$$\int(\nabla\times A)\cdot ds=\int_{۱}^{۲}\int_{y}^{۲}(۶x^۲y+۳x^۲y^۲)dxdy$$

$$=۳\int_{۱}^{۲}\int_{y}^{۲}x^۲y^۲dxdy+۶\int_{۱}^{۲}\int_{y}^{۲}x^۲ydxdy$$

$$=۳\int_{۱}^{۲}(\frac{x^۳y^۲}{۳})\Big|_{y}^{۲}dy+۶\int_{۱}^{۲}(\frac{x^۳y}{۳})\Big|_{y}^{۲}dy$$

$$=۳\int_{۱}^{۲}(\frac{۸y^۲}{۳}-\frac{y^۵}{۳})dy+۶\int_{۱}^{۲}(\frac{۸y}{۳}-\frac{y^۴}{۳})dy$$

$$=۳\left(\frac{۸y^۳}{۹}-\frac{y^۶}{۱۸}\right)_{۱}^{۲}+۶\left(\frac{۸y^۲}{y}-\frac{y^۵}{۱۵}\right)_{۱}^{۲}=۱۹/۷۶۶۶۶۶۶۷$$

پاسخ قسمت پ) با توجه به عبارت «اگر یک میدان برداری بدون کرل باشد، آنگاه می‌تواند به صورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود.»

مندرج در صفحه ۷۵ از فصل دوّم کتاب درسی، چون $CurlA$ مخالف صفر است پس نمی‌تواند بصورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود.

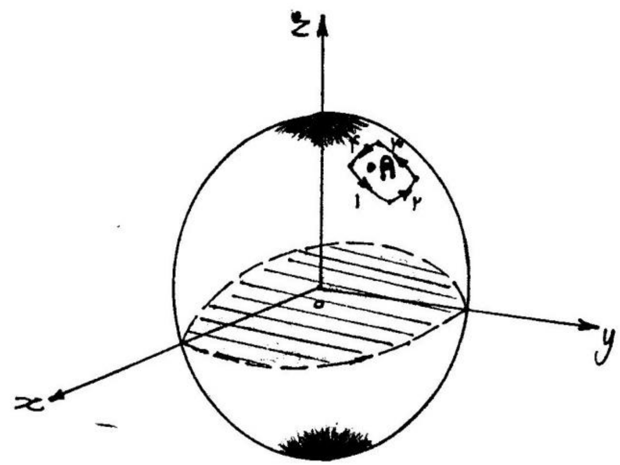
مسئله ۳۵: با استفاده از تعریف معادلهٔ (۲_۱۲۶) عبارتی برای مؤلفه a_R و $\nabla\times A$ در مختصات کروی، در مورد میدان برداری $A=a_RA_R+a_\theta A_\theta+a_\phi A_\phi$ نتیجه بگیرید.

پاسخ مسئله ۳۵:

معادله (۲_۱۲۶):

$$\boxed{(\nabla \times A) = a_u \cdot (\nabla \times A) = \underset{\Delta s_u \to 0}{\text{حد}} \frac{1}{\Delta s_u}\left(\oint_{c_u} A \cdot dl\right)}$$

(توصیه می‌شود قبل از حلّ این مسئله، صفحات ۶۷ تا ۷۰ کتاب درسی را دقیقاً مطالعه فرمایید.)



شکل ۲.۲۷ مسئله ۳۵

$$(\nabla \times A)_n = \left(\underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta s}\right)_n, n = a_R$$

$$\oint_{12341} A \cdot dl = \int_{12} A_1 \cdot dl + \int_{23} A_2 \cdot dl + \int_{34} A_3 \cdot dl + \int_{41} A_4 \cdot dl$$

$$\int_{12} A_1 \cdot dl = A_1 \cdot (R \sin\theta \Delta\phi a_\phi) = A_\phi R \sin\theta \Delta\phi$$

$$= A\phi(R_0, \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}, \phi_0) R \sin\theta \Delta\phi$$

$$= [A\phi_0 + \frac{\Delta\theta}{2} \frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi \sin\theta)] R\Delta\phi$$

$$\int_{23} A_2 \cdot dl = A_\theta(R_0, \theta_0, \phi_0 + \frac{\Delta\theta}{2})(-R\Delta\theta)$$

$$= [A\theta_0 + \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)\frac{\Delta\phi}{2}](-R\Delta\theta)$$

$$\int_{34} A_3 \cdot dl = A_\phi(R_0, \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}, \phi_0)(-R\sin\theta\Delta\phi)$$

$$= [A\phi_0 - \frac{\Delta\theta}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi\sin\theta)](-R\Delta\phi)$$

$$\int_{41} A_4 \cdot dl = A_\theta(R_0, \theta_0, \phi_0 - \frac{\Delta\phi}{2}) R\Delta\theta$$

$$= [A\theta_0 - \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}(A\theta)](R\Delta\theta)$$

$$\oint_{12341} A \cdot dl = [A\phi_0 + \frac{\Delta\theta}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta)]R\Delta\phi$$

$$+[A_0 + \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}(A\theta)](-R\Delta\theta)$$

$$+[A_{\phi_0} - \frac{\Delta\theta}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(A\theta\sin\theta)](-R\Delta\phi)$$

$$+[A_{\theta_0} - \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}(A\theta)](R\Delta\theta)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi\sin\theta)R\Delta\theta\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)R\Delta\phi\Delta\theta$$

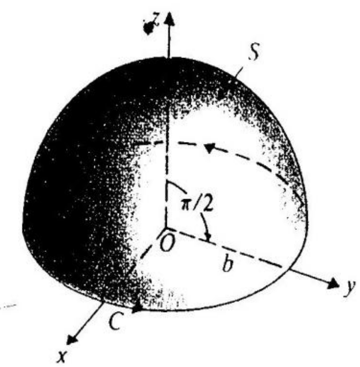
$$\underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta s}$$

$$= \underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi\sin\theta)R\Delta\theta\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)R\Delta\phi\Delta\theta}{R^2 \sin\theta\Delta\phi\Delta\theta}$$

$$= \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)\right] = (\nabla\times A)_{a_R}$$

مسئله ۳۶: تابع برداری $A = a_\phi \sin(\phi/2)$ داده شده است. قضیهٔ استوکس را روی سطح نیم کروی و مسیر دایره‌ای آن طبق شکل ۲_۳۷ تحقیق نمایید.

پاسخ مسئله ۳۶:



شکل ۲.۲۸ مسئله ۳۶

$$\oint_c A\cdot dl = \int_s (\nabla\times A)\cdot ds$$

$$\begin{cases} A = a_\phi \sin(\phi/2) \\ dl = dR a_R + R d\theta a_\theta + R\sin\theta d\phi a_\phi \end{cases}$$

$$A\cdot dl = R\sin\theta \sin(\phi/2) d\phi$$

$$\oint_c A\cdot dl = \oint_0^{2\pi} R\sin\theta\sin(\frac{\phi}{2})d\phi = R\sin\theta(-2\cos\frac{\phi}{2})|_0^{2\pi} = -2R\sin\theta(-2)$$

$$(\theta = \frac{\pi}{2}, R = b) \Rightarrow \oint_c A\cdot dl = -2(b)(1)(-2) = 4b \qquad (*)$$

$$\nabla\times A = \left(\frac{1}{R^2\sin\theta}\right)\begin{vmatrix} a_R & Ra_\theta & R^2\sin\theta a_\phi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ 0 & 0 & R\sin(\frac{\phi}{2})\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \left((R\sin(\frac{\phi}{2})\cos\theta)a_R - (R\sin(\frac{\phi}{2}\sin\theta)a_\theta\right)\times\frac{1}{R^2\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\phi}{2})\cos\theta a_R - \sin(\frac{\phi}{2})\sin\theta a_\theta}{R\sin\theta}$$

$$ds = R^2\sin\theta d\phi d\theta \vec{a}_R \Rightarrow \int_s(\nabla\times A)\cdot ds = \int R\sin(\frac{\phi}{2})\cos\theta d\phi d\theta$$

$$= b(-2\cos\frac{\phi}{2})_0^{2\pi}(\sin\theta)_0^{\pi/2} = b(4)(1) = 4b \qquad (**)$$

$$(**),(*) \Rightarrow \boxed{\oint_c A\cdot dl = \int_s(\nabla\times A)ds}$$

مسئله ۳۷: در مورد تابع عددی f و تابع برداری G، رابطهٔ زیر در مختصات کارتزین ثابت کنید.

$$\nabla\times(fG) = f\nabla\times G + (\nabla f)\times G$$

پاسخ مسئله ۳۷:

$$G = G_x a_x + G_y a_y + G_z a_z$$

$$fG = fG_x a_x + fG_y a_y + fG_z a_z$$

$$\nabla\times(fG) = Curl(fG) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fG_x & fG_y & fG_z \end{vmatrix}$$

$$a_x\frac{\partial fG_z}{\partial y}+a_z\frac{\partial fG_y}{\partial x}+a_y\frac{\partial fG_x}{\partial z}$$

$$-a_z\frac{\partial fG_x}{\partial y}-a_y\frac{\partial fG_z}{\partial x}-a_x\frac{\partial fG_y}{\partial z}$$

$$=a_x\frac{\partial f}{\partial y}G_z+a_x\frac{\partial G_z}{\partial y}f+a_z\frac{\partial f}{\partial x}G_y+a_z\frac{\partial G_y}{\partial x}f$$

$$+a_y\frac{\partial f}{\partial z}G_x+a_y\frac{\partial G_x}{\partial z}f-a_z\frac{\partial f}{\partial y}G_x-a_z\frac{\partial G_x}{\partial y}f$$

$$-a_y\frac{\partial f}{\partial x}G_z-a_y\frac{\partial G_z}{\partial x}f-a_x\frac{\partial f}{\partial z}G_y-a_x\frac{\partial G_y}{\partial z}f$$

$$=fa_x\left(\frac{\partial G_z}{\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial z}\right)+fa_y\left(\frac{\partial G_x}{\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)$$

$$+fa_z\left(\frac{\partial G_y}{\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial y}\right)+a_x\left(\frac{\partial f}{\partial y}G_z-\frac{\partial f}{\partial z}G_y\right)$$

$$+a_y\left(\frac{\partial f}{\partial z}G_x-\frac{\partial f}{\partial x}G_z\right)+a_z\left(\frac{\partial f}{\partial x}G_y-\frac{\partial f}{\partial y}G_x\right)$$

$$=f(\nabla\times G)+(\nabla f)\times G$$

$\oint_C dl=0 \quad =\oint_C \nabla\times dl$

مسئله ۳۸: اتحادهای صفر زیر را با بسط در مختصات کلی منحنی‌الخط متعامد ثابت کنید.

الف) $\nabla\times(\nabla V)\equiv 0$

ب) $\nabla\cdot(\nabla\times A)\equiv 0$

$\int_V \nabla\cdot(\nabla\times A)\,dv=\oint_S(\nabla\times A)\cdot ds$

$\oint A\cdot dl=0$

پاسخ مسئله ۳۸:

پاسخ قسمت الف)

$$\nabla V=\frac{\partial V}{h_1\partial u_1}a_{u_1}+\frac{\partial V}{h_2\partial u_2}a_{u_2}+\frac{\partial V}{h_3\partial V_3}a_{u_3}$$

$\int_S \nabla\times(\nabla V)=$

$$\nabla\times(\nabla V)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1a_{u_1} & h_2a_{u_2} & h_3a_{u_3}\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1\frac{\partial V}{h_1\partial u_1} & h_2\frac{\partial V}{h_2\partial u_2} & h_3\frac{\partial V}{h_3\partial u_3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}[[h_1\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{\partial V}{\partial u_3})-h_1\frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{\partial V}{\partial u_2})]a_{u_1}$$

$$+[h_2\frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{\partial V}{\partial u_1})-h_2\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{\partial V}{\partial u_3})]a_{u_2}$$

$$+[h_3\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{\partial V}{\partial u_2})-h_3\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{\partial V}{\partial u_1})]a_{u_3}]$$

$$=\frac{1}{h_2h_3}(\frac{\partial^2V}{\partial u_2\partial u_3}-\frac{\partial^2V}{\partial u_3\partial u_2})a_{u_1}$$

$$+\frac{1}{h_1h_3}(\frac{\partial^2V}{\partial u_3\partial u_1}-\frac{\partial^2V}{\partial u_1\partial u_3})a_{u_2}$$

$$+\frac{1}{h_1h_2}(\frac{\partial^2V}{\partial u_1\partial u_2}-\frac{\partial^2V}{\partial u_2\partial u_1})a_{u_3}$$

(*) می‌دانیم اگر f و مشتقات جزئی آن در مراتب اوّل و دوّم پیوسته باشند آنگاه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

لذا:

$$\nabla\times(\nabla V)=\frac{1}{h_2h_3}(0)+\frac{1}{h_1h_3}(0)+\frac{1}{h_1h_2}(0)=0$$

$$\boxed{\Rightarrow\nabla\times(\nabla V)\equiv 0}$$

پاسخ قسمت ب)

$$\nabla\cdot(\nabla\times A)\overset{?}{=}0$$

$$\nabla\times A=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1a_{u_1} & h_2a_{u_2} & h_3a_{u_3}\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}[[h_1\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3)-h_1\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2)]a_{u_1}$$

$$+[h_2\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1A_1)-h_2\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3A_3)]a_{u_2}$$

$$+[h_3\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2A_2)-h_3\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_1)]a_{u_3}]$$

$$=\frac{1}{h_2h_3}(\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3)-\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2))a_{u_1}$$

$$+\frac{1}{h_1h_3}(\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1A_1)-\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3A_3))a_{u_2}$$

$$+\frac{1}{h_1h_2}(\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2A_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_1))a_{u_3}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times A)=\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial u_1}[\frac{h_2h_3}{h_2h_3}\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial u_2}-\frac{h_2h_3}{h_2h_3}\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial u_3}]$$

$$+\frac{\partial}{\partial u_2}[\frac{h_1h_3}{h_1h_3}\frac{\partial(h_1A_1)}{\partial u_3}-\frac{h_1h_3}{h_1h_3}\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial u_1}]$$

$$+\frac{\partial}{\partial u_3}[\frac{h_1h_2}{h_1h_2}\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial u_1}-\frac{h_1h_2}{h_1h_2}\frac{\partial(h_1A_1)}{\partial u_2}]]$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial^2(h_3A_3)}{\partial u_1\partial u_2}-\frac{\partial^2(h_2A_2)}{\partial u_1\partial u_3}$$

$$+\frac{\partial^2(h_1A_1)}{\partial u_2\partial u_3}-\frac{\partial^2(h_3A_3)}{\partial u_2\partial u_1}+\frac{\partial^2(h_2A_2)}{\partial u_3\partial u_1}-\frac{\partial^2(h_1A_1)}{\partial u_3\partial u_2}]$$

$$(*)\Rightarrow\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times A)\equiv 0}$$

مسئله ۳۹: تابع برداری $F=a_x(x+c_1z)+a_y(c_2x-3z)+a_z(x+c_3y+c_4z)$ داده شده است.

الف) اگر F غیر گردشی باشد، ثابت‌های c_1 ، c_2 و c_3 را تعیین کنید.

ب) اگر F غیر سلونوییدی نیز باشد، ثابت c_4 را نیز تعیین کنید.

پ) تابع پتانسیل عددی V را که منفی گرادیان آن برابر F است، تعیین کنید.

پاسخ مسئله ۳۹:

پاسخ قسمت الف)

$$F\text{ غیرگردشی}\Rightarrow Curl F=0$$

$\nabla\times E=0$
غیرچرخشی

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+c_1z & c_2x-3z & x+c_3y+c_4z\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow a_x(c_3)+a_z(c_2)+a_y(c_1)-a_z(0)-a_x(-3)-a_y(1)=0$$

$$\Rightarrow a_x(c_3+3)+a_y(c_1-1)+a_z(c_2-0)=0\Rightarrow c_1=1, c_2=0, c_3=-3$$

پاسخ قسمت ب)

$$F\text{ سولونوئیدی}\Rightarrow divF=0\Rightarrow 1+c_4=0\Rightarrow c_4=-1$$

پاسخ قسمت پ)

$$-\nabla V=F, -\nabla V=-(\frac{\partial V}{\partial x}a_x+\frac{\partial V}{\partial y}a_y+\frac{\partial V}{\partial z}a_z)$$

$$\begin{cases}-\frac{\partial V}{\partial x}=x+c_1z\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial x}=-x-c_1z\Rightarrow V=-\frac{x^2}{2}-zx+f(y,z)\\ -\frac{\partial V}{\partial y}=c_2x-3z\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial y}=-c_2x+3z\Rightarrow V=3zy+f(x,z)\\ -\frac{\partial V}{\partial z}=x+c_3y+c_4z\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial z}=-x-c_3y-c_4z\end{cases}$$

$$\Rightarrow V=-xz+3zy+\frac{z^2}{2}f(x,y)$$