باشگاه مهندسان سمنان

حل المسائل الکترومغناطیس چنگ

www.sem-eng.com

تهیه کتاب : عارف ناصری

اسکن: محمدرضا خالصی

ارسال: ایمان شریعت پناهی

فصل سوم و چهارم: میدان های الکتریکی ساکن و مسائل مقدار مرزی

$$\boxed{\Rightarrow V = \frac{-x^2}{2} - xz + 3zy + \frac{z^2}{2}}$$

دقّت کنید در روابط اخیر مقادیر ضرایب c_1, c_2, c_3, c_4 مستقیماً جایگذاری شده‌اند.

توضیح : در صورت مسئله ۳۹ قسمت ب) میدان F باید سلونوئیدی باشد که به اشتباه غیرسلونوئیدی نوشته شده است.

۳

پاسخ به مسائل فصل سوّم

میدانهای الکتریکی ساکن

فصل ۳

۱.۳ میدانهای الکتریکی ساکن

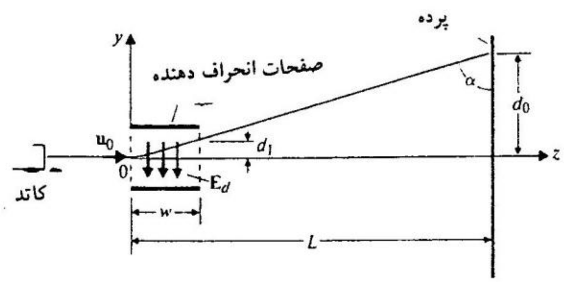
مسئله ۱: به شکل ۳ـ۴ مراجعه کنید.

الف) رابطهٔ بین α، زاویه ورود شعاع الکترونی به پرده و شدت میدان الکتریکی انحراف دهندهٔ E_d را پیدا کنید.

ب) رابطهٔ بین w و L را طوری پیدا کنید که $d_1 = d_0/20$.

پاسخ مسئله ۱:

مطابق شکل زیر بردار سرعت u در نقطه P روی پرده را به دو مولفّه u_y, u_z تجزیه می‌کنیم بطور که $\vec{u} = \vec{u}_y + \vec{u}_z$ یعنی:



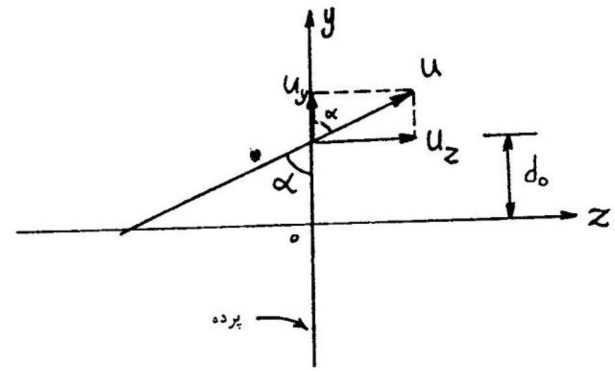
شکل ۳.۱ مسئله ۱ـ(۱)

الف) رابطه بین α، زاویه ورود شعاع الکترونی به پرده و شدت میدان الکتریکی انحراف دهندهٔ $_d$ را پیدا کنید.

ب) رابطه بین w و L را طوری پیدا کنید که $d_1 = d_0/20$.

مطابق شکل :

$$\begin{cases}\tan\alpha = \dfrac{u_z}{u_y} \\ u_z = u_0\end{cases} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{u_0}{u_y} \qquad (*)$$



شکل ۳.۲ مسئله ۱_(۲)

$$\begin{cases} F = m\cdot a \\ a = \dfrac{du_y}{dt}\end{cases} \Rightarrow F = m\cdot\frac{du_y}{dt} \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم $F = E_d\cdot q$ بنابراین : $F = E_d\cdot e$ (۲) با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم :

$$m\frac{du_y}{dt} = E_d\cdot e$$

$$\Rightarrow \int m\frac{du_y}{dt}\cdot dt = \int E_d\cdot e\,dt \Rightarrow mu_y = E_d\cdot et \Rightarrow u_y = \frac{E_d\cdot et}{m}$$

$$x = v\cdot t \Rightarrow w = u_0 t \Rightarrow t = \frac{w}{u_0}$$

$$\begin{cases} u_y = \dfrac{E_d\cdot et}{m} \\ t = \dfrac{w}{u_0}\end{cases} \Rightarrow u_y = \frac{E_d e w}{m u_0}$$

بنابه رابطه (*) :

$$\tan\alpha = \frac{u_0}{u_y}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{u_0}{\dfrac{E_d\cdot ew}{mu_0}} = \frac{mu_0^2}{E_d ew} \Rightarrow \boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{mu_0^2}{E_d ew}\right)}$$

پاسخ قسمت ب)

$$F = (-e)E_d = a_y e E_d$$

$$F = m\cdot a \Rightarrow m\frac{du_y}{dt} = eE_d$$

$$\int m\frac{du_y}{dt}\cdot dt = \int eE_d\cdot dt \Rightarrow mu_y = eE_d t \Rightarrow u_y = \frac{eE_d t}{m}$$

$$\int u_y\cdot dt = \int \frac{eE_d t}{m} \Rightarrow y = \frac{eE_d t^2}{2m}$$

$$x = v\cdot t \Rightarrow w = tu_0 \Rightarrow t = \frac{w}{u_0} \Rightarrow \boxed{d_1 = \frac{eE_d}{2m}\left(\frac{w}{u_0}\right)^2}$$

$$u_{y_1} = u_y\left(t = \frac{w}{u_0}\right) = \frac{eE_d}{m}\left(\frac{w}{u_0}\right)$$

وقتی الکترونها به پرده می‌رسند فاصله افقی دیگری را به اندازه $(L-w)$ در مدت زمان $\left(\frac{L-w}{u_0}\right)$ طی کرده‌اند. در طول این فاصله زمانی انحراف عمودی دیگری به اندازه

$$d_2 = u_{y_1}\left(\frac{L-w}{u_0}\right) = \frac{eE_d w(L-w)}{mu_0^2}$$

وجود داشته است. از این رو انحراف روی پرده برابر است با :

$$d_0 = d_1 + d_2 = \frac{eE_d w(L-\frac{w}{2})}{mu_0^2} \Rightarrow \boxed{d_0 = \frac{eE_d w(L-\frac{w}{2})}{mu_0^2}}$$

$$d_1 = \frac{d_0}{20}\,(\text{فرض مسئله}) \Rightarrow \frac{eE_d}{2m}\left(\frac{w}{u_0}\right)^2 = \frac{eE_d w(L-\frac{w}{2})}{20mu_0^2}$$

با ساده کردن رابطه فوق :
$$10w = L - \frac{w}{2}$$
$$10w + \frac{w}{2} = L \Rightarrow \frac{21}{2}w = L \Rightarrow \frac{L}{w} = 10/5$$

مسئله ۲: نوسان نگار پرتو کاتدی (CRO) نشان داده شده در شکل ۳ـ۴ برای اندازه گیری ولتاژ اعمال شده به صفحات موازی انحراف دهنده بکار می‌رود.

الف) با فرض عدم شکست در عایق، اگر فاصلهٔ بین صفحات h باشد، حداکثر ولتاژی که قابل اندازه‌گیری است، چقدر می‌باشد؟

ب) اگر قطر پرده D باشد، L به چه مقداری محدود می‌شود؟

پ) برای دو برابر کردن حداکثر ولتاژ قابل اندازه‌گیری CRO بدون تغییر مشخصات هندسی، چه باید کرد؟

پاسخ قسمت الف)

اگر فاصلهٔ بین صفحات انحراف دهنده را h فرض کنیم، حداکثر انحراف مساوی d_1 است که برابر $\frac{h}{2}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} d_1 = \frac{eE_d}{2m}\left(\frac{w}{u_0}\right)^2 \\ E = \frac{V}{h} \Rightarrow E_d = \frac{V_{(max)}}{h} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{eV_{(max)}}{2mh}\left(\frac{w}{u_0}\right)^2 \Rightarrow \boxed{V_{(max)} = \frac{mh^2u_0^2}{ew^2}}$$

$$\begin{cases} d_0 = \dfrac{eE_d w(L - \frac{w}{2})}{mu^2} \\ 2d_0 = D \Rightarrow d_0 = \frac{D}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{2} = \frac{eE_d w(L - \frac{w}{2})}{mu^2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}\left(w + \frac{mDu^2}{eE_d w}\right)}$$

پاسخ قسمت پ)

$$\boxed{V = 2V_{(max)}}$$

$$\Rightarrow \frac{mh^2u^2}{ew^2} = 2\frac{mh^2u_0^2}{ew^2} \Rightarrow u^2 = 2u_0^2 \Rightarrow u = \sqrt{2}u_0$$

یعنی برای بدون تغییر ماندن مشخّصات هندسی باید سرعت را $\sqrt{2}$ برابر کنیم.

مسئله ۳: سیستم انحراف یک نوسان‌نگار پرتو کاتدی معمولاً از دوجفت صفحهٔ موازی تشکیل می‌شود که میدانهای الکتریکی عمود برهم بوجود می‌آورند. فرض کنید دستهٔ دیگری از صفحات در شکل ۳ـ۴ وجود داشته باشد که میدان الکتریکی یکنواخت $E_x = a_x E_x$ را در ناحیه انحراف بوجود می‌آورد. برای بوجود آوردن E_x و E_y به ترتیب ولتاژهای انحراف دهنده $v_x(t)$ و $v_y(t)$ اعمال می‌شوند. اگر بنا باشد که الکترونها منحنی‌های زیر را بر روی صفحهٔ فلورسانت دنبال کنند، نوع شکل موجهایی که باید $v_x(t)$ و $v_y(t)$ داشته باشند را تعیین کنید:

الف) یک خط افقی.

ب) یک خط مستقیم دارای شیب منفی واحد.

پ) یک دایره.

ت) دو سیکل از یک موج سینوسی.

پاسخ مسئله ۳:

پاسخ قسمت الف)

معادله یک خط افقی به فاصله l از مبداء مختصّات با پارامتر زمان t بصورت زیر است:

$$\begin{cases} x = t \\ y = l \end{cases} \quad -d \leq t \leq d$$

می‌دانیم t زمان است و زمان منفی بی معنی است لذا پارامتر t رابه $\cos t$ تغییر می‌دهیم. قابل ذکر است که انتخاب $\cos t$ با توجه به رابطه $\cos t = \cos(-t)$ نبوده و هیچ ربطی به این خاصیت کسینوس ندارد. و این انتخاب بدلیل جبران زمان منفی نیست. چرا که اگر از $\sin t$ به جای $\cos t$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = d\sin t \\ y = l \end{cases} \quad 0 \leq t \leq (\forall t \in N) \Rightarrow -d \leq x \leq d$$

که نتیجه یکسان است. (درصورت شرایط خاصّ مسئله می‌توان از شکلهای $\cos(w_1 t + \phi)$ و $\sin(w_2 t + \psi)$ نیز استفاده کرد.)

$$\begin{cases} x = d\cos t \\ y = l \end{cases} \quad 0 \leq t \leq (\forall t \in N) \Rightarrow -d \leq x \leq d$$

داریم :

$$\begin{cases} y = \dfrac{eE_d w(L - \frac{w}{2})}{mu^2} \\ E_d = \dfrac{v_y}{h} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{ev_y w(L - \frac{w}{2})}{mhu^2}$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{2mu^2 hy}{ew(2L - w)} \xRightarrow{y=l} v_y = \frac{2mu^2 hl}{ew(2L - w)} = \text{مقداری ثابت}$$

$$x = \frac{eE_x w(L - \frac{w}{2})}{mu^2} \Rightarrow v_x = \frac{2mu^2 xh}{ew(2L - w)}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{2mu^2 xh}{ew(2L - w)} \\ x = d\cos t \end{cases} \Rightarrow v_x(t) = \frac{2mu^2 dh\cos t}{ew(2L - w)}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{2mu^2 dh\cos t}{ew(2L - w)} \\ v_y = const \quad (\text{مقداری ثابت}) \end{cases}$$

پاسخ قسمت ب

$$\begin{cases} x(t) = d\cos t \\ y(t) = -d\cos t \end{cases}$$

بنابه قسمت قبل مسئله داریم :

$$v_y(t) = \frac{2mu^2 yh}{ew(2L - w)} = \frac{2mu^2(-d\cos t)h}{ew(2L - w)}$$

$$= -\frac{2mu^2 hd(\cos t)}{ew(2L - w)} \Rightarrow v_y(t) = -K\cos t, K > 0$$

$$v_x(t) = \frac{2mu^2 xh}{ew(2L - w)} = \frac{2mu^2(d\cos t)h}{ew(2L - w)}$$

$$= \frac{2mu^2 dh(\cos t)}{ew(2L - w)} \Rightarrow v_x(t) = -K\cos t, K > 0$$

پاسخ قسمت پ

معادلات پارمتری دایره :

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases}$$

$$v_y(t) = \frac{2mu^2 hy}{ew(2L - w)} = \frac{2mu^2 hy(t)}{ew(2L - w)} = \frac{2mu^2 hr\sin t}{ew(2L - w)}$$

$$\Rightarrow v_y(t) = \frac{2mu^2 hr\sin t}{ew(2L - w)}$$

$$v_x(t) = \frac{2mu^2 hx}{ew(2L - w)} = \frac{2mu^2 hx(t)}{ew(2L - w)} \Rightarrow v_x(t) = \frac{2mu^2 hr(\cos t)}{ew(2L - w)}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{2mu^2 hr(\cos t)}{ew(2L - w)} \\ v_y(t) = \dfrac{2mu^2 hr(\sin t)}{ew(2L - w)} \end{cases}$$

پاسخ قسمت ت

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{2mu^2 ht}{ew(2L - w)} \\ v_y(t) = \dfrac{2mu^2 h(\cos t)}{ew(2L - w)} \end{cases}$$

• **مسئله ۵:** بارهای نقطه‌ای Q_1 و Q_2 به ترتیب در (۱,۲,۰) و (۲,۰,۰) واقعند. رابطه بین Q_1 و Q_2 را چنان پیدا کنید که نیروی کل وارد بر بار آزمونی واقع در نقطه $P(-1,1,0)$

الف) مؤلفه x نداشته باشد.

ب) مؤلفه y نداشته باشد.

پاسخ مسئله ۵:

$$\begin{cases} A(1,2,0)\,,\ Q_1 \\ A(2,0,0)\,,\ Q_2 \\ Q_1 = KQ_2 \\ P(-1,1,0), +1c \end{cases} \Rightarrow K = ?$$

اگر برآیند نیروها در نقطهٔ P مؤلفهٔ x یا y نداشته باشد

$$PA = 2a_x + a_y - 0a_z \Rightarrow |PA| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

$$PB = 3a_x - a_y + 0a_z \Rightarrow |PB| = \sqrt{9+1+0} = \sqrt{10}$$

$$F_{A,P} = \text{نیروی بین } P,A = \frac{Q_1 \times 1 \times \overline{PA}}{4\pi\epsilon_0 |PA|^3}$$

$$= \frac{Q_1 \times 1 \times (2a_x + a_y)}{4\pi\epsilon_0 \times 5\sqrt{5}}$$

$$F_{B,P} = \text{نیروی بین } P,B = \frac{Q_2 \times 1 \times \overline{PB}}{4\pi\epsilon_0 |PB|^3}$$

$$= \frac{Q_2 \times 1 \times (3a_x - a_y)}{4\pi\epsilon_0 (2\sqrt{2} \times 5\sqrt{5})}$$

$$F \equiv \text{برآیند درنقطه } P = F_{P,A} + F_{P,B}$$

$$= \frac{Q_1 \times 1 \times (2a_x + a_y)}{4\pi\epsilon_0 (5\sqrt{5})} + \frac{Q_2 \times 1 \times (3a_x - a_y)}{4\pi\epsilon_0 (2\sqrt{2} \times 5\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}Q_1(2a_x + a_y) + Q_2(3a_x - a_y)}{4\pi\epsilon_0 (2\sqrt{2} \times 5\sqrt{5})}$$

$$= \frac{(4\sqrt{2}Q_1 + 3Q_2)a_x + (2\sqrt{2}Q_1 - Q_2)a_y}{4\pi\epsilon_0 (2\sqrt{2} \times 5\sqrt{5})}$$

F در نقطه P مؤلفهٔ x نداشته باشد $\Rightarrow 4\sqrt{2}Q_1 + 3Q_2 = 0$

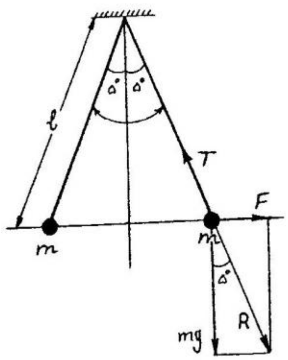
$$\Rightarrow 4\sqrt{2}Q_1 = -3Q_2 \Rightarrow \boxed{Q_1 = \frac{-3}{4\sqrt{2}}Q_2}$$

F در نقطه P مؤلفهٔ y نداشته باشد $\Rightarrow 2\sqrt{2}Q_1 - Q_2 = 0$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}Q_1 = Q_2 \Rightarrow \boxed{Q_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}Q_2}$$

مسئله ۶: دو کره هادی بسیار کوچک، هر یک به وزن $(kg)\ 10^{-4} \times 1/0$، از نقطهٔ مشترکی توسط دو ریسمان غیرهادی بسیار نازک به طول $(m)\ 0/2$ آویزان شده‌اند. بار Q روی هر کره قرار دارد. نیروی دافعهٔ الکتریکی دو کره را از هم جدا می‌سازد و حالت تعادل وقتی می‌رسد که زاویه ریسمان‌های آویزان ۱۰ درجه باشد. با فرض شتاب ثقل $(N/kg)\ 9/80$ و جرم قابل صرفنظر کردن ریسمان‌ها، Q را پیدا کنید.

پاسخ مسئله ۶:



شکل ۳.۳ مسئله ۶

دو کره وقتی به تعادل می‌رسند که برآیند دو نیروی T (کشش نخ) و R (برآیند mg, F) صفر شود یعنی $R = T$ شود.

$$mg = W = (1 \times 10^{-4} \times 9/8)N\ ,\ l = 0/2m$$

$$(\tan ۵^\circ) = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg(\tan ۵^\circ) \qquad (۱)$$

$$F = \frac{Q \times Q}{۴\pi\epsilon_\circ(|mm|^۲)}$$

$$(\sin ۵^\circ) = (\frac{|mm|}{۲})/l \Rightarrow |mm| = ۲l(\sin ۵^\circ)$$

$$\Rightarrow (|mm|^۲) = ۴l^۲(\sin^۲ ۵^\circ) = ۴(۰/۲)^۲(\sin^۲ ۵^\circ) = ۱/۲۱۵۳۷۹۷۵۹ \times ۱۰^{-۳}$$

$$F = \frac{Q^۲}{۴\pi\epsilon_\circ(۱/۲۱۵۳۷۹۷۵۹ \times ۱۰^{-۳})} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow (\tan ۵^\circ)(mg) = \frac{Q^۲}{۴\pi\epsilon_\circ(۱/۲۱۵۳۷۹۷۵۹ \times ۱۰^{-۳})}$$

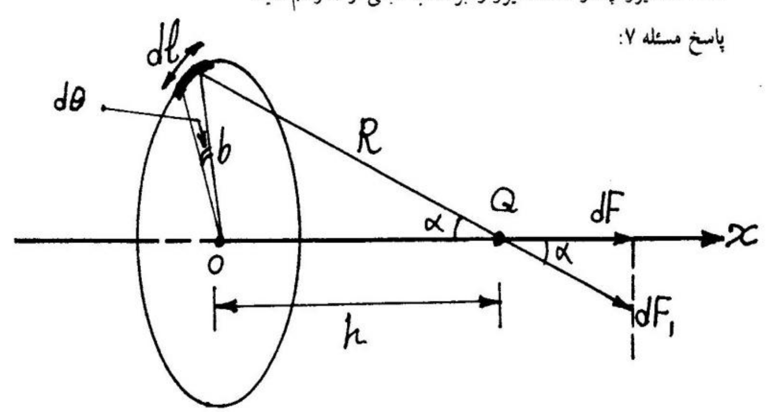
$$\Rightarrow Q^۲ = ۴\pi\epsilon_\circ(۱/۲۱۵۳۷۹۷۵۹ \times ۱۰^{-۳})(\tan ۵^\circ)(۹/۸ \times ۱۰^{-۴})$$

$$\Rightarrow Q = ۳/۴۰۴۲۵۰۳۹۱ \times ۱۰^{-۹} \simeq ۳/۴ \quad \text{(نانو کولمب)}$$

۱

مسئله ۷: نیروی بین یک حلقهٔ دایره‌ای باردارد به شعاع b و با چگالی بار یکنواخت ρ_l و یک بار نقطه‌ای Q واقع بر محور حلقه و به فاصله h از صفحه حلقه را پیدا کنید. برای $h >> b$ و $h = ۰$، نیرو چقدر است؟ نیرو را برحسب تابعی از h رسم کنید.

پاسخ مسئله ۷:



شکل ۳.۴ مسئله ۷_(۱)

$$dl = bd\theta$$

$$\begin{cases} dF = dF_۱ \cos\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{b^۲ + h^۲}} \end{cases} \Rightarrow dF = \frac{h}{\sqrt{b^۲+h^۲}} dF_۱$$

$$\Rightarrow \int \frac{h dF_۱}{\sqrt{b^۲+h^۲}} = F \quad (۱)$$

اگر Q' بار المان dl باشد داریم :

$$Q' = \rho_l dl = \rho_l b d\theta$$

$$\begin{cases} dF_۱ = \dfrac{Q \cdot Q'}{۴\pi\epsilon_\circ R^۲} = \dfrac{Q \cdot \rho_l b d\theta}{۴\pi\epsilon_\circ R^۲} a_x \\ R^۲ = (b^۲ + h^۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow dF_۱ = \frac{Q\rho_l b d\theta a_x}{۴\pi\epsilon_\circ(b^۲+h^۲)}$$

$$\text{از رابطه (۱)} \Rightarrow F = \int_\circ^{۲\pi} \frac{hQ\rho_l b d\theta a_x}{۴\pi\epsilon_\circ \sqrt{b^۲+h^۲} \times (b^۲+h^۲)}$$

$$= \frac{(hQ\rho_l b)}{۲\epsilon_\circ(b^۲+h^۲)^{\frac{۳}{۲}}} a_x$$

اگر $h >> b$ یعنی اگر h خیلی بزرگتر از b باشد:

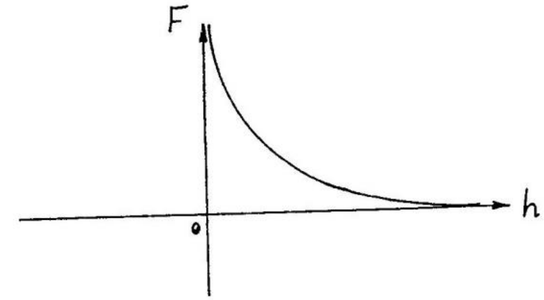
$$(b^۲+h^۲) \simeq h^۲ \Rightarrow F = \frac{Q\rho_l bh}{۲\epsilon_\circ h^۳} a_x = \frac{Q\rho_l b}{۲\epsilon_\circ h^۲} a_x$$

اما :

$$F = \frac{(Q)(\rho_l ۲\pi b)}{۴\pi\epsilon_\circ h^۲} = \frac{QQ''}{۴\pi\epsilon_\circ h^۲} a_x$$

یعنی برای $h >> b$ می‌توان بار حلقه‌ای شکل را بعنوان یک بار نقطه‌ای در فاصله h از بار نقطه‌ای Q در نظر گرفت حال اگر $h = ۰$ آنگاه :

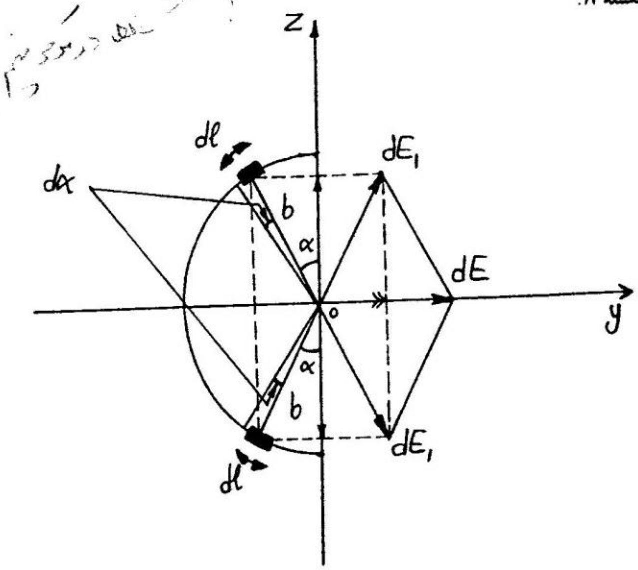
$$\begin{cases} F = \dfrac{Q\rho_l b}{۲\epsilon_\circ h^۲} a_x \\ h \to ۰ \end{cases} \Rightarrow F \to \infty$$



شکل ۳.۵ مسئله ۷ـ(۲)

مسئله ۸: یک بار خطی با چگالی یکنواخت ρ_l در فضای آزاد، یک نیم‌دایره به شعاع b را تشکیل می‌دهد. اندازه و جهت شدت میدان الکتریکی را در ماکزیمم نیم‌دایره تعیین کنید.

پاسخ مسئله ۸:



شکل ۳.۶ مسئله ۸

با توجه به شکل مشاهده می‌شود که هر المان dl در ربع بالای محور yها، یک المان قرینه dl در ربع پایین محور yها دارد.

با تجزیه شدّت میدان الکتریکی دیفرانسیلی dE_1 ناشی از dlها برروی محورهای z,y، خواهیم دید که مؤلّفه‌ها در راستای محور z همدیگر را خنثی می‌کنند و شدّت میدان الکتریکی فقط در راستای محور y دارای مؤلّفه است. چون هر دو dE_1 مساوی هستند داریم:

$$(\text{برآیند})E = 2E_1\cos\frac{(\widehat{E_1,E_1})}{2}$$

$$\Rightarrow (\text{کلّ})dE = 2dE_1\cos(\frac{\pi-2\alpha}{2}) = 2dE_1\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = 2dE_1\sin\alpha$$

$$dE = 2dE_1\sin\alpha \Rightarrow E = \int 2dE_1\sin\alpha$$

اگر Q' بار المان dl باشد داریم:

$$Q' = \rho_l dl = \rho_l b d\alpha$$

$$dE_1 = \frac{\rho_l b d\alpha}{4\pi\epsilon_0 b^2} \Rightarrow E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\rho_l b\sin\alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

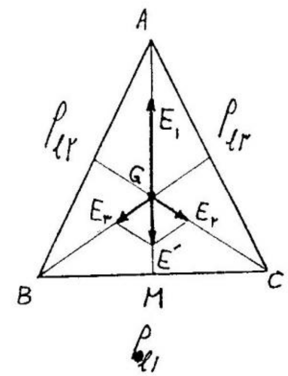
دقّت شود که اگر می‌خواستیم از صفر تا π انتگرال بگیریم باید فقط بایکی از dE_1ها کار می‌کردیم. برای سادگی هر دو را باهم در نظر گرفتیم و حدود انتگرال را به صفر تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر دادیم.

$$E = \frac{-\rho_l b\cos\alpha}{2\pi\epsilon_0 b^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-\frac{\rho_l b\cos 0}{2\pi\epsilon_0 b^2})$$

$$= \frac{\rho_l b}{2\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 b} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 b}\vec{a}_y}$$

مسئله ۹: سه بار خطی یکنواخت ـ ρ_{l1}، ρ_{l2} و ρ_{l3}، هر یک به طول L ـ یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می‌دهند. با فرض $\rho_{l1} = 2\rho_{l2} = 2\rho_{l3}$، شدت میدان الکتریکی را در مرکز مثلث تعیین نمایید.

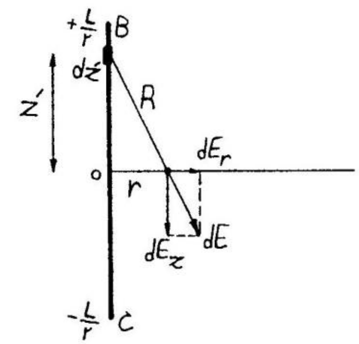
مسئله ۹:



شکل ۳.۶ مسئله ۹_(۱)

با توجه به شکل بالا و درایت به اینکه:

$$\begin{cases} \rho_{l_1} = 2\rho_{l2} = 2\rho_{l3} \\ \rho_{l2} = \rho_{l3} \end{cases}$$



شکل ۳.۷ مسئله ۹_(۲)

مشاهده می‌کنیم که $E_2 = E_3$، از طرفی زاویه بین E_3, E_2 برابر 120° است زیرا مثلث متساوی الاضلاع است لذا :

$$E' = E_2 \text{ و } E_3 \text{برآیند} = 2E_3\cos(\frac{120}{2}) = E_2 = E_3$$

$$(\text{کل})E = E_1 - E'$$

$$E_1 - E_2(E_3 \text{یا}) = E_1 - \frac{E_1}{2} = \frac{E_1}{2} = E_2 = E_3$$

$$(\text{کل})E = \frac{E_1}{2} = E_2 = E_3$$

حال ضلع BC مثلث ABC را در نظر می‌گیریم بسیار دقّت شود که این ضلع دارای ρ_l است که دو برابر ρ_{l2}, ρ_{l3} می‌باشد. اگر r فاصله مرکز ثقل مثلث از BC باشد:

$$r = \frac{1}{3}(AM) = \frac{1}{3}(\sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}}) = \frac{\sqrt{3}}{6}L$$

$$R = a_r r - a_z z'$$

$$dE = \frac{\rho_{l_1} dz'(r a_r - z' a_z)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

در شکل ۹_(۲) : dE ناشی از المان dz' را به مؤلّفه‌های آن در جهت a_z, a_r تجزیه نموده‌ایم. بسادگی دیده می‌شود که برای هر $\rho_{l_1} dz'$ در $+z'$ جزء کوچک بار $\rho_{l_1} dz'$ در $-z'$ وجود دارد که dE با مؤلّفه‌های dE_r و $-dE_z$ را تولید می‌نماید. از این رو مولفه‌های a_z در فرآیند انتگرال گیری حذف خواهند شد. و تنها لازم است dE_r را مورد انتگرال گیری قرار دهیم. امّا ذکر این نکته، بسیار اساسی و مهّم است که مسئله در حالت خاصی است که E_1 برروی عمود منصف بار خطی محدود خواسته شده است و لذا مولفه‌های z همدیگر را خنثی کردند و گرنه جز در حالت بار خطی نامحدود و این حالت خاصّ یاد شده هرگز نمی‌توان مولفه‌های z را نادیده گرفت.

$$\Rightarrow E_1 = a_r E_r = a_r \frac{\rho_l r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

با استفاده از جدول انتگرال داریم :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + k^2)^{3/2}} = \frac{x}{k^2(x^2 + k^2)^{1/2}}$$

لذا:

$$\int \frac{dz'}{(z'^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{z'}{r^2(z'^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow E_1 = a_r \frac{\rho_{l1} r}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{z'}{r^2(r^2+z'^2)^{1/2}}\right)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{a_r\rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{L}{2((\frac{L}{2})^2+r^2)^{1/2}} + \frac{L}{2((\frac{L}{2})^2+r^2)^{1/2}}\right)$$

از طرفی داشتیم $r = \frac{\sqrt{3}}{6}L$

بنابراین :
$$E_1 = a_r \frac{6\rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{3}L}\left(\frac{L}{(\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{12})^{1/2}}\right)$$

$$E_1 = a_r \frac{6\rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{3}L}\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \frac{3\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0 L}$$

امّا همانطور که ثابت شد : $E_{\text{کل}} = \frac{E_1}{2}$

$$\Rightarrow E(\text{کل}) = \frac{3\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E(\text{کل}) = \frac{3\rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0 L}$$

٤

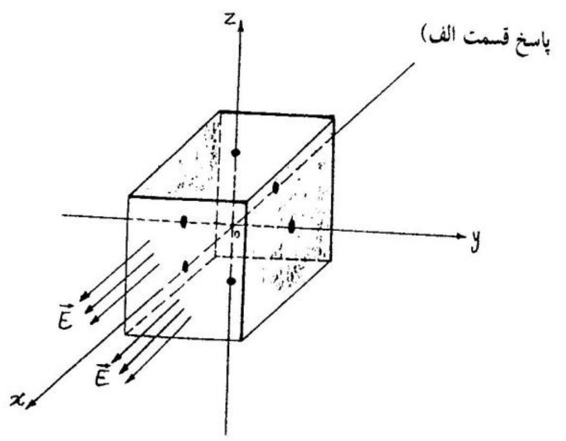
مسئله ۱۰. فرض کنید شدت میدان الکتریکی $E = a_x 100x(V/m)$ موجود است. کل بار الکتریکی موجود در درون

الف) حجم مکعبی شکل به ضلع $100(mm)$، که به طور متقارن حول مبدأ قرار دارد.

ب) حجم استوانه‌ای در اطراف محور z، به شعاع $50(mm)$ و ارتفاع $100(mm)$ به مرکز مبدأ

را پیدا کنید.

پاسخ قسمت الف)



شکل ۳.۸ مسئله ۱۰-(۱)

بنا به قانون گوس : $\oint E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$ اما حجم، یک مکعب است و دارای شش وجه یعنی شش سطح لذا:

$$\underbrace{\int E\cdot ds}_{\text{(روی سطح پایینی)}} + \underbrace{\int E\cdot ds}_{\text{(روی سطح بالایی)}} + \underbrace{\int E\cdot ds}_{\text{(روبرو)}} + \underbrace{\int E\cdot ds}_{\text{(پشت)}}$$

$$+ \underbrace{\int E\cdot ds}_{\text{(روی سطح چپ)}} + \underbrace{\int E\cdot ds}_{\text{(روی سطح راست)}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

از طرفی می‌دانیم میدان E داده شده تنها دارای مؤلفه x است بنابراین برروی سطوح بالا، پایین، چپ و راست حاصل $\int Eds$ صفر خواهد بود. لذا :

$$\underbrace{\oint E\cdot ds}_{\text{(روی سطح چپ)}} + \underbrace{\oint E\cdot ds}_{\text{(روی سطح راست)}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = \epsilon_0(2E\int ds)$$

(توضیح اینکه $\int ds$ همان سطح هر وجه مربع است)

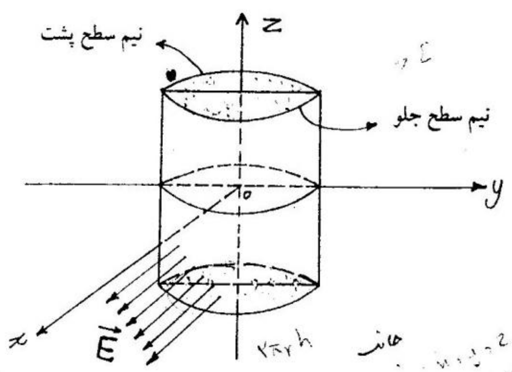
$$\Rightarrow Q = \epsilon_0(2\times 100x)\left(\frac{100}{1000}\times\frac{100}{1000}\right)$$

$$= \epsilon_\circ(۲ \times ۱۰۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰۰})(\frac{۱۰۰}{۱۰۰۰} \times \frac{۱۰۰}{۱۰۰۰})$$

$$= \epsilon_\circ(۱۰)(\frac{۱}{۱۰۰}) = \frac{\epsilon_\circ}{۱۰} = ۰/۱\epsilon_\circ = ۰/۱ \times ۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} = ۰/۸۸۵ \text{(پیکوکولمب)}$$

پاسخ قسمت ب)

بنابه توضیح قسمت الف) روی سطوح بالا و پائین $\int E \cdot ds$ صفر است.



شکل ۳.۹ مسئله ۱۰_(۲)

$$\underbrace{\int E \cdot ds}_{\text{(روی نیم سطح پشتی)}} + \underbrace{\int E \cdot ds}_{\text{(روی نیم سطح جلویی)}} = \frac{Q}{\epsilon_\circ}$$

$$\Rightarrow (\frac{۲\pi rh}{۲})۱۰۰x + (\frac{-۲\pi rh}{۲})۱۰۰(-x) = \frac{Q}{\epsilon_\circ}$$

علامت منفی اوّل مربوط به بردار نیم سطح پشتی است که رو بطرف محور xهای منفی است و جهت آن بسوی بیرون سطح است. علامت منفی دوّم شامل xهای منفی نیم سطح پشتی است. قابل ذکر است که در بند الف) نیز این مراحل را طی کرده‌ایم.

$$\pi rh(۱۰۰x) + \pi rh(۱۰۰x) = \frac{Q}{\epsilon_\circ}$$

$$۲\pi rh(۱۰۰x) = \frac{Q}{\epsilon_\circ} \Rightarrow Q = \epsilon_\circ(۲\pi rh)(۱۰۰x)$$

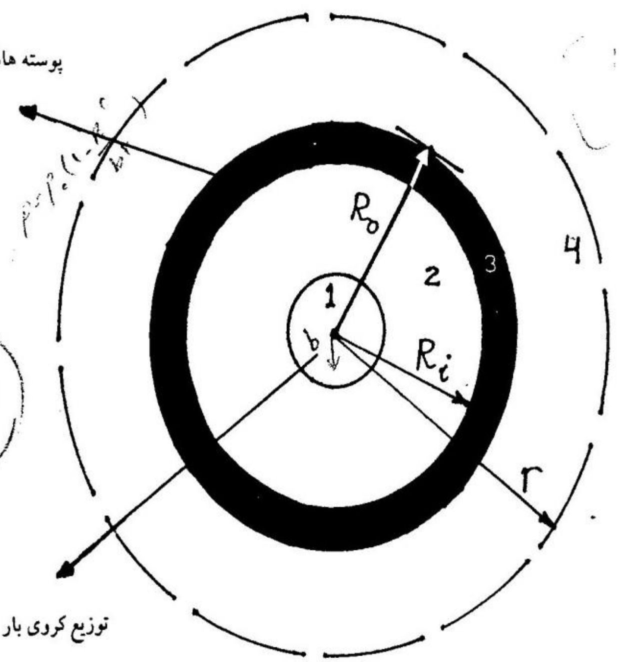
$$\Rightarrow Q = \epsilon_\circ(۲\pi \times \frac{۵۰}{۱۰۰۰} \times \frac{۱۰۰}{۱۰۰۰})(۱۰۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰۰})$$

$$= \epsilon_\circ(۰/۰۵)\pi = (۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲})(۰/۰۵)\pi$$

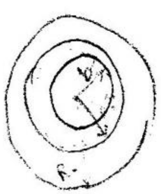
$$= (۸/۸۵ \times ۰/۰۵ \times ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۴) \times ۱۰^{-۱۲}$$

$$= ۱/۳۹۰۱۵۴۷۴۹ \times ۱۰^{-۱۲} \simeq ۱/۴ \times ۱۰^{-۱۲} \Rightarrow Q = ۱/۴ \text{(پیکوکولمب)}$$

مسئله ۱۱: توزیع کروی بار $p = p_\circ[۱ - (R^۲/b^۲)]$ در ناحیه $۰ \le R \le b$ موجود است. این توزیع بار به صورت هم مرکز توسط یک سطح پوستهٔ هادی با شعاع داخلی $R_i(> b)$ و شعاع خارجی $R_\circ$ احاطه شده است. E را در کلیهٔ نقاط تعیین کنید.



شکل ۳.۱۰ مسئله ۱۱



در ناحیه $r > R_o$:

$$\oint E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_4\int ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_4(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

$$Q = \int \rho dv = \int_0^b \rho_0[1-(\frac{R^2}{b^2})](4\pi R^2)dR = 4\pi\rho_0\int_0^b (R^2 - \frac{R^4}{b^2})dR$$

$$= 4\pi\rho_0(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5b^2})\Big|_0^b = \frac{4\pi(2b^3\rho_0)}{15}$$

$$(1)\text{از رابطه} \Rightarrow E_4 = \frac{4\pi(2b^3\rho_0)}{15(4\pi\epsilon_0 r^2)} \Rightarrow \boxed{E_4 = \frac{2b^3\rho_0}{15\epsilon_0 r^2}}$$

در ناحیه $R_i < R < R_o$:

$E_3 = 0$ زیرا شدت میدان در درون هر هادی صفر است. (رجوع کنید به رابطه (۳ـ۷۰) صفحه ۱۲۳ ـ فصل سوم کتاب درسی)

در ناحیه $b \le R < R_i$:

$$\oint E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2\int ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2(4\pi R^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2)$$

$$Q = \int \rho dv = \int_0^b \rho_0[1-(\frac{R^2}{b^2})](4\pi R^2)dR = \frac{4\pi(2b^3\rho_0)}{15}$$

$$(2)\text{از رابطه} \Rightarrow E_2 = \frac{4\pi(2b^3\rho_0)}{15(4\pi\epsilon_0 R^2)} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{2b^3\rho_0}{15\epsilon_0 R^2}}$$

در ناحیه $0 \le R \le b$

$$\oint E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1(4\pi R^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (3)$$

$$Q = \int \rho dv = \int_0^R \rho_0(1-\frac{R^2}{b^2})(4\pi R^2)dR = 4\pi\rho_0\int_0^R (R^2 - \frac{R^4}{b^2})dR$$

$$= 4\pi\rho_0(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5b^2})\Big|_0^R = 4\pi\rho_0(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5b^2})$$

$$(3)\text{از رابطه} \Rightarrow E_1 = \frac{4\pi\rho_0(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5b^2})}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$= \frac{\rho_0 R^3(\frac{1}{3} - \frac{R^2}{5b^2})}{\epsilon_0 R^2} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\rho_0 R}{\epsilon_0}(\frac{1}{3} - \frac{R^2}{5b^2})}$$

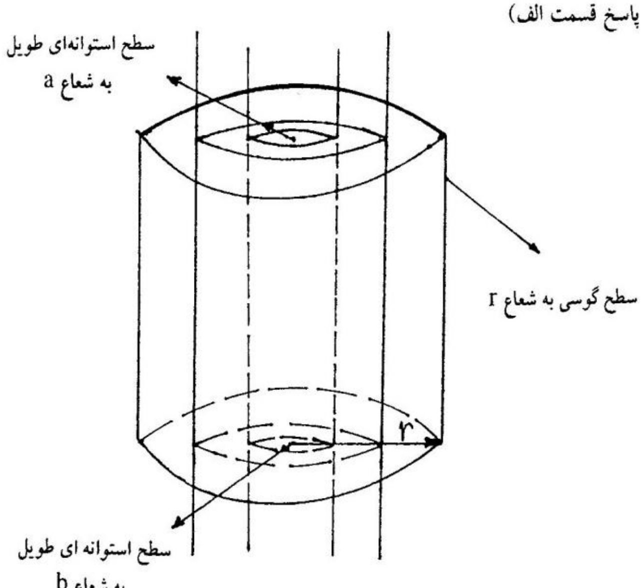
٦

مسئله ۱۲: دو سطح استوانه‌ای هم محور بینهایت طویل $r = a$ و $r = b$ $(b > a)$ به ترتیب چگالی‌های بار سطحی ρ_{sa} و ρ_{sb} را حمل می‌کنند.

الف) E را در تمام نقاط تعیین کنید.

ب) رابطهٔ بین a و b چه باشد، تا اینکه E در $r > b$ صفر شود؟

پاسخ قسمت الف)



شکل ۳.۱۱ مسئله ۱۲

یک سطح گوسی بشعاع $r > b$ را در نظر می‌گیریم.

بنابه قانون گوس : $\int E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_۰}$

$$E_۱(۲\pi r l) = \frac{Q}{\epsilon_۰} \Rightarrow E_۱ = \frac{Q}{۲\pi r\epsilon_۰ l} \qquad (۱)$$
$$Q = \rho\cdot s = \rho_۱ s_۱ + \rho_۲ s_۲ = \rho_{sa}(۲\pi a l) + \rho_{sb}(۲\pi b l)$$

با جایگذاری رابطه اخیر در معادله (۱) داریم :

$$E_۱ = \frac{\rho_{sa}(۲\pi a l) + \rho_{sb}(۲\pi b l)}{۲\pi r\epsilon_۰ l} = \frac{۲\pi l(\rho_{sa}\times a + \rho_{sb}\times b)}{۲\pi l r\epsilon_۰}$$
$$\Rightarrow \boxed{E_۱ = \frac{a\rho_{sa} + b\rho_{sb}}{\epsilon_۰ r}}$$

برای ناحیه $a < r < b$ یک سطح گوسی بشعاع $a < r < b$ در نظر می‌گیریم : (این سطح فرضی در شکل مسئله ۱۲ نشان داده شده است.)

$$\begin{cases} E_۲ = \frac{Q}{۲\pi r\epsilon_۰ l} \\ Q = \rho\cdot s = \rho_۱\cdot s_۱ = \rho_{sa}(۲\pi a l) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_۲ = \frac{\rho_{sa}(۲\pi a l)}{(۲\pi l) r\epsilon_۰} \Rightarrow E_۲ = \frac{a\rho_{sa}}{\epsilon_۰ r}$$

برای $r < a$ داریم $Q = ۰$ در نتیجه $E_۳ = ۰$

پاسخ قسمت ب)

$$E_۱ = ۰ \Rightarrow a\rho_{sa} = -b\rho_{sb} \Rightarrow a = (-\frac{\rho_{sb}}{\rho_{sa}})b$$

مسئله ۱۳: کار انجام شده در حمل بار $-۲(\mu C)$ را از نقطهٔ $P_۱(۲,۱,-۱)$ تا نقطهٔ $P_۲(۸,۲,-۱)$ در میدان $E = a_x y + a_y x$ را در امتدادهای زیر تعیین کنید.

الف) سهمی $x = ۲y^۲$

ب) خط مستقیم اتصال دهندهٔ نقاط $P_۱$ و $P_۲$

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} Q = -۲\mu c, E = y a_x + x a_y \\ P_۱(۲,۱,-۱) - P_۲(۸,۲,-۱) \\ x = ۲y^۲ \text{ مسیر حرکت در امتداد سهمی} \end{cases}$$

$$V = \frac{W}{q} = -\int_{P_۱}^{P_۲} E\cdot dl \Rightarrow \begin{cases} W = -q\int_{P_۱}^{P_۲} E\cdot dl \\ dl = dx a_x + dy a_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = -(-۲)\times ۱۰^{-۶}\int_{P_۱}^{P_۲}(y a_x + x a_y)(dx a_x + dy a_y)$$
$$= ۲[\int_{P_۱}^{P_۲} y dx + \int_{P_۱}^{P_۲} x dy]\times ۱۰^{-۶}$$
$$= ۲[\int_{P_۱}^{P_۲}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{۲}} + \int_{P_۱}^{P_۲} ۲y^۲ dy]\times ۱۰^{-۶}$$
$$= ۲[\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}x^{۳/۲}|_۲^۸ + \frac{۲y^۳}{۳}|_۱^۲]\times ۱۰^{-۶}$$
$$= ۲[\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}(۸\times ۲\sqrt{۲} - ۱\sqrt{۲}) + \frac{۲}{۳}(۸-۱)]\times ۱۰^{-۶} = ۲[\frac{۲۸}{۳} + \frac{۱۴}{۳}]\times ۱۰^{-۶}$$
$$= ۲\times ۱۴\times ۱۰^{-۶} \Rightarrow W = ۲۸\mu J (\text{میکروژول})$$

پاسخ قسمت ب)

معادله خط مستقیم اتصال دهنده نقاط $P_۲P_۱$:

$$\frac{y-۱}{x-۲} = \frac{۲-۱}{۸-۲} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow y - ۱ = \frac{۱}{۶}(x-۲) \Rightarrow y = \frac{۱}{۶}x + \frac{۲}{۳}, x = ۶(y - \frac{۲}{۳})$$
$$W = -(-۲)\times ۱۰^{-۶}(\int_۲^۸(\frac{۱}{۶}x + \frac{۲}{۳})dx - \int_۱^۲(۶y - ۴)dy)$$
$$= ۲\times ۱۰^{-۶}(\frac{۱}{۶}\times\frac{x^۲}{۲} + \frac{۲}{۳}x)|_۲^۸ + ۲\times ۱۰^{-۶}(\frac{۶y^۲}{۲} - ۴y)|_۱^۲$$
$$= ۲\times ۱۰^{-۶}[(\frac{۶۴}{۱۲} + \frac{۱۶}{۳} - \frac{۴}{۱۲} - \frac{۴}{۳}) + (\frac{۲۴}{۲} - ۸ - \frac{۶}{۲} + ۴)]$$

$$= [2(\frac{60}{12} + \frac{12}{3}) + 2(12 - 4 - 3)] \times 10^{-6}$$

$$= [2(9) + 2(5)] \times 10^{-6} = [18 + 10] \times 10^{-6} \Rightarrow W = 28\mu J \text{(میکروژول)}$$

مسئله ۱۴: به ازای چه مقدار θ، شدت میدان الکتریکی یک دوقطبی واقع بر محور z دارای مؤلفه z نخواهد بود؟

بنابه رابطه (۳ـ۳۱) صفحه ۱۰۳ کتاب درسی دیویدچنگ از فصل سوّم داریم:

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^3}(2\cos\theta a_R + \sin\theta a_\theta) \qquad (1)$$

نیز بنابه رابطه (۲ـ۷۷) صفحه ۴۴ کتاب درسی از فصل دوّم داریم:

$$A_z = A_R \cos\theta - A_\theta \sin\theta \qquad (2)$$

امّا در رابطه (۱) داریم:

$$\begin{cases} A_R = 2\cos\theta \\ A_\theta = \sin\theta \end{cases}$$

لذا با توجه به رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$A_z = 2\cos^2\theta - \sin^2\theta$$

حال اگر قرار باشد که مولفه z نداشته باشیم باید $A_z = 0$ شود یعنی:

$$2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}(\pm\sqrt{2})}$$

مسئله ۱۵: سه بار $(+q, -2q, +q)$ در طول محور z به ترتیب در نقاط $z = d/2$، $z = 0$ و $z = -d/2$ قرار دارند.

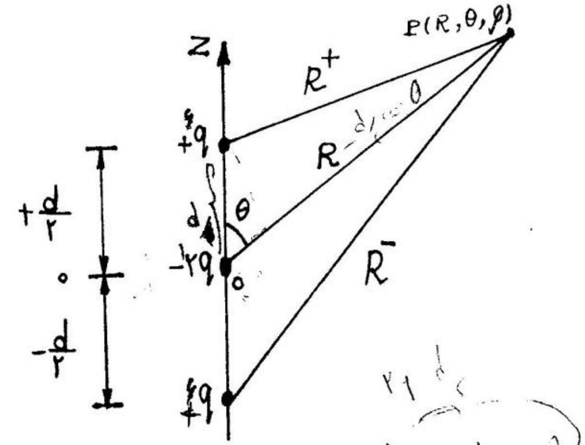
الف) V و E را در نقطه دور $P(R, \theta, \phi)$ بیابید.

ب) معادلات سطوح هم پتانسیل و خطوط جریانی را رسم کنید.

(این ترتیب سه بار را چهار قطبی خطی الکتریسیته ساکنی [1] می‌نامند.)

[1] Linear electrostatic quadrupole

پاسخ قسمت الف)



شکل ۳.۱۲ مسئله ۱۵

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{x=1}^{n}\frac{q_k}{|R - R'_k|} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{4q}{R^+} + \frac{6q}{R^-} - \frac{12q}{R})$$

$$\Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{4}{R^+} + \frac{6}{R^{-1}} - \frac{12}{R}) \qquad (1)$$

$R\frac{d}{2}R^+$ در مثلث : $R^+ = \sqrt{R^2 + (\frac{d}{2})^2 - 2R\frac{d}{2}\cos\theta}$

$$\Rightarrow R^+ = \sqrt{R^2 + \frac{d^2}{4} - Rd\cos\theta} = R\sqrt{1 + \frac{d^2}{4R^2} - \frac{d}{R}\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^+} = \frac{1}{R} \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{d^2}{4R^2} - \frac{d}{R}\cos\theta)}}$$

$$= \frac{1}{R}[1 + (\frac{d^2}{4R^2} - \frac{d}{R}\cos\theta)]^{-\frac{1}{2}}$$

$R\frac{d}{2}R^-$ بهمین ترتیب در مثلث : $R^- = \sqrt{R^2 + (-\frac{d}{2})^2 + 2R\frac{d}{2}\cos\theta}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^-} = \frac{1}{R}\left[1+\left(\frac{d^2}{4R^2}+\frac{d}{R}\cos\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

با توجه به رابطه (۱):

$$\Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R}\left[1+\left(\frac{d^2}{4R^2}-d\frac{\cos\theta}{R}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{R}\left[1+\left(\frac{d^2}{4R^2}+\frac{d}{R}\cos\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}}-\frac{2}{R}\right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left[\left[1+\left(\frac{d^2}{4R^2}-\frac{d\cos\theta}{R}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[1+\left(\frac{d^2}{4R^2}+\frac{d\cos\theta}{R}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}-2\right]\times\frac{1}{R}$$

حال از بسط ریاضی زیر استفاده می‌کنیم:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^2}{2}+\cdots+\cdots = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$$

لذا:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left[\left[1-\frac{d^2}{8R^2}+\frac{d\cos\theta}{2R}+\frac{3}{8}\left(\frac{d^4}{16R^4}+\frac{d^2\cos^2\theta}{R^2}-\frac{d^3\cos\theta}{2R^3}\right)\right] + \left[1-\frac{d^2}{8R^2}-\frac{d\cos\theta}{2R}+\frac{3}{8}\left(\frac{d^4}{16R^4}+\frac{d^2\cos^2\theta}{R^2}+\frac{d^3\cos\theta}{2R^3}\right)\right]-2\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left[\frac{3d^4}{64R^4}-\frac{d^2}{4R^2}+\frac{3d^2\cos^2\theta}{4R^2}\right]$$

با توجه به صورت مسئله P در فاصله بسیار دوری از بارها قرار دارد لذا $R >> d$ بنابراین توان چهارم نسبت $(\frac{d}{R})$ یعنی $\frac{d^4}{R^4}$ قابل صرف نظر است.یعنی:

$$\frac{3d^4}{64R^4}\simeq\to 0 \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{3d^2\cos^2\theta}{4R^2}-\frac{d^2}{4R^2}\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{qd^2}{16\pi\epsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta-1)$$

می‌دانیم: $E=-\nabla V, V=\frac{qd^2(3\cos^2\theta-1)}{16\pi\epsilon_0 R^3}$

اما در مختصات کروی: $\nabla V = (\frac{\partial V}{\partial R}a_R+\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta}a_\theta)$

لذا:

$$E = -\left(\frac{\partial V}{\partial R}a_R+\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta}a_\theta\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{-3qd^2}{16\pi\epsilon_0 R^4}(3\cos^2\theta-1)$$

$$\frac{1}{R}\times\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{-3qd^2(2\sin\theta\cos\theta)}{16\pi\epsilon_0 R^4} = \frac{3qd^2\sin 2\theta}{16\pi\epsilon_0 R^4}$$

$$\Rightarrow E = -\left(-\frac{3qd^2}{16\pi\epsilon_0 R^4}(3\cos^2\theta-1)-\frac{3qd^2\sin 2\theta}{16\pi\epsilon_0 R^4}\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{3qd^2}{16\pi\epsilon_0 R^4}[(3\cos^2\theta-1)a_R+(\sin 2\theta)a_\theta] \qquad (1)$$

$$V = \frac{qd^2}{16\pi\epsilon_0}\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{R^3}\right)$$

ب) مانند مثال (۳ـ۸) صفحه ۱۱۶ کتاب درسی عمل می‌کنیم:

$$\frac{qd^2}{16\pi\epsilon_0}\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{R^3}\right)=C$$ مقداری ثابت

$$\Rightarrow \begin{cases} R^3 = \dfrac{qd^2(3\cos^2\theta-1)}{16\pi\epsilon_0 C} \\ \dfrac{qd^2}{16\pi\epsilon_0 C} = C_V \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{R^3 = C_V(3\cos^2\theta-1)}$$ معادله سطوح هم پتانسیل

داریم: $dl = KE \Rightarrow E = K'dl$

(رابطه (۳ـ۵۶) کتاب درسی را ببینید.)

$$\Rightarrow E_R a_R + E_\theta a_\theta + E_\phi a_\phi = K'(dRa_R + Rd\theta a_\theta + R\sin\theta d\phi a\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{E_R}{dR} = \frac{E_\theta}{Rd\theta} = \frac{E_\phi}{R\sin\theta d\phi}$$

امّا رابطه‌ای که برای E بدست آوردیم مستقل از $E_\phi a_\phi$ می‌باشد (رابطه (۱) را ببینید.) لذا:

$$\frac{E_R}{dR} = \frac{E_\theta}{Rd\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{3\cos^2\theta - 1}{dR} = \frac{\sin 2\theta}{Rd\theta} \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{(3\cos^2\theta - 1)d\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{(2\cos^2\theta + \cos^2\theta - 1)d\theta}{\sin 2\theta} = \frac{(2\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta))d\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta}{2\sin\theta\cos\theta} \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta d\theta}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \ln(R) = \ln(\sin\theta) + \frac{1}{2}\ln(\cos\theta) + \ln(C)$$

که C مقدار ثابتی است که از انتگرال گیری حاصل شده است.

$$2\ln(R) = 2\ln(\sin\theta) + \ln(\cos\theta) + 2\ln C$$

$$\ln(R)^2 = \ln(\sin^2\theta) + \ln(\cos\theta) + \ln(C_E)$$

با استفاده از خواص ریاضی لگاریتم $\Rightarrow$ معادله خطوط جریانی : $\boxed{R^2 = C_E\sin^2\theta\cos\theta}$

پاسخ قسمت پ)

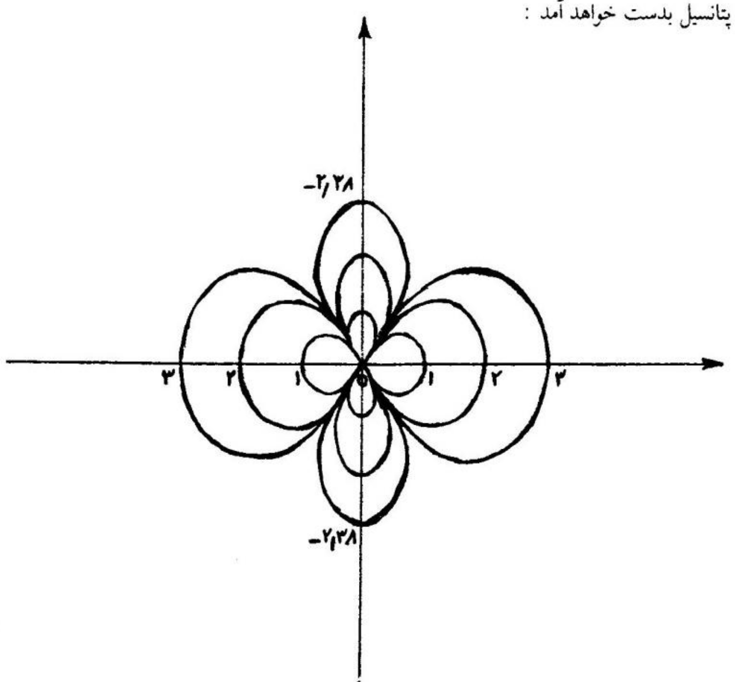
معادله سطوح هم سطح پتانسیل : $R = \sqrt[2]{C_V(3\cos^2\theta - 1)}$

با قرار دادن مقادیر ثابت دلخواه به C_V مثلاً ۰/۵ ، ۴ ، ۱۳/۵ نمودار زیر برای سطوح هم سطح

جدول ۳.۱ : مسئله ۱۵ـ۱

C_V/θ^0	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۶۵	۱۸۰
۰/۵	۱	۰/۹۷	۰/۸۵	۰/۶۳	−۰/۵	−۰/۷۹	−۰/۵	۰/۶۳	۰/۸۵	۰/۹۷	۱
۴	۲	۱/۹۳	۱/۷۱	۱/۲۶	−۱	−۱/۹۵	−۱	۱/۲۶	۱/۷۱	۱/۹۳	۲
۱۳/۵	۳	۲/۹	۲/۵۶	۱/۸۹	−۱/۵	−۲/۲۸	−۱/۵	۱/۸۹	۲/۵۶	۲/۹	۳

پتانسیل بدست خواهد آمد :



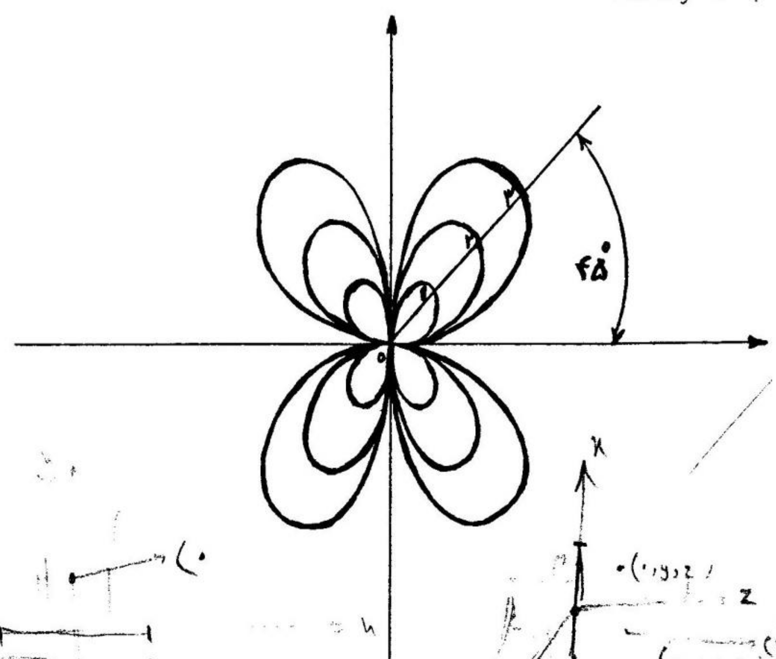
شکل ۳.۱۳ مسئله ۱۵ـ(۱)

معادله خطوط جریان : $R = \pm\sqrt{C_E\sin^2\theta\cos\theta}$

جدول ۳.۲: مسئله ۱۵_۲

C_V/θ°	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۶۵	۱۸۰
$۲\sqrt{۲}$	۰	۰/۴۳	۰/۷۸	۱	۱/۰۳	۰	۱/۰۳	۱	۰/۷۸	۰/۴۳	۰
$۸\sqrt{۲}$	۰	۰/۸۶	۱/۵۷	۲	۲/۰۶	۰	۲/۰۶	۲	۱/۵۷	۰/۸۶	۰
$۱۸\sqrt{۲}$	۰	۱/۲۸	۲/۳۵	۳	۳/۰۹	۰	۳/۰۹	۳	۲/۳۵	۱/۲۸	۰

با قرار دادن مقادیر ثابت دلخواه به C_E مثلاً $۲\sqrt{۲}, ۸\sqrt{۲}, ۱۸\sqrt{۲}$ نمودار زیر برای خطوط جریان بدست خواهد آمد :



شکل ۳.۱۴ مسئله ۱۵_(۲)

$R = +y a_y + z a_z$

$R' =$

نکته بسیار مهم اینکه؛ خطوط میدان الکتریکی همه جا بر خطوط هم پتانسیل عمودند.

مسئله ۱۶: یک بار خطی محدود به طول L، چگالی بار خطی یکنواخت ρ_l را حمل می‌کند و بر محور x منطبق است.

الف) V را در صفحه نیمساز بار خطی تعیین کنید.

ب) با استفاده از قانون کولمب، مستقیماً E را از روی ρ_l تعیین کنید.

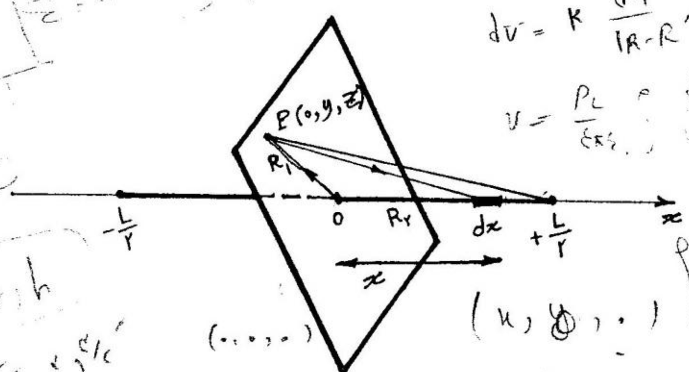
پ) جواب بند (ب) را با $-\nabla V$ وارسی کنید.

پاسخ قسمت الف)

می‌دانیم : $V = \dfrac{\rho_l}{۴\pi\epsilon_\circ}\displaystyle\int \dfrac{dl}{|R - R'|}$

$$\begin{cases} R_۱ = y a_y + z a_z \\ R_۲ = x a_x \end{cases}$$

$dV = K \dfrac{dq}{|R-R'|}$



شکل ۳.۱۵ مسئله ۱۶

نکته: $(R - R')$ همواره بطور لفظی بصورت نقطه منهای بار نلقّی می‌شود.

$$(R - R') = (R_۱ - R_۲) = y a_y + z a_z - (x a_x) = -x a_x + y a_y + z a_z$$

$$\Rightarrow |R_۱ - R_۲| = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

$$V = \frac{\rho_l}{۴\pi\epsilon_\circ}\int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}} \frac{dx}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$$

با استفاده از جدول انتگرال داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+k^{2}}} = \sinh^{-1}(\frac{x}{k})$$

[$\sinh(\alpha)$ نشانگر سینوس هیپربولیک زاویه α است.]

در نتیجه:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+(y^{2}+z^{2})}} = \sinh^{-1}(\frac{x}{\sqrt{y^{2}+z^{2}}})$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\sinh^{-1}(\frac{x}{\sqrt{y^{2}+z^{2}}})\Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}[\sinh^{-1}(\frac{L}{2\sqrt{y^{2}+z^{2}}}) + \sinh^{-1}(\frac{L}{2\sqrt{y^{2}+z^{2}}})]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\sinh^{-1}(\frac{L}{2\sqrt{y^{2}+z^{2}}})$$

$dq = \rho_L dl$

پاسخ قسمت ب)

$$E = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dl(R-R')}{|R-R'|^{3}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dl(R_1-R_2)}{|R_1-R_2|^{3}}$$

$\rho_L \cdot dx a_x$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx(-xa_x + ya_y + za_z)}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}}$$

مولفه a_x صفر است در نتیجه:

$$E = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(ydxa_y + zdxa_z)}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}(\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(ydx)a_y}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}} + \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(zdx)a_z}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}})$$

$$= \frac{y\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}}a_y + \frac{z\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}}a_z$$

با توجه به جدول انتگرال درایم :

$$\int \frac{dx}{(x^{2}+k^{2})^{3/2}} = \frac{1}{k^{2}}(\frac{x}{\sqrt{x^{2}+k^{2}}})$$

بنابراین :

$$\int \frac{dx}{[x^{2}+(y^{2}+z^{2})]^{3/2}} = \frac{1}{(y^{2}+z^{2})} \times \frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{y\rho_l}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{y^{2}+z^{2}})\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

$$+ \frac{z\rho_l}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{y^{2}+z^{2}})\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_l \cdot L(ya_y + za_z)}{2\pi\epsilon_0(y^{2}+z^{2})\sqrt{L^{2}+4y^{2}+4z^{2}}} \qquad (1)$$

پاسخ قسمت پ)

$$\begin{cases} V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\sinh^{-1}(\frac{L}{2\sqrt{y^{2}+z^{2}}}) \\ E = -\nabla V \end{cases}$$

$$E = -\nabla V = -(\frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{\frac{-yl/2}{\sqrt{y^{2}+z^{2}}}}{(y^{2}+z^{2})}\right) \div \left(\sqrt{(\frac{l^{2}}{4(y^{2}+z^{2})}+1)}\right)$$

زیرا : $(\sinh^{-1}u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^{2}}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-\rho_l yl}{2\pi\epsilon_0(y^{2}+z^{2})\sqrt{l^{2}+4(y^{2}+z^{2})}} \qquad (3)$$

$dq = \rho_L dx$

بهمین ترتیب :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{dq}{|R-R'|} \qquad dV = k\frac{dq}{|R-R'|}$$

$$\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{|R-R'|}$$

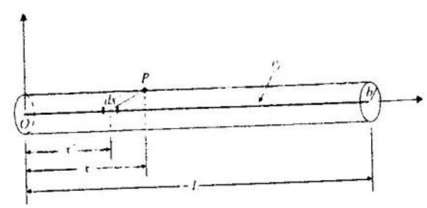
$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-\rho_l z l}{2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)\sqrt{l^2+4(y^2+z^2)}} \qquad (۴)$$

$$\text{از روابط (۲)، (۳)، (۴)} \Rightarrow E = \frac{\rho_l \cdot L(y a_y + z a_z)}{2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)\sqrt{l^2+4y^2+4z^2}}$$

با توجه به رابطه اخیر در مورد E و رابطه (۱) نتیجه می‌شود :

مسئله ۱۷: در مثال ۳ـ۵ با اعمال قانون گوس، شدت میدان الکتریکی را در اطراف یک بار خطی بینهایت طول با چگالی بار یکنواخت، با یک راه ساده‌تر، بدست می‌آوریم. چون $|E|$ فقط تابعی از r است، هر استوانهٔ هم محور در اطراف بار خطی بینهایت طویل، یک سطح هم پتانسیل است. در عمل، تمام هادیها دارای طول محدود هستند. یک بار خطی محدود حامل چگالی بار ثابت ρ_l در امتداد محور، پتانسیل ثابتی بر روی سطح استوانه‌ای هم مرکز ایجاد نمی‌کند. با فرض بار خطی محدود ρ_l به طول L در شکل ۳ـ۴۰، پتانسیل را روی سطح استوانه‌ای به شعاع b، برحسب تابعی از x تعیین و رسم کنید.

(راهنمایی : dV ناشی از بار $\rho_l dx'$ را در نقطه P تعیین کنید و انتگرال بگیرید.)



شکل ۳.۱۶ مسئله ۱۷

$$\begin{cases} V_P = \dfrac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{dl}{|R-R'|} \\ |R-R'| = \sqrt{(x-x')^2+b^2} \end{cases}$$

$$V_P = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2+b^2}}$$

$$V_P = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{(dx'-dx)}{\sqrt{(x-x')^2+b^2}}$$

دقّت شود که اضافه یا کم کردن dx تاثیری بر انتگرال گیری ندارد زیرا انتگرال گیری مستقل از x است و فقط وابسته به x' است. لذا dx خود به خود صفر خواهد بود. اما برای ایجاد عامل مشترک $(x-x')$ در صورت و مخرج، این کار ضرورت دارد.

$$V_P = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{d(x'-x)}{\sqrt{(x-x')^2+b^2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{-d(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2+b^2}}$$

با توجه به جدول انتگرال داریم :

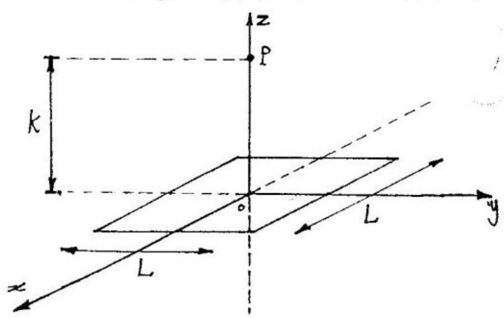
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{k}\right)$$

لذا :

$$V_P = \frac{-\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\sinh^{-1}\left(\frac{(x-x')}{b}\right)\Big]_0^l = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\sinh^{-1}\left(\frac{(x-x')}{b}\right)\Big]_l^0$$

$$V_P = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{(L-x)}{b}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\right)$$

مسئله ۱۸: بار Q به طور یکنواخت روی صفحهٔ مربعی $L \times L$ توزیع شده است. V و E را در نقطه‌ای روی محور عمود بر صفحه و گذرنده از مرکز آن تعیین کنید.



شکل ۳.۱۷ مسئله ۱۸

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{s'} a_R \frac{\rho_s}{R^2}$$:(رابطه ۳ ـ ۳۵)

$$\begin{cases} R = ka_z (\text{یک ثابت است } k) \\ R' = xa_x + ya_y \\ \rho_s = \dfrac{Q}{s} = \dfrac{Q}{L^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} R - R' = -xa_x - ya_y + ka_z \\ |R - R'| = \sqrt{x^2 + y^2 + k^2} \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_s ds'}{|R - R'|^2}\left(\frac{R - R'}{|R - R'|}\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_s dxdy}{(x^2 + y^2 + k^2)^{3/2}}(-xa_x - ya_y + ka_z)$$

با توجّه به شرط خاصّ مسئله که میدان را در نقطه‌ای روی محور خواسته، بنابه تقارن، شدت میدان فقط در راستای z مؤلفه دارد:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(\rho_s h a_z)dxdy}{(x^2 + y^2 + k^2)^{3/2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{s'} \frac{\rho_s ds'}{R}$$:(رابطه ۳ ـ ۶۲)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{\rho_s dxdy}{(x^2 + y^2 + k^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\pi\epsilon_0}\int_0^{+\frac{L}{2}}\int_0^{+\frac{L}{2}} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\pi\epsilon_0}\int_0^{+\frac{L}{2}} (\ln(x + (x^2 + y^2 + h^2)^{1/2})\Big|_0^{+\frac{L}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\pi\epsilon_0}\int_0^{+\frac{L}{2}} \left[\ln\left(\frac{L}{2} + (\frac{L^2}{4} + y^2 + h^2)^{1/2}\right) - \ln\left((y^2 + h^2)^{1/2}\right)\right]dy$$

$$= \frac{1}{\pi\epsilon_0}\int_0^{+\frac{L}{2}} \left[\underbrace{\ln\left(\frac{L}{2} + (\frac{L^2}{4} + y^2 + h^2)^{1/2}\right)}_{I} - \underbrace{\ln\left((y^2 + h^2)^{1/2}\right)}_{II}\right]dy$$

$$I = \int \ln\left(\frac{L}{2} + (\frac{L^2}{4} + y^2 + h^2)^{1/2}\right)dy$$

$$= y\ln\left(\frac{L}{2} + (\frac{L^2}{4} + y^2 + h^2)^{1/2}\right)$$

$$- \underbrace{\int \frac{y^2 dy}{(y^2 + h^2 + \frac{L^2}{4})^{1/2}(\frac{L}{2} + (\frac{L^2}{4} + y^2 + h^2)^{1/2})}}_{k}$$

$$= \frac{L}{2}\ln(\frac{L}{2} + (\frac{L^2}{2} + h^2)^{1/2}) - k$$

$$dy = du \Rightarrow u = y$$

$$k = \ln\left(\frac{L}{2} + (\frac{L^2}{4} + y^2 + h^2)^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow dk = \frac{ydy}{(y^2 + h^2 + \frac{L^2}{4})^{1/2}\left(\frac{L}{2} + (\frac{L^2}{4} + y^2 + h^2)^{1/2}\right)}$$

(حلّ انتگرال به روش جزء به جزء)

$$k=\int\frac{y^2dy}{(y^2+h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}\left(\frac{L}{2}+(h^2+\frac{L^2}{4}+y^2)^{1/2}\right)}$$

$$=\int\sqrt{\frac{Z^2-h^2-\frac{L^2}{4}}{Z+\frac{L}{2}}}dz\ ,\quad\left\{\begin{array}{l}(y^2+\frac{L^2}{4}+h^2)^{1/2}=Z\\ Z+\frac{L}{2}=M\end{array}\right.$$

$$=\sqrt{(M-\frac{L}{2})^2-(h^2+\frac{L^2}{4})}-\frac{L}{2}\ln\left(\frac{(M-\frac{L}{2})+\sqrt{(M-\frac{L}{2})^2-(h^2+\frac{L^2}{4})}}{(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}}\right)$$

$$-2h\tan^{-1}\sqrt{\frac{(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}-\frac{L}{2}}{(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}+\frac{L}{2}}\left(\frac{M-(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}-\frac{L}{2}}{M+(h^2+\frac{L^2}{4})-\frac{L}{2}}\right)}\Bigg|_{(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}+\frac{L}{2}}^{(h^2+\frac{L^2}{2})^{1/2}+\frac{L}{2}}$$

$$=\frac{L}{2}-\frac{L}{2}\ln\left(\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{h^2+\frac{L^2}{2}}}{(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}}\right)$$

$$-2h\tan^{-1}\sqrt{\frac{\left((h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}-\frac{L}{2}\right)\left((h^2+\frac{L^2}{2})^{1/2}-(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}\right)}{\left((h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}+\frac{L}{2}\right)\left((h^2+\frac{L^2}{2})^{1/2}+(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}\right)}}$$

$$=\frac{L}{2}-\frac{L}{2}\ln\left(\frac{\frac{L}{2}+(h^2+\frac{L^2}{2})^{1/2}}{(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}}\right)-2\tan^{-1}$$ (سادهٔ شدهٔ این عبارت در زیر آمده است.)

$$I=\frac{L}{2}\ln\left(\frac{L}{2}+(\frac{L^2}{2}+h^2)^{1/2}\right)-k$$

$$II=\int\ln(y^2+h^2)^{1/2}dy=y\ln(y^2+h^2)^{1/2}+h\tan^{-1}\frac{y}{h}\Big|_0^{\frac{L}{2}}$$

$\sqrt{b^2+(z'-z)^2}$

$$=\frac{L}{2}\ln(\frac{L^2}{4}+h^2)^{1/2}+h\tan^{-1}\frac{L}{2h}-\frac{L}{2}$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{L}{2}\ln(\frac{L}{2}+(\frac{L^2}{2}+h^2)^{1/2}-k-II\right)$$

$$=\frac{1}{4\epsilon_0}\left(2h\tan^{-1}\left(\frac{2((h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}-\frac{L}{2})((h^2+\frac{L^2}{2})^{1/2}-(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2})}{hL}\right)\right.$$

$$\left.+L\ln\left(\frac{\frac{L}{2}+(h^2+\frac{L^2}{2})^{1/2}}{(h^2+\frac{L^2}{4})^{1/2}}-h\tan^{-1}\frac{L}{2h}\right)\right)$$

1

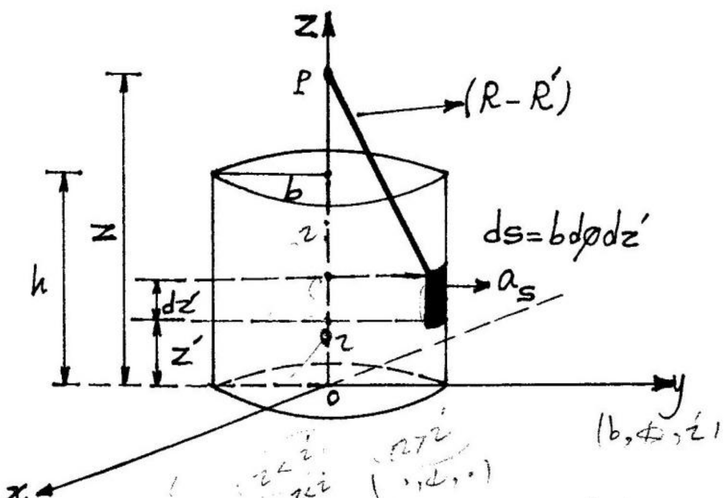
مسئله ۱۹ بار Q به طور یکنواخت روی دیوارهٔ یک استوانهٔ مدور به شعاع b و ارتفاع h توزیع شده است. V و E را روی محور آن تعیین کنید.

الف) در نقطه‌ای خارج استوانه، سپس

ب) در نقطه‌ای داخل استوانه.

پاسخ قسمت الف)

ds المان سطحی برابر است با $bd\phi dz'$



شکل ۳.۱۸ مسئله ۱۹

$r' = ba_r + z'a_z$

$R = za_z$

$R - r' = -ba_r + (z-z')a_z$

$R = z\hat{a}_z$

$R' = b\hat{a}_R + z'\hat{a}_z$

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{ds}{|R-R'|}$$

$$|R-R'| = \sqrt{b^2+(z-z')^2}$$

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{ds}{\sqrt{b^2+(z-z')^2}} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\int_0^h\int_0^{2\pi}\frac{b\,d\phi\,dz'}{\sqrt{b^2+(z-z')^2}}$$

$$= \frac{-\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\int_0^h\int_0^{2\pi}\frac{b\,d\phi\,d(z-z')}{\sqrt{b^2+(z-z')^2}}$$

$$= \frac{-\rho_s}{2\cancel{\pi}\epsilon_0}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+(z-z')^2}+(z-z')}{\cancel{b}}\right)\right)\Big]_0^h$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho_s b}{2\cancel{\pi}\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+z^2}+z}{\sqrt{b^2+(z-h)^2}+(z-h)}\right)$$

$$E = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z\right)$$

در جهت a_x, a_y مولفه‌ها صفر هستند لذا فقط مولفه a_z را خواهیم داشت :

$$\Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial z}a_z$$

$$V = \frac{\rho_s b}{2\cancel{\pi}\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+z^2}+z}{\sqrt{b^2+(z-h)^2}+(z-h)}\right)$$

$$V = \frac{\rho_s b}{2\cancel{\pi}\epsilon_0}\left[\left(\ln(\sqrt{b^2+z^2}+z) - \ln(\sqrt{b^2+(z-h)^2}+(z-h)\right)\right]$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-b\rho_s}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+(z-h)^2}}\right)$$

$$\Rightarrow E = \left[\frac{b\rho_s}{2\epsilon_0}\times\frac{\sqrt{b^2+z^2}-\sqrt{b^2+(z-h)^2}}{\sqrt{(b^2+z^2)(b^2+(z-z^{-})^2}}\right]a_z$$

پاسخ قسمت ب)

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{ds}{|R-R'|}\ .\ ds = b\,d\phi\,dz'$$

توجه : این قسمت مسئله شامل یک نکته است و آن اینکه با توجه به موقعیت z, z' یعنی برحسب اینکه $z' < z$ یا $z < z'$ باشد بازه انتگرال گیری دو قسمت خواهد شد یعنی :

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{z}\frac{b\,d\phi\,dz'}{\sqrt{b^2+(z-z')^2}}$$

که در رابطهٔ فوق از تساوی مقابل استفاده کرده‌ایم: $|R-R'| = \sqrt{b^2+(z-z')^2}$

$$+\frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_z^{h}\frac{b\,d\phi\,dz'}{\sqrt{b^2+(z'-z)^2}}$$

که در رابطهٔ فوق از تساوی مقابل استفاده کرده‌ایم: $|R-R'| = \sqrt{b^2+(z-z')^2}$

$$= \frac{b\rho_s}{2\epsilon_0}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+z^2}+z}{b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{b^2}}{b}\right)\right)$$

$$+\frac{b\rho_s}{2\epsilon_0}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+(h-z)^2}+h-z}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{b}\right)\right)$$

$$= \frac{b\rho_s}{2\epsilon_0}\ln\left[\frac{\sqrt{b^2+z^2}+z}{b}\times\frac{\sqrt{b^2(h-z)^2}+(h-z)}{b}\right]$$

(توضیح اینکه : $\ln(\frac{b}{b}) = \ln(\frac{\sqrt{b^2}}{b}) = \ln(1) = 0$)

$$\Rightarrow V = \frac{b\rho_s}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{1}{b^2}(z+\sqrt{b^2+z^2})\times\left[(h-z)+\sqrt{b^2+(h-z)^2}\right]$$

بنابه قسمت الف): $E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z}a_z$

$$V = \frac{b\rho_s}{2\epsilon_0}\left(\ln\left(\frac{z+\sqrt{b^2+z^2}}{b^2}\right) + \ln\left(\frac{h-z+\sqrt{b^2+(h-z)^2}}{b^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{-b\rho_s}{2\epsilon_0}\left[\frac{\frac{1}{b^2}\left(1+\frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)}{\frac{1}{b^2}(z+\sqrt{b^2+z^2})} + \frac{\frac{1}{b^2}\left(-1-\frac{(h-z)}{\sqrt{b^2+(h-z)^2}}\right)}{\frac{1}{b^2}\left((h-z)+\sqrt{b^2+(h-z)^2}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow = [\frac{b\rho_s}{2\epsilon_0}(\frac{\sqrt{b^2+z^2}-\sqrt{b^2+(h-z)^2}}{\sqrt{(b^2+z^2)(b^2+(h-z)^2)}})]a_z$$

مسئله ۲۰: مدل اولیه‌ای از ساختار اتمی یک عنصر شیمیائی این بود که اتم یک ابر کروی با بار مثبت توزیع شدهٔ یکنواخت Ne می‌باشد که در آن N عدد اتمی و e مقدار بار الکترون است. الکترون‌ها که هر یک بار منفی $-e$ را حمل می‌کنند، چنین تصور می‌شد که در ابر جاسازی شده‌اند. با فرض اینکه ابر بار کروی دارای شعاع R_0 بوده و از اثرات تصادم صرفنظر شود،

الف) نیروی وارد شده بر یک الکترون جاسازی شده در فاصله r از مرکز را تعیین کنید.

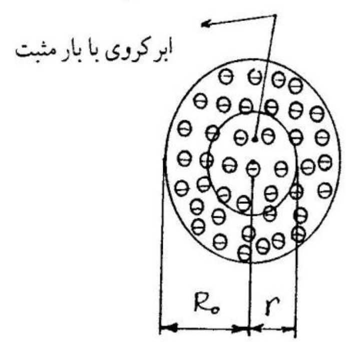
ب) حرکت الکترون را توضیح دهید.

پ) بیان کنید که چرا این مدل اتمی رضایتبخش نیست.

پاسخ قسمت الف)

$$\oint E \cdot ds = \frac{Q'}{\epsilon}$$

$$E\int ds = \frac{Q'}{\epsilon} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q'}{\epsilon}$$



شکل ۳.۱۹ مسئله ۲۰

Ne	$(\frac{4}{3}\pi R_0^3)$
Q'	$(\frac{4}{3}\pi r^3)$

$\rightarrow Q' = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \times Ne}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = \frac{r^3 Ne}{R_0^3}$

$F = eE$

$$E(4\pi r^2) = \frac{r^3 Ne}{R_0^3\epsilon} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{rNe}{4\pi\epsilon R_0^3}} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{rNe^2}{4\pi\epsilon R_0^3}\vec{a}_R}$$

پاسخ قسمت ب)

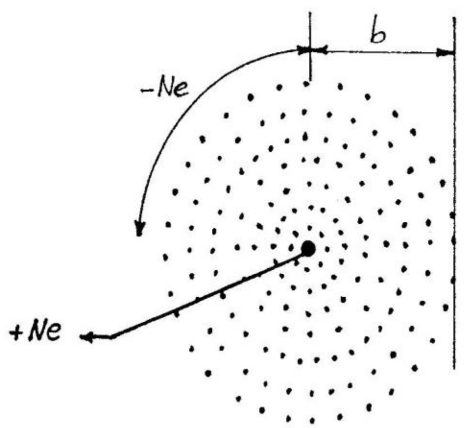
به صورت ارتعاشی در جای خود نوسان می‌کنند.

پاسخ قسمت پ)

زیرا موقعیت بارهای مثبت را به خوبی نشان نمی‌دهد. (آزمایشات رادرفورد نشان داد که بارهای مثبت اتم در مرکز اتم و شعاع بسیار کوچکتری احاطه شده‌اند).

مسئله ۲۱: مدل کلاسیک سادهٔ یک اتم، از یک هسته با بار مثبت Ne و در پیرامون آن، ابر الکترونی کروی با همان بار کلی منفی تشکیل می‌شود. (N، عدد اتمی و e مقدار بار الکترون است.) میدان الکتریکی خارجی E_0 باعث می‌شود که هسته به اندازهٔ r_0 از مرکز ابر الکترونی فاصله بگیرید، از این رو اتم را قطبی کند. با فرض توزیع یکنواخت بار در داخل ابر الکترونی به شعاع b، r_0 را بیابید.

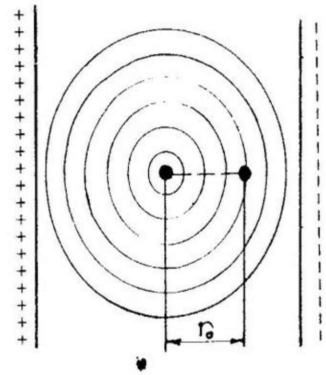
پاسخ مسئله ۲۱)



شکل ۳.۲۰ مسئله ۲۱_(۱)

بنابه قانون گوس :

$$\oint_s = E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



شکل ۳.۲۱ مسئله ۲۱_(۲)

$N\epsilon$	$(4/3)\pi b^3$
Q	$(4/3)\pi r_0^3$

$$\Rightarrow Q = N e \frac{r_0^3}{b^3}$$

نیز می‌دانیم :

$$\oint_s ds = 4\pi r_0^2$$

$$\Rightarrow E_0(4\pi r_0^2) = \frac{N e r_0^3}{\epsilon_0 b^3} \Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 b^3}{Ne} E_0}$$

مسئله ۲۲: قطبی شدگی در یک مکعب دی الکتریک به ضلع L به مرکز مبدأ مختصات توسط بردار $P = P_0(a_x x + a_y y + a_z z)$ داده شده است.

الف) چگالی‌های سطحی و حجمی بارهای مقید را تعیین کنید.

ب) نشان دهید که کل بار مقید صفر است.

پاسخ قسمت الف)

برای تجسم بهتر رجوع کنید به شکل مسئله ۱۰_(۱)

$$\begin{cases} \rho_{ps} = P \cdot a_n & \text{چگالی سطحی بارهای مقید} \\ \rho_p = -\nabla \cdot P & \text{چگالی حجمی بارهای مقید} \end{cases}$$

$$\rho_{ps}(\text{کل}) = \rho_{ps}\text{روبرو} + \rho_{ps}\text{پشت} + \rho_{ps}\text{بالا} + \rho_{ps}\text{پایین} + \rho_{ps}\text{چپ} + \rho_{ps}\text{راست}$$

$$\rho_{ps} = P \cdot a_n = P_0(a_x + a_y y + a_z z) \quad (\text{بردار عمود بر وجه})$$

$$\rho_{ps}(\text{روبرو}) = P \cdot a_x = P_0(a_x x + a_y y + a_z z)(a_x) = P_0 x = P_0(\frac{L}{2})$$

$$\rho_{ps}(\text{پشت}) = P \cdot (-a_x) = -P_0 \cdot x = -P_0(-\frac{L}{2}) = P_0(\frac{L}{2})$$

$$\rho_{ps}(\text{بالا}) = P \cdot (a_z) = P_0 \cdot z = P_0(\frac{L}{2})$$

$$\rho_{ps}(\text{پایین}) = P \cdot (-a_z) = -P_0 \cdot z = -P_0(-\frac{L}{2}) = P_0(\frac{L}{2})$$

$$\rho_{ps}(\text{چپ}) = P \cdot (-a_y) = -P_0 \cdot y = -P_0(-\frac{L}{2}) = P_0(\frac{L}{2})$$

$$\rho_{ps}(\text{راست}) = P \cdot (a_y) = P_0 \cdot y = P_0(\frac{L}{2})$$

$$\Rightarrow \rho_{ps}(\text{کل}) = 6P_0(\frac{L}{2}) = 3P_0 L$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot P = -(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z})$$
$$= -(P_0 + P_0 + P_0) = -3P_0$$

Q =

پاسخ قسمت ب)

$Q = \int \rho_v \, ds \quad v - \oint_s P_{sb} \, ds - \int_v P_b \, dv$

$Q \equiv$ کل بار مقید

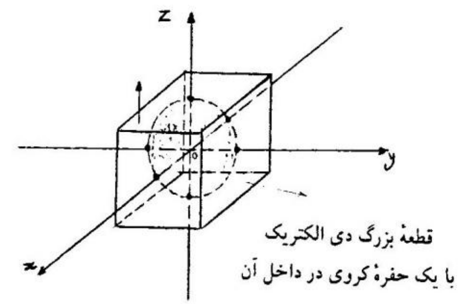
$$\longrightarrow Q = \int_v \rho_p \cdot dv + \oint_s \rho_{ps} \cdot ds = -3P_0(L \times L \times L) + 3P_0 L(L \times L)$$
$$= -3P_0 L^3 + 3P_0 L^3 = 0$$

$Q = \oint P_{sb} \, ds + \int_v \rho_b \, dv$

مسئله ۲۳: شدت میدان الکتریکی را در مرکز یک حفرهٔ کروی کوچک که در یک قطعه بزرگ دی‌الکتریک با قطبی شدگی P ایجاد شده است، تعیین کنید.

$\vec{P} = P_0 \hat{a}_z$

$\vec{E} = -\nabla V$



شکل ۳.۲۲ مسئله ۲۳

$$\begin{cases} E = \int \dfrac{\rho_s ds \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 |R|^3} \\ \rho_s = P\cdot a_n = (P\cdot a_z)\cdot a_R = P(a_z\cdot a_R) = P\cos\theta \\ ds = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \int\int \frac{P\cos\theta R^2 \sin\theta d\theta d\phi (R a_R)}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\Rightarrow E = \int\int \frac{(P\cos\theta \sin\theta d\theta d\phi) a_R}{4\pi\epsilon_0}$$

$$a_R = (\sin\theta\cos\phi a_x + \sin\theta\sin\phi a_y + \cos\theta a_z)$$

که مؤلفه‌های a_y, a_x در اینجا صفر هستند. یعنی $a_R = \cos\theta a_z$

در نتیجه :

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\phi)a_z$$

$$= \frac{P(2\pi)}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta\sin\theta d\theta)a_z$$

$$= \frac{-P}{2\epsilon_0}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} a_z = \frac{-P}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)a_z = \frac{P}{3\epsilon_0}a_z$$

مسئله ۲۴: مسائل زیر را حل کنید:

الف) ولتاژ شکست یک خازن صفحه‌ای موازی را با فرض اینکه صفحات هادی $50(mm)$ از هم فاصله دارند و محیط بین آنها هواست، پیدا کنید.

ب) اگر تمام ناحیه بین صفحات هادی توسط پلکسی گلاس[2] با ضریب دی الکتریک ۳ و مقاومت دی‌الکتریک $20(KV/mm)$ پر شده باشد، ولتاژ شکست را پیدا کنید.

پ) اگر یک پلکسی گلاس با ضخامت $10(mm)$ بین صفحات قرار داده شود، حداکثر ولتاژی که بدون شکست می‌توان به صفحات اعمال نمود، چقدر است؟

بنا به تعریف : حدّاکثر شدّت میدان الکتریکی که یک ماده دی الکتریک می‌تواند بدون شکست تحمّل کند مقاومت دی الکتریک ماده نامیده می‌شود. (رجوع کنید به " ۳ـ۸ـ۱ مقاومت دی الکتریک " ؛ صفحه ۱۳۷ کتاب درسی) بنابراین :

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} d = \dfrac{50}{1000}m \\ \Omega(Di\cdot Elec\cdot) = E(max) \\ \Omega(Di\cdot Elec\cdot)(\text{هوا}) = 3\times 10^6(\dfrac{V}{m}) \\ E = \dfrac{V}{d} \end{cases} \Rightarrow 3\times 10^6 = \frac{V}{50\times 10^{-3}}$$

در نتیجه : $V = 50\times 10^{-3}\times 3\times 10^{-6} = 15\times 10^4(\text{ولت})$

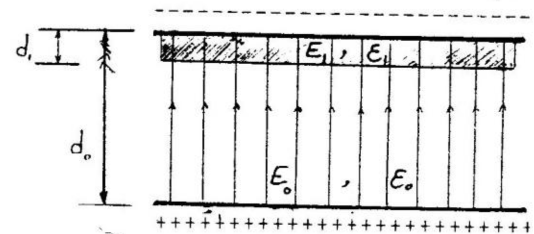
پاسخ قسمت ب)

$$V = E_{(max)}\times d = \Omega(Di\cdot Elec\cdot)\times d = 20\times 10^6\times 50\times 10^{-3}$$

$= 10^6$ ولت $= 1MV$ یک مگاولت

[2] Plexiglass

پاسخ قسمت پ)



شکل ۳.۲۳ مسئله ۲۴ قسمت (پ)

در مرز مشترک داریم : $D_{n0} = D_{n1}$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E_0 = \epsilon_1 E_1 \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} E_0 \\ E_0 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} E_1 \end{cases}$$

$$V = E \cdot d \Rightarrow V = E_0 d_0 + E_1 d_1$$

$$V = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} E_1 d_0 + E_1 d_1$$

$$V = E_1 \left(\frac{\epsilon_1 d_0}{\epsilon_0} + d_1\right)$$

$$V = E_1 \left(\frac{\epsilon_1 d_0 + \epsilon_0 d_1}{\epsilon_0}\right)$$

که در رابطه اخیر V ولتاژ شکست و E_1 مقاومت دی الکتریک یا حداکثر شدّت میدان الکتریکی داخل پلی گلاس است.

$$V = 20 \times 10^6 \left(\frac{40 \times 10^{-3} \times 3 + 10 \times 10^{-3}}{1}\right)$$

$$V = 2/6 \times 10^6 = 2/6 MV \text{ مگاولت} \quad (1)$$

همین محاسبات را برای فاصله هوایی تکرار می‌کنیم :

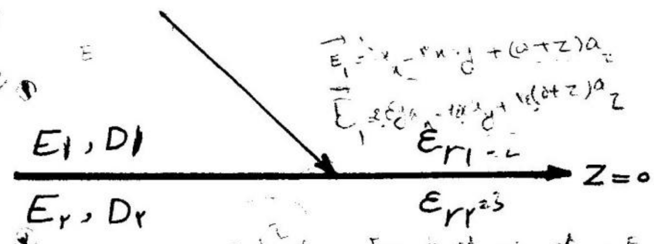
$$V = E_0 \left(\frac{d_0 \epsilon_1 + \epsilon_0 d_1}{\epsilon_1}\right)$$

$$V = 3 \times 10^6 \left(\frac{40 \times 10^{-3} \times 3 + 1 \times 10 \times 10^{-3}}{3}\right)$$

$$V = 0/13 \times 10^6 = 0/13 MV \text{ مگاولت} \quad (2)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که حداکثر ولتاژ باید ۰/۱۳ مگاولت باشد.

مسئله ۲۵: فرض کنید صفحه $z = 0$، دو ناحیهٔ دی الکتریک بی‌اتلاف با $\epsilon_{r1} = 2$ و $\epsilon_{r2} = 3$ را از هم جدا می‌سازد. اگر بدانیم که E در ناحیهٔ ۱، $a_x 2y - a_y 3x + a_z(5+z)$ است، دربارهٔ E_2 و D_2 در ناحیه ۲ دیگر چه می‌دانیم؟ آیا می‌توانیم E_2 و D_2 را در هر نقطه ناحیه ۲ تعیین کنیم؟ توضیح دهید.



شکل ۳.۲۴ مسئله ۲۵

$$E_1 = 2y a_x - 3x a_y + (5+z) a_z$$

$$E_{1t}(z=0) = 2a_x y - 3a_y x$$

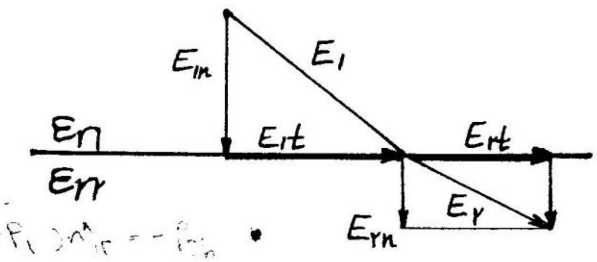
$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_{2t} = 2a_x y - 3a_y x \quad (*)$$

$$\begin{cases} E_{1n}(z=0) = 5a_z \\ D_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{1n} = 2\epsilon_0 \times 5a_z = 10\epsilon_0 a_z \end{cases}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \begin{cases} D_{2n} = 10\epsilon_0 a_z \\ D_{2n} = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{2n} \end{cases} \Rightarrow E_{2n} = \frac{10}{3} a_z \quad (**)$$

$$E_2 = E_{2t} + E_{2n} \overset{(*),(**)}{\Longrightarrow} E_2 = 2y a_x - 3x a_y + \frac{10}{3} a_z$$

مسئله ۲۶: شرایط مرزی را در مورد مؤلفه‌های مماسی و قائم P، در فصل مشترک بین دو محیط دی‌الکتریک کامل با ضرایب دی‌الکتریک ϵ_1 و ϵ_2 تعیین کنید.



شکل ۳.۲۵ مسئله ۲۶

بنا به رابطه (۳ـ۱۰۱) صفحه ۱۳۲ فصل سوم از کتاب درسی داریم :

$$P=\epsilon_0 X_e E=\epsilon_0(\epsilon_r-1)E$$

از طرفی می‌دانیم : $E_{1t}=E_{2t}$

بنابراین :

$$\begin{cases}P_{1t}=\epsilon_0(\epsilon_{r1}-1)E_{1t}\\ P_{2t}=\epsilon_0(\epsilon_{r2}-1)E_{2t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{1t}}{P_{2t}}=\frac{(\epsilon_{r1}-1)E_{1t}}{(\epsilon_{r2}-1)E_{2t}}$$

برای مؤلفه‌های قائم داریم : $D_{1n}-D_{2n}=\rho$ (رجوع کنید به " شرایط مرزی میدانهای الکتریکی ساکن " از کتاب درسی)

$$\Rightarrow \epsilon_0\epsilon_{r1}E_{1n}-\epsilon_0\epsilon_{r2}E_{2n}=\rho \quad (*)$$

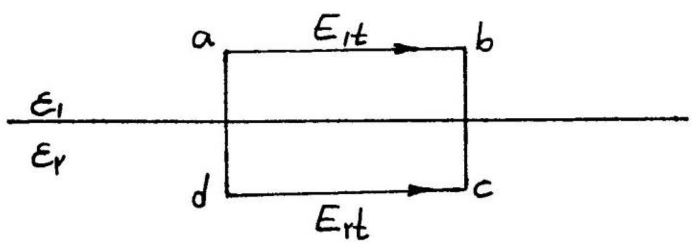
$$P=\epsilon_0(\epsilon_r-1)E\Rightarrow P_n=\epsilon_0(\epsilon_r-1)E_n\Rightarrow E_n=\frac{P_n}{\epsilon_0(\epsilon_r-1)}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow}\epsilon_0\epsilon_{r1}\frac{P_{1n}}{\epsilon_0(\epsilon_{r1}-1)}-\epsilon_0\epsilon_{r2}\frac{P_{2n}}{\epsilon_0(\epsilon_{r2}-1)}=\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\epsilon_{r1}}{(\epsilon_{r1}-1)}P_{1n}-\frac{\epsilon_{r2}}{(\epsilon_{r2}-1)}P_{2n}=\rho}$$

مسئله ۲۷: شرایط مرزی که باید توسط پتانسیل الکتریکی بین دو دی‌الکتریک کامل با ضرایب ϵ_{r1} و ϵ_{r2} برآورده شوند، چه هستند؟

از روش کتاب پیروی می‌کنیم، مسیر کوچک $abcda$ را به اظلاع cd, ab بترتیب در محیطهای ۱ . ۲ به موازات فصل مشترک تشکیل می‌دهیم.



شکل ۳.۲۶ مسئله ۲۷

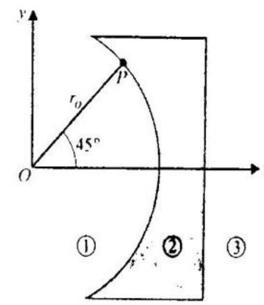
$$\begin{cases}\oint E\cdot dl=0\Rightarrow\int_{ab}E\cdot dl+\int_{bc}E\cdot dl+\int_{cd}E\cdot dl+\int_{da}E\cdot dl=0\\ V=-\int E\cdot dl\end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{ab}+0-V_{cd}+0=0\Rightarrow V_{ab}=V_{cd}$$

یعنی اختلاف پتانسیل طرفین سطح متساوی است.

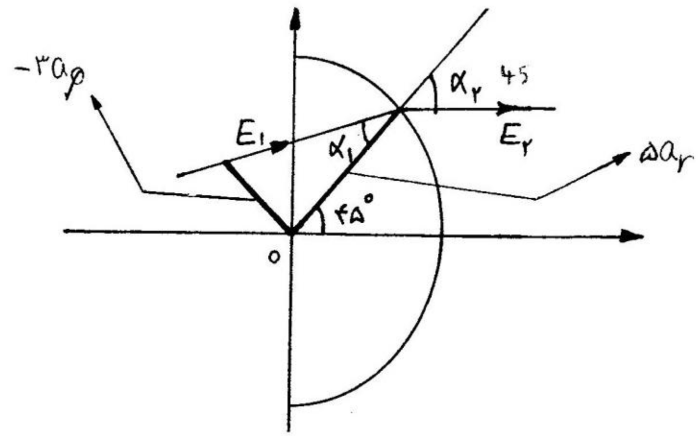
مسئله ۲۸: عدسی‌های دی‌الکتریک به منظور موازی ساختن میدانهای الکترومغناطیسی بکار می‌روند. در شکل ۳ـ۴۱، سطح سمت چپ عدسی، سطح استوانهٔ مدور است، و سطح سمت راست مسطح می‌باشد. اگر E_1 در نقطه $P(r_0, 45^\circ, z)$ در ناحیه ۱ برابر $a_r 5 - a_\phi 3$ باشد، ضریب دی‌الکتریک عدسی چقدر باید باشد تا اینکه E_3 در ناحیه ۳ به موازات محور x قرار گیرد؟

$A_x=\cos\alpha\,\hat a_r+\sin\alpha\,\hat a_\phi \quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-3}{5}$



شکل ۳.۲۷ مسئله ۲۸_(۱)

$$\tan\alpha_2 = \tan 45^\circ = 1$$



شکل ۳.۲۸ مسئله ۲۸_(۲)

$$\begin{cases} |\tan\alpha_1| = \left|\frac{3}{5}\right| \\ E_1 = 5a_r - 3a_\phi \end{cases}$$

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{\epsilon_\circ \epsilon_r}{\epsilon_\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} = \epsilon_r \Rightarrow \epsilon_r \cong 1.67$$

که در آن ϵ_r ضریب دی الکتریک عدسی است.

$$\tan\alpha_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 30.9637565 \text{ درجه} \\ \alpha_1 = 30^\circ.57'.49.52'' \end{cases}$$

۱۵

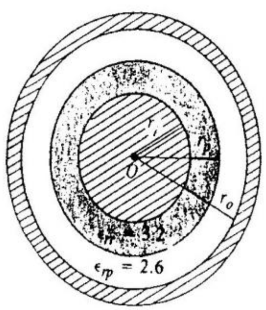
مسئله ۲۹: به مثال ۳_۱۶ مراجعه کنید، با فرض همان r_i و r_o و این الزام که حداکثر شدت میدانهای الکتریکی در مواد عایق نباید از ۲۵٪ مقاومتهای الکتریکی آنها بیشتر باشد، ولتاژ نامی کابل هم محور را تعیین کنید.

الف) اگر $r_p = 1.75 r_i$ باشد.

ب) اگر $r_p = 1.35 r_i$ باشد.

پ) تغییرات E_r و V را برحسب r در هر دوحالت (الف) و (ب) رسم کنید.

پاسخ قسمت الف)



شکل ۳.۲۹ مسئله ۲۹

$$\begin{cases} r_o = 0.832cm \\ r_i = 0.4cm \\ r_p = 1.75 r_i = 1.75 \times 0.4 = 0.7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{r(max)}(\text{در لاستیک}) = \frac{25}{100} \times 25 \times 10^6 \\ E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{1}{3.2 r_i}\right) \end{cases}$$

(رابطه مقابل از مثال (۳_۱۶)بدست آمده است)

$$\frac{۲۵}{۱۰۰} \times ۲۵ \times ۱۰^{۶} = \frac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{۱}{۳/۲ \times ۰/۴ \times ۱۰^{-۲}}\right) \Rightarrow \frac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ} = ۸ \times ۱۰^{۴}$$

$$V = -\int E \cdot dl = -\left(\int_{r_o}^{r_p} E_p \cdot dr + \int_{r_p}^{r_i} E_r dr\right)$$

$$V = -\left(\int_{r_o}^{r_p} \frac{\rho_l dr}{۲\pi\epsilon_\circ r\epsilon_{rp}} + \int_{r_p}^{r_i} \frac{\rho_l dr}{۲\pi\epsilon_\circ r\epsilon_{rr}}\right)$$

$$\frac{-\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}\left(\int_{r_\circ}^{r_p} \frac{dr}{r\epsilon_{rp}} + \int_{r_p}^{r_i} \frac{dr}{r\epsilon_{rr}}\right)$$

$$V = \frac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{۱}{\epsilon_{rp}} \ln \frac{r_o}{r_p} + \frac{۱}{\epsilon_{rr}} \ln \frac{r_p}{r_i}\right)$$

$$= ۸ \times ۱۰^{۴}\left(\frac{۱}{۲/۶} \ln \frac{۰/۸۳۲}{۰/۷} + \frac{۱}{۳/۲} \ln \frac{۰/۷}{۰/۴}\right) = ۱۹/۳KV$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} r_p = ۱/۳۵ r_i = ۱/۳۵ \times ۰/۴ = ۰/۵۴ \\ r_i = ۰/۴cm\ ,\ r_o = ۰/۸۳۲cm \end{cases}$$

$$V = \frac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{۱}{\epsilon_{rp}} \ln \frac{r_o}{r_p} + \frac{۱}{\epsilon_{rr}} \ln \frac{r_p}{r_i}\right)$$

$$E_{rmax} = ۰/۲۵ \times ۲۵ \times ۱۰^{۶} = \frac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{۱}{\epsilon_{rr} r_i}\right) = \frac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{۱}{۳/۲ \times ۰/۴ \times ۱۰^{-۲}}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ} = ۸ \times ۱۰^{۴}$ برای لاستیک

$$E_{pmax} = ۰/۲۵ \times ۲۰ \times ۱۰^{۶} = \frac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{۱}{\epsilon_{rp} r_p}\right) = \frac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{۱}{۲/۶ \times ۱/۳۵ \times ۰/۴ \times ۱۰^{-۲}}\right)$$

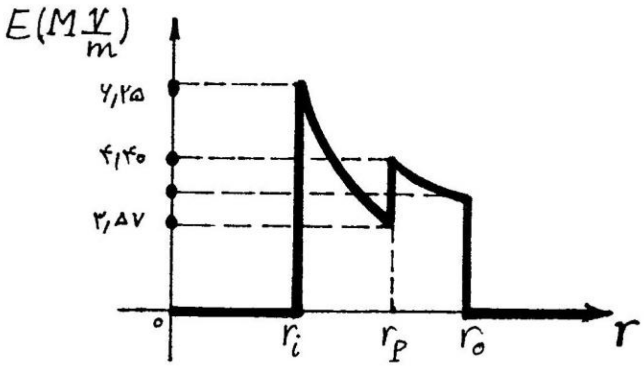
$\Rightarrow \dfrac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ} = ۷۰۲۰۰$ برای پلی‌استرین

$\Rightarrow \dfrac{\rho_l}{۲\pi\epsilon_\circ}$ (برای کابل) $= ۷۰۲۰۰$

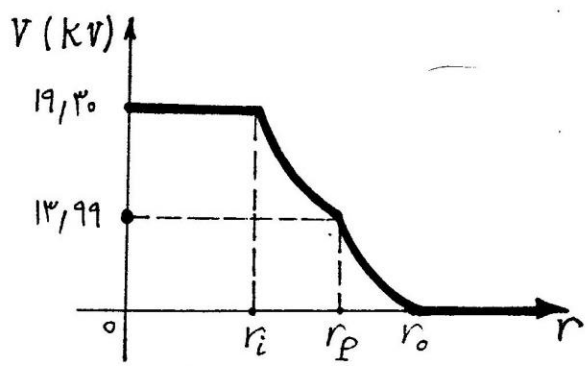
$$V = ۷۰۲۰۰\left(\frac{۱}{۲/۶} \ln\left(\frac{۰/۸۳۲}{۰/۵۴}\right) + \frac{۱}{۳/۲} \ln\left(\frac{۰/۵۴}{۰/۴}\right)\right) = ۱۸/۲۵KV$$

پاسخ قسمت پ)

$$\begin{cases} E_r(r) = ۸ \times ۱۰^{۴}\left(\dfrac{۱}{۳/۲ r_i}\right) \\ E_p(r) = ۸ \times ۱۰^{۴}\left(\dfrac{۱}{۲/۶ r_p}\right) \end{cases}$$

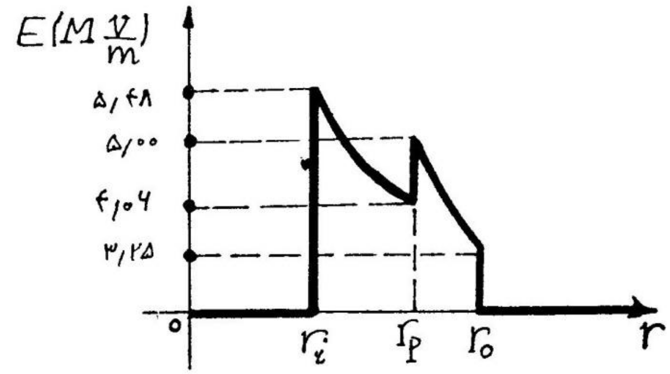


نمودار ۳.۱ مسئله ۲۹_(۱)

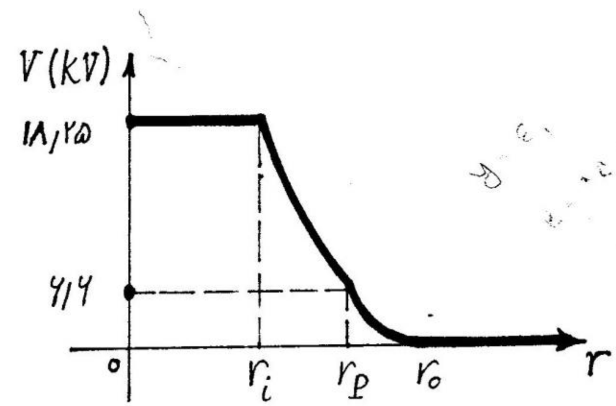


نمودار ۳.۱ مسئله ۲۹_(۲)

$$\begin{cases} E_r(r) = ۷۰۲۰۰(\frac{۱}{۳/۲r_i}) \\ E_p(r) = ۷۰۲۰۰(\frac{۱}{۲/۶r_p}) \end{cases}$$



نمودار ۳.۳ مسئله ۲۹_(۳)

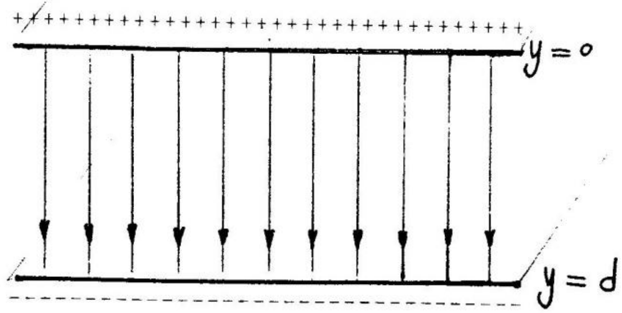


نمودار ۳.۴ مسئله ۲۹_(۴)

۱۱

مسئله ۳۰ فضای بین یک خازن صفحه‌ای موازی به مساحت S با دی‌الکتریکی پرشده است که گذردهی آن به طور خطی از $\epsilon_۱$ در یک صفحه $(y = ۰)$ تا $\epsilon_۲$ در صفحه دیگر $(y = d)$ تغییر

می‌نماید. از اثرات لبه‌ای صرفنظر نموده، ظرفیت را پیدا کنید.



شکل ۳.۳۰ مسئله ۳۰

ϵ تابعی خطی از y است لذا : $\epsilon = ay + b$

$$\begin{cases} y = ۰ \\ \epsilon = \epsilon_۱ \end{cases} \Rightarrow \epsilon_۱ = a(۰) + b \Rightarrow b = \epsilon_۱$$

$$\begin{cases} y = d \\ \epsilon = \epsilon_۲ \end{cases} \Rightarrow \epsilon_۲ = a(d) + \epsilon_۱ \Rightarrow a = \frac{(\epsilon_۲ - \epsilon_۱)y}{d}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{(\epsilon_۲ - \epsilon_۱)y}{d} + \epsilon_۱$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} \quad , \quad V = -\int E \cdot dl \quad , \quad E = \frac{\rho_s}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow V = -\int \frac{\rho_s}{\epsilon} dy = -\int_d^۰ \frac{\rho_s dy}{\frac{(\epsilon_۲ - \epsilon_۱)y}{d} + \epsilon_۱}$$

$$= \int_۰^d \frac{\rho_s dy}{\frac{(\epsilon_۲ - \epsilon_۱)y}{d} + \epsilon_۱}$$

(دقت کنید حدود انتگرال گیری در محاسبه V همواره از قطب منفی به قطب مثبت است. لذا قبل از دخالت دادن منفی بیرون، انتگرال از d (قطب منفی) تا صفر (قطب مثبت) گرفته شده است.)

$$\rho_s \frac{d}{(\epsilon_2-\epsilon_1)}\left[\ln\left(\frac{(\epsilon_2-\epsilon_1)y}{d}+\epsilon_1\right)\right]_0^d$$
$$= \frac{\rho_s d}{(\epsilon_2-\epsilon_1)}\ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)$$

اما می‌دانیم $\rho_s = \frac{Q}{S}$ لذا :

$$V = \frac{Qd\ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)}{S(\epsilon_2-\epsilon_1)}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\left(\frac{Qd\ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)}{S(\epsilon_2-\epsilon_1)}\right)} = \frac{S(\epsilon_2-\epsilon_1)}{d\ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{S(\epsilon_2-\epsilon_1)}{d(\ln\epsilon_2-\ln\epsilon_1)}}$$

مسئله ۳۱: فرض کنید که هادی بیرونی خازن استوانه‌ای مثال ۳ـ۱۸ زمین شده باشد، و هادی درونی در پتانسیل V_0 نگه داشته شود.

الف) شدت میدان الکتریکی $E(a)$ را در سطح هادی درونی پیدا کنید.

ب) اگر شعاع داخلی هادی بیرونی، b، ثابت باشد، a را چنان بیابید که $E(a)$ حداقل شود.

پ) حداقل مقدار $E(a)$ را پیدا کنید.

ت) ظرفیت را تحت شرایط بند (ب) تعیین کنید.

پاسخ قسمت الف)

مطابق مثال حل شده (۳ـ۱۸) کتاب درسی، ظرفیت یک خازن استوانه‌ای بصورت زیر است :

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\frac{Q}{S} = \rho_s \Rightarrow \begin{cases} Q = \rho_s \times S \\ S = 2\pi a l \end{cases} \Rightarrow Q = \rho_s(2\pi a l)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_s(2\pi a l)}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \rho_s = \frac{\epsilon V_0}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\epsilon V_0}{\epsilon a\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Rightarrow \boxed{E = \frac{V_0 a_r}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

پاسخ قسمت ب)

$$E = \frac{V_0}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\frac{dE}{da} = 0 \Rightarrow E(a) = E_{(min)}$$

$$\frac{dE}{da} = \frac{-V_0\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)-1\right)}{a^2\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2} = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{b}{a}\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{b}{e}}$$

پاسخ قسمت پ)

$$\begin{cases} E = \dfrac{V_0}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ a = \dfrac{b}{e}\ ,\ \ln\left(\dfrac{b}{\left(\frac{b}{e}\right)}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow E = \frac{V_0}{\frac{b}{e}\times 1} = \frac{eV_0}{b}$$

پاسخ قسمت ت)

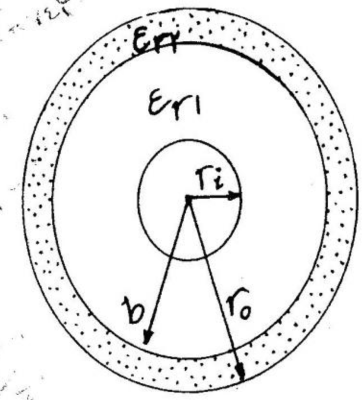
$$C=\frac{2\pi\epsilon l}{\ln(\frac{b}{a})}=\frac{2\pi\epsilon l}{\ln(\frac{b}{(\frac{b}{\epsilon})})}=\frac{2\pi\epsilon l}{\ln(\epsilon)}=2\pi\epsilon l$$

$$C=2\pi\epsilon l \Rightarrow \frac{C}{l}=2\pi\epsilon \quad (\frac{F}{m})$$

مسئله ۳۲ شعاع هسته و شعاع داخلی هادی بیرونی یک خط انتقال هم محور بسیار طویل به ترتیب r_i و r_o هستند. فضای بین هادیها با دو لایهٔ هم محور از دی‌الکتریکها پر شده است. ضرایب دی‌الکتریک مواد دی‌الکتریک برای $r_i < r < b$ برابر ϵ_1 و برای $b < r < r_o$ برابر ϵ_2 هستند. ظرفیت آن را در واحد طول تعیین کنید.

در یک استوانه طویل داریم: $E=\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{r1}=\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r} \\ E_{r2}=\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r} \end{cases}$$



شکل ۳.۳۱ مسئله ۳۲

$$V=-\int E\cdot dl=-(\int_{r_o}^{b}E_{r2}dr+\int_{b}^{r_i}E_{r1}dr)$$

$$=-(\int_{r_o}^{b}\frac{\rho_l\cdot dr}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r}+\int_{b}^{r_i}\frac{\rho_l\cdot dr}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r})$$

$$=\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}[\frac{1}{\epsilon_{r2}}\ln(\frac{r_o}{b})+\frac{1}{\epsilon_{r1}}\ln(\frac{b}{r_i})]$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{Q}{l}=\rho_l$ لذا:

$$V=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}[\frac{1}{\epsilon_{r2}}\ln(\frac{r_o}{b})+\frac{1}{\epsilon_{r1}}\ln(\frac{b}{r_i})]$$

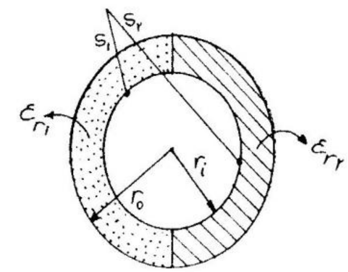
$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}[\frac{1}{\epsilon_{r2}}\ln(\frac{r_o}{b})+\frac{1}{\epsilon_{r1}}\ln(\frac{b}{r_i})]}$$

$$=\frac{2\pi\epsilon_0 l\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}\ln(\frac{r_o}{b})\epsilon_{r2}\ln(\frac{b}{r_i})}$$

چون در واحد طول خواسته شده $l=1$ بنابراین:

$$\boxed{C=\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}\ln(\frac{r_o}{b})+\epsilon_{r2}\ln(\frac{b}{r_i})}}$$

مسئله ۳۳ یک خازن استوانه‌ای به طول L از سطوح هادی هم‌محور به شعاعهای r_i و r_o تشکیل شده است. دو محیط دی‌الکتریک با ضرایب دی‌الکتریک متفاوت ϵ_{r1} و ϵ_{r2} فضای بین سطوح هادی را مطابق شکل ۳_۴۲ پر کرده‌اند. ظرفیت آن را تعیین کنید.



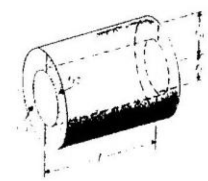
شکل ۳.۳۲ مسئله ۳۳_(۱)

مقطع عرضی خازن استوانه‌ای بطول L

فرض $\begin{cases} S_1 \text{ نیم سطح سمت چپ هادی درونی} \\ S_2 \text{ نیم سطح سمت راست هادی درونی} \end{cases}$

$$S_1 = S_2 = \frac{(2\pi r_i L)}{2} = \pi L r_i$$

$$\oint E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{\rho_s(2\pi r_i L)}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\rho_s r_i}{\epsilon r}$$



شکل ۳.۳۳ مسئله ۳۳_(۲)

نکته‌ای قابل توجه : دقّت شود که شدّت میدان در اینجا بصورت شعاعی است از طرفی می‌دانیم در شرایط مرزی $E_{1t} = E_{2t}$ و چون شدت میدان فقط دارای مولّفه شعاعی یعنی مماس در مرز است، لذا :

$$(\text{کلّ})\, E_1 = E_2\, (\text{کلّ}) = E_{1t} = E_{2t}$$

$$V = -\int E \cdot dl = -\int E_1 \cdot dl = -\int E_2 \cdot dl$$

$$= -\int_{r_o}^{r_i} \frac{\rho_s r_i}{r\epsilon} dr \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{\rho_{s1} r_i \ln(\frac{r_o}{r_i})}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \\ V = \dfrac{\rho_{s2} r_i \ln(\frac{r_o}{r_i})}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \end{cases} \quad (*)$$

$$Q = \rho_s \cdot S = \rho_{s1} \cdot S_1 + \rho_{s2} \cdot S_2 \quad (**)$$

$$= \left(\frac{V\epsilon_0\epsilon_{r1}}{r_i \ln(\frac{r_o}{r_i})}\right) S_1 + \left(\frac{V\epsilon_0\epsilon_{r2}}{r_i \ln(\frac{r_o}{r_i})}\right) S_2$$

که در رابطه اخیر مقادیر ρ_{s1} ، ρ_{s2} از معادلات (*) بدست آمده‌اند :

$$\rho_{s1} = \frac{V\epsilon_0\epsilon_{r1}}{r_i \ln(\frac{r_o}{r_i})}, \quad \rho_{s2} = \frac{V\epsilon_0\epsilon_{r2}}{r_i \ln(\frac{r_o}{r_i})}$$

از طرفی : $S_1 = \pi L r_i = S_2$

که با جایگذاری در معادله (**) داریم :

$$Q = \frac{V\epsilon_0 \pi L(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}{\ln(\frac{r_o}{r_i})}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \pi L(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})V}{V \ln(\frac{r_o}{r_i})} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})L}{\ln(\frac{r_o}{r_i})}}$$

مسئله ۳۴: خازنی از دو سطح استوانه‌ای فلزی هم محور به طول $30(mm)$ و شعاعهای $5(mm)$ و $7(mm)$ تشکیل شده است. مادهٔ دی‌الکتریک بین سطوح، دارای گذردهی نسبی $\epsilon_r = 2 + (4/r)$ است و r برحسب mm اندازه‌گیری می‌شود. ظرفیت خازن را تعیین کنید.

$$\oint E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{\rho_s(2\pi r_i L)}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\rho_s r_i}{r\epsilon} = \frac{\rho_s r_i}{r\epsilon_0\epsilon_r}$$

$$V = -\int E \cdot dl = -\int_{r_o}^{r_i} dr = \frac{-\rho_s r_i}{\epsilon_0} \int_{r_o}^{r_i} \frac{dr}{(2 + \frac{4}{r})r}$$

$$= \frac{-\rho_s r_i}{\epsilon_0}\int_{r_o}^{r_i} \frac{dr}{(2r+4)} = \frac{\rho_s r_i}{2\epsilon_0}\ln\frac{(2r_o+4)}{(2r_i+4)}$$

$$Q = \rho_s(2\pi r_i l) \Rightarrow V = \frac{Q r_i}{2\epsilon_0(2\pi r_i l)}\ln\frac{(2r_o+4)}{(2r_i+4)}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}\ln\left(\frac{r_o+2}{r_i+2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}\ln\left(\frac{r_o+2}{r_i+2}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_o+2}{r_i+2}\right)}$$

$$\begin{cases} r_i = \frac{5}{1000}m \\ r_o = \frac{7}{1000}m \\ l = \frac{30}{1000}m \end{cases} \Rightarrow C = \frac{4\times 3.141592654\times 8.85\times 10^{-12}\times 30\times 10^{-3}}{\ln\left(\frac{2.007}{2.005}\right)}$$

$$\Rightarrow C = 3.35\times 10^{-9} \Rightarrow C = 3.35$$ نانو فاراد

مسئله ۳۵: زمین را کره هادی بزرگی در نظر بگیرید ($6.37\times 10^3 km$ = شعاع) که اطراف آن را هوا گرفته است، محاسبه کنید.

الف) ظرفیت زمین را؛

ب) حداکثر باری را که بدون شکست هوا می‌تواند روی آن قرار گیرد.

$$R_e = 6.37\times 10^3 Km = 6.37\times 10^6 m$$

پاسخ قسمت الف)

مطابق مثال (۳_۱۹) حل شده در صفحه ۱۵۰ کتاب درسی داریم:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_e = 4\times 3.141592654\times 8.85\times 10^{-12}\times 6.37\times 10^6$$

$$= 7.084228602\times 10^{-4} \simeq 0.708(mF)$$

پاسخ قسمت ب)

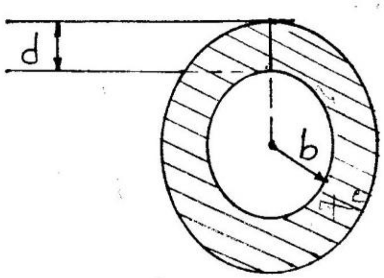
$$\oint E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_{(max)} = \Omega(Di\cdot Elec\cdot)\ (\text{هوا}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_e^2}$$

$$\Rightarrow Q = 4\times 3.141592654\times 8.85\times 10^{-12}\times (6.37\times 10^6)^2\times 3\times 10^6$$

$$= 1.353796086\times 10^{16} \simeq 1.35\times 10^{16}(C)$$

مسئله ۳۶ ظرفیت کره هادی مجزا به شعاع b، که با یک لایه دی‌الکتریک به ضخامت d پوشیده شده است را، تعیین کنید. پذیرندگی الکتریکی دی‌الکتریک ϵ_r است.



شکل ۳.۳۴ مسئله ۳۶

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V = -\int E\cdot dl = -\left(\int_{\infty}^{b+d} E_1 dr + \int_{b+d}^{b} E_2 dr\right)$$

$$= -\left(\int_{\infty}^{b+d} \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_{b+d}^{b} \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{b+d} + \frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+d}\right)\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b\epsilon_r + b + d - b}{b\epsilon_r(b+d)}\right) = \frac{Q(b\epsilon_r + d)}{4\pi\epsilon_0 b\epsilon_r(b+d)}$$

$$C=\frac{Q}{V}\Rightarrow C=\frac{Q}{\frac{Q(b\epsilon_r+d)}{4\pi\epsilon_\circ\epsilon_r(b+d)}}=\frac{4\pi b\epsilon_\circ\epsilon_r(b+d)}{(b\epsilon_r+d)}$$

$$\epsilon_r=1+X_e\Rightarrow\boxed{C=\frac{4\pi b\epsilon_\circ(1+X_e)(b+d)}{b(1+X_e)+d}}$$

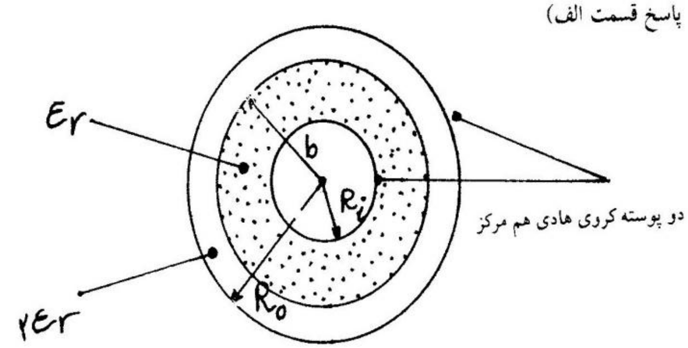
۱۴

مسئله ۳۷: خازنی از دو پوسته کروی هم مرکز به شعاعهای R_i و R_o تشکیل شده است. فضای بین آنها با یک دی‌الکتریک به گذردهی نسبی ϵ_r از R_i تا b ($R_i<b<R_o$) و یک دی الکتریک دیگر به گذردهی نسبی $2\epsilon_r$ از b تا R_o پر شده است.

الف) E و D را در تمام نقاط فضا بر حسب ولتاژ اعمال شدهٔ V تعیین کنید.

ب) ظرفیت را تعیین کنید.

پاسخ قسمت الف)



شکل ۳.۳۵ مسئله ۳۷

$$\oint D\cdot ds=Q$$

برای ناحیه $R<R_i$ و ناحیه $R>R_o$ داریم :

$$Q=0\Rightarrow\begin{cases}D=0\\E=0\end{cases}$$

برای ناحیه $R_i<R<R_o$

$$\oint D\cdot ds=Q\Rightarrow D(4\pi R^2)=\rho_s(4\pi R_i^2)\Rightarrow D=\frac{R_i^2\rho_s}{R^2}$$

$$D_{1n}=D_{2n}=\frac{\rho_s R_i^2}{R^2}a_R\quad(*)$$

$$Q=\rho_s(4\pi R_i^2),\ E=\frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$V=-\int E\cdot dl=-\left(\int_{R_o}^{b}\frac{QdR}{4\pi(\epsilon_\circ)(2\epsilon_r)R^2}+\int_b^{R_i}\frac{QdR}{4\pi(\epsilon_\circ)(\epsilon_r)R^2}\right)$$

$$V=-\left[\int_{R_o}^{b}\frac{\rho_s R_i^2dR}{2\epsilon_\circ\epsilon_r R^2}+\int_b^{R_i}\frac{\rho_s R_i^2dR}{\epsilon_\circ\epsilon_r R^2}\right]$$

$$=\frac{\rho_s R_i^2}{2\epsilon_\circ\epsilon_r}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{R_o}\right)+\frac{\rho_s R_i^2}{\epsilon_\circ\epsilon_r}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{\rho_s R_i^2}{\epsilon_\circ\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2R_o}\right)$$

$$\Rightarrow\rho_s=\frac{V\epsilon_\circ\epsilon_r}{R_i^2\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2R_o}\right)}\quad(**)$$

$$(*),(**)\Rightarrow D_1=D_2=\frac{\epsilon_\circ\epsilon_r V\vec{a}_R}{R^2\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2R_o}\right)}$$

$$D_1=\epsilon E_1\Rightarrow E_1=\frac{D_1}{\epsilon}=\frac{D_1}{\epsilon_\circ\epsilon_r}$$

$$\Rightarrow E_1=\frac{V\vec{a}_R}{R^2\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2R_o}\right)}\quad(R_i<R<b)$$

$$\Rightarrow E_2=\frac{V\vec{a}_R}{2R^2\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2R_o}\right)}\quad(b<R<R_o)$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases}\rho_s=\dfrac{V\epsilon_\circ\epsilon_r}{R_i^2\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2R_o}\right)}\\ Q=\rho_s(4\pi R_i^2)\end{cases}$$

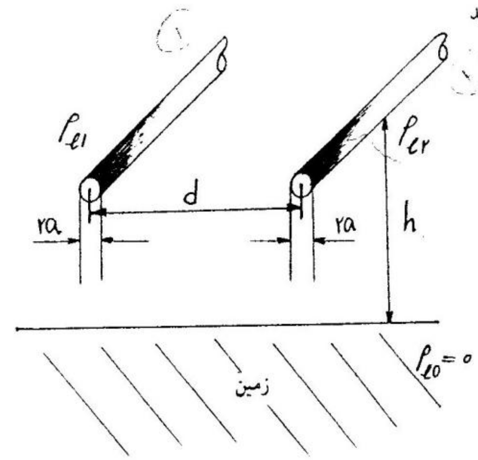
$$\Rightarrow Q = \frac{4\pi R_i^2 (V\epsilon_0\epsilon_r)}{R_i^2\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2R_o}\right)}$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r V}{V\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2R_o}\right)}$$

$$= \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2R_o}\right)}$$

۱۷

مسئله ۳۸. دو سیم هادی موازی یک خط انتقال نیرو دارای شعاع a بوده و فاصله d از هم قرار دارند. سیمها در ارتفاع h از سطح زمین می‌باشند. با فرض اینکه زمین یک هادی کامل بوده و h و d هر دو بمراتب از a بزرگتر باشند، روابطی برای ظرفیت متقابل و ظرفیت خودی جزئی در واحد طول، بدست آورید



شکل ۳.۳۶ مسئله ۳۸

با استفاده از مثال (۳_۲۱) حل شده در صفحه ۱۵۶ کتاب درسی داریم :

$$\begin{cases} V_{10} = \dfrac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{h}{a} + \dfrac{\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{h}{d} \\[2mm] V_{20} = \dfrac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{h}{d} + \dfrac{\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{h}{a} \end{cases}$$

حل دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق برحسب مجهولات ρ_{l1}، ρ_{l2} به روش کرامر نتیجه می‌دهد :

$$\rho_{l1} = \frac{\begin{vmatrix} 2\pi\epsilon_0 V_{10} & \ln\frac{h}{d} \\ 2\pi\epsilon_0 V_{20} & \ln\frac{h}{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln\frac{h}{a} & \ln\frac{h}{d} \\ \ln\frac{h}{d} & \ln\frac{h}{a} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0\left(V_{10}\ln\frac{h}{a} - V_{20}\ln\frac{h}{d}\right)}{\left(\ln\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\ln\frac{h}{d}\right)^2}$$

$$\rho_{l2} = \frac{\begin{vmatrix} \ln\frac{h}{d} & 2\pi\epsilon_0 V_{10} \\ \ln\frac{h}{a} & 2\pi\epsilon_0 V_{20} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln\frac{h}{a} & \ln\frac{h}{d} \\ \ln\frac{h}{d} & \ln\frac{h}{a} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0\left(V_{20}\ln\frac{h}{a} - V_{10}\ln\frac{h}{d}\right)}{\left(\ln\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\ln\frac{h}{d}\right)^2}$$

$$C_{11} = \frac{2\pi\epsilon_0\ln\left(\frac{h}{a}\right)}{\left(\ln\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\ln\frac{h}{d}\right)^2}, \quad C_{22} = \frac{2\pi\epsilon_0\ln\left(\frac{h}{a}\right)}{\left(\ln\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\ln\frac{h}{d}\right)^2}$$

$$C_{12} = \frac{-2\pi\epsilon_0\ln\left(\frac{h}{d}\right)}{\left(\ln\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\ln\frac{h}{d}\right)^2}, \quad C_{21} = \frac{-2\pi\epsilon_0\ln\left(\frac{h}{d}\right)}{\left(\ln\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\ln\frac{h}{d}\right)^2}$$

از روش کتاب در حل اینگونه مسائل پیروی می‌کنیم. بفرض :

$$\Delta_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{(\ln(\frac{h}{a}))^2 - (\ln(\frac{h}{d}))^2}$$

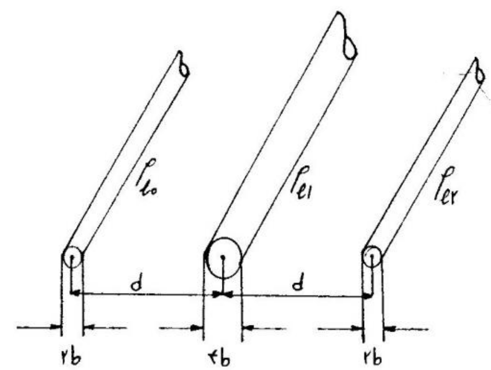
ظرفیت جزئی خودی $C_{10} = c_{11} + c_{12} = \Delta_0(\ln\frac{h}{a} - \ln\frac{h}{d})$

ظرفیت جزئی خودی $C_{20} = c_{21} + c_{22} = \Delta_0(\ln\frac{h}{a} - \ln\frac{h}{d})$

ظرفیت جزئی متقابل $C_{12} = -c_{12} = \Delta_0 \ln(\frac{h}{a})$

[برای اطلاّع بیشتر رجوع کنید به " ۳_۱۰_۲ ظرفیت در سیستم‌های چند هادی " صفحات ۱۵۳ تا ۱۵۶ کتاب درسی]

مسئله ۳۹: یک سیستم مجزا شده، شامل سه سیم هادی موازی بسیار طویل است. محور هر سه سیم بر روی یک صفحه واقع است. دو سیم بیرونی دارای شعاع b بوده و هر یک به فاصلهٔ $d = 500b$ از مرکز سیم وسطی که شعاع آن $2b$ است، قرار دارند. ظرفیتهای جزئی در واحد طول راتعیین کنید.



شکل ۳.۳۷ مسئله ۳۹

$$V_{10} = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{d} + \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d}{2b} + \frac{\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{2d}{d}$$

$$V_{10} = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{500b} + \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{500b}{2b} + \frac{\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{1000b}{500b}$$

$$\Rightarrow V_{10}(2\pi\epsilon_0) = \rho_{l0}\ln(\frac{1}{500}) + \rho_{l1}\ln(250) + \rho_{l2}\ln(2) \qquad (*)$$

$$V_{20} = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{2d} + \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d}{d} + \frac{\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{2d}{b}$$

$$V_{20} = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{1000b} + \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{500b}{500b} + \frac{\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{1000b}{b}$$

$$\Rightarrow V_{20}(2\pi\epsilon_0) = \rho_{l0}\ln(\frac{1}{1000}) + \rho_{l1}(0) + \rho_{l2}\ln 1000$$

$$\Rightarrow V_{20}(2\pi\epsilon_0) = \rho_{l0}\ln(\frac{1}{1000}) + \rho_{l2}\ln(1000) \qquad (**)$$

می‌دانیم $\rho_{l0} + \rho_{l1} + \rho_{l2} = 0$ لذا : $\rho_{l0} = -(\rho_{l1} + \rho_{l2})$ با جایگذاری رابطه اخیر در معادله (*) خواهیم داشت :

$$V_{10}(2\pi\epsilon_0) = \rho_{l1}\ln(125000) + \rho_{l2}(1000) \qquad (1)$$

بهمین ترتیب با جایگذاری رابطه ρ_{l0} در معادله (**) خواهیم داشت :

$$V_{20}(2\pi\epsilon_0) = \rho_{l1}\ln(1000) + 2\rho_{l2}(1000) \qquad (2)$$

با حلّ دستگاه دو معادله دو مجهولی (۱) و (۲) برحسب ρ_{l1}, ρ_{l2} به روش کرامر داریم :

$$\rho_{l1} = \frac{\begin{vmatrix} V_{10}(2\pi\epsilon_0) & \ln(1000) \\ V_{20}(2\pi\epsilon_0) & 2\ln(1000) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln(125000) & \ln(1000) \\ \ln(1000) & 2\ln(1000) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0(2\ln(1000)V_{10} - \ln(1000)V_{20})}{2\ln(125000)\ln(1000) - \ln(1000)\ln(1000)}$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0(2\ln(1000)V_{10} - \ln(1000)V_{20})}{114/4227024}$$

$$\rho_{l2} = \frac{\begin{vmatrix} \ln(125000) & V_{10}(2\pi\epsilon_0) \\ \ln(1000) & V_{20}(2\pi\epsilon_0) \end{vmatrix}}{114/4227024}$$

$$= \frac{۲\pi\epsilon_۰(\ln(۱۲۵۰۰۰)V_{۲۰} - \ln(۱۰۰۰)V_{۱۰})}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴}$$

$$\begin{cases} c_{۱۱} = \dfrac{۴\pi\epsilon_۰ \ln(۱۰۰۰)}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴} \\ c_{۱۲} = \dfrac{-۲\pi\epsilon_۰ \ln(۱۰۰۰)}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{۲۱} = \dfrac{-۲\pi\epsilon_۰ \ln(۱۰۰۰)}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴} \\ c_{۲۲} = \dfrac{۲\pi\epsilon_۰ \ln(۱۲۵۰۰۰)}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴} \end{cases}$$

$$C_{۱۰} = c_{۱۱} + c_{۱۲} = \frac{۲\pi\epsilon_۰(۲\ln(۱۰۰۰) - \ln(۱۰۰۰))}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴}$$

$$= \frac{۲\pi\epsilon_۰ \ln(۱۰۰۰)}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴} = ۳/۳۵۶۹۷۳۲۶ \times ۱۰^{-۱۲} \simeq ۳/۳۶(P\frac{F}{m})$$

$$C_{۲۰} = c_{۲۱} + c_{۲۲} = \frac{۲\pi\epsilon_۰(۲\ln(۱۲۵۰۰۰) - \ln(۱۰۰۰))}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴}$$

$$= \frac{۲\pi\epsilon_۰ \ln(۱۲۵)}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴} = ۲/۳۴۶۴۲۳۱۴ \times ۱۰^{-۱۲} \simeq ۲/۳۵(P\frac{F}{m})$$

$$C_{۱۲} = -c_{۱۲} = \frac{۲\pi\epsilon_۰ \ln(۱۰۰۰)}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴}$$

$$= \frac{۲ \times ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۴ \times ۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} \times \ln(۱۰۰۰)}{۱۱۴/۴۲۲۷۰۲۴}$$

$$= ۳/۳۵۶۹۷۳۲۶ \times ۱۰^{-۱۲} \simeq ۳/۳۶(P\frac{F}{m})$$

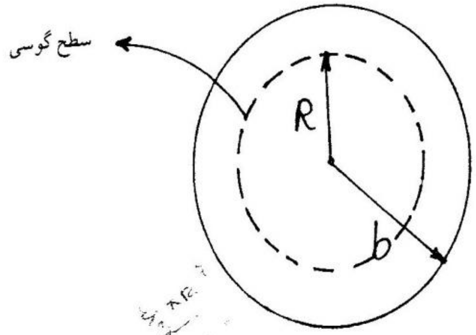
مسئله ۴۰: مقدار انرژی الکتریسیته ساکن یک کره با بار یکنواخت با شعاع b و چگالی بار حجمی ρ را که در نواحی زیر ذخیره می‌شود، محاسبه کنید:

الف) داخل کره.

ب) بیرون کره.

نتایج خود را با نتایج مثال ۳_۲۲ وارسی نمایید.

پاسخ قسمت الف)



شکل ۳.۳۸ مسئله ۴۰_(۱)

اگر Q بار کل کره و q بار محصور در سطح گوسی داخل کره باشد به این نتیجه می‌رسیم که Q در حجم $\frac{۴}{۳}\pi b^۳$ و بار q در حجم $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ محصور است لذا :

$$\frac{۴}{۳}\pi b^۳ \times q = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \times Q$$

$$\Rightarrow q = \frac{R^۳}{b^۳}Q \ (*)$$

از طرفی داریم :

$$\oint E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_۰} \Rightarrow E(۴\pi R^۲)\frac{q}{\epsilon_۰}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{۴\pi\epsilon_۰ R^۲} \ (**)$$

$$(*).(**) \Rightarrow E = \frac{R^۳Q}{۴\pi\epsilon_۰ R^۲ b^۳} = \frac{RQ}{۴\pi\epsilon_۰ b^۳}$$

$$W(\text{در داخل کره}) = \frac{۱}{۲}\epsilon_۰ \int_v E^۲ dv = \frac{۱}{۲}\epsilon_۰ \int_۰^b \frac{R^۲Q^۲dv}{۱۶\pi^۲\epsilon_۰^۲ b^۲}$$

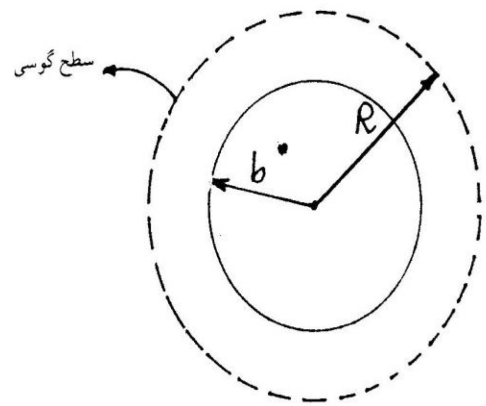
$$= \frac{۱}{۲}\epsilon_۰ \int_۰^b \frac{R^۲Q^۲(۴\pi R^۲)dR}{۱۶\pi^۲\epsilon_۰^۲ b^۲} = \frac{Q^۲}{۸\pi\epsilon_۰ b^۶}\int_۰^b R^۴ dR$$

$$= \frac{Q^۲ b^۵}{۸\pi\epsilon_۰ b^۶ \times ۵} = \frac{Q^۲}{۴۰\pi\epsilon_۰ b}$$

اما می‌دانیم : $Q = \rho(\frac{4}{3}\pi b^3)$ لذا: $W = \frac{\rho^2(\frac{4}{3}\pi b^3)^2}{40\pi\epsilon_0 b}$

$$\Rightarrow W = \frac{2\pi\rho^2 b^5}{45}$$

پاسخ قسمت ب)



شکل ۳.۳۹ مسئله ۴۰_(۲)

این بار سطح گوسی را بیرون کره فرض می‌کنیم :

$$\oint E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi R^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_v E^2 \cdot dv = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_b^\infty \frac{Q^2 dv}{16\pi^2\epsilon_0^2 R^4}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_b^\infty \frac{Q^2(4\pi R^2)dR}{16\pi^2\epsilon_0^2 R^4}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_b^\infty \frac{dR}{R^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 b}$$

امّا می‌دانیم :

$$Q = \rho(\frac{4}{3}\pi b^3)$$

لذا :

$$W = \frac{\rho^2(\frac{4}{3}\pi b^3)^2}{8\pi\epsilon_0 b} \Rightarrow \boxed{W = \frac{2\pi\rho^2 b^5}{9\epsilon_0}}$$

مسئله ۴۱ : تئوری نسبیت اینشتن اظهار می‌دارد که کار لازم برای تشکیل دادن یک بار به صورت انرژی در جرم آن ذخیره شده و برابر mc^2 است که در آن m، جرم و $c \cong 3 \times 10^8 (m/s)$ سرعت نور است. به فرض اینکه الکترون یک کره کامل باشد، از روی بار و جرم آن $(9.1 \times 10^{-31} kg)$، شعاع آن را بدست آورید.

با مراجعه به مثال (۳_۲۲) حل شده در صفحه ۱۶۱ کتاب درسی درمی‌یابیم که کار یا انرژی لازم برای تشکیل یک کره یکنواخت باردار به شعاع b و چگالی بار ρ برابر می‌شود با :

$$W = \frac{4\pi\rho^2 b^5}{15\epsilon_0} \qquad (1)$$

نیز می‌دانیم : $E = mc^2$ (فرمول اینشتن)

$$E = (9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16}) = 81.9 \times 10^{-15} \qquad (2)$$

یکطرف روابط (۱) و (۲) برابر و مساوی با انرژی است لذا طرف دومشان را مساوی هم قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} \frac{4\pi\rho^2 b^5}{15\epsilon_0} = 81.9 \times 10^{-15} \\ Q = (\frac{4}{3}\pi R^3)\rho \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi b^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi(9Q^2 b^5)}{15\epsilon_0(16\pi^2 b^6)} = 81.9 \times 10^{-15}$$

$$Q = e = -1.602 \times 10^{-19} \Rightarrow \frac{4\pi(9(-1.602 \times 10^{-19})^2 b^5)}{15\epsilon_0(16\pi^2 b^6)}$$

$$= 81.9 \times 10^{-15}$$

$$\Rightarrow b = 1.690593666 \times 10^{-15} \simeq 1.69 \times 10^{-15}(m)$$

مسئله ۴۲: انرژی الکتریسیته ساکنی ذخیره شده در ناحیه $R > b$، پیرامون یک دو قطبی الکتریکی با گشتاور P را پیدا کنید.

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_v E^2 dv$$

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^3}(2\cos\theta a_R + \sin\theta a_\theta)$$

$$E^2 = \frac{P^2}{(4\pi\epsilon_0 R^3)^2}(4\cos^2\theta + \sin^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta(0))$$

(دقت کنید : ضرب بردارها را هم در نظر بگیرید!)

$$E^2 = \frac{P^2}{(4\pi\epsilon_0 R^3)^2}(3\cos^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0) = \frac{P^2}{(4\pi\epsilon_0 R^3)^2}(3\cos^2\theta + 1)$$

$$\begin{cases} W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \frac{P^2(3\cos^2\theta + 1)dv}{(4\pi\epsilon_0 R^3)^2} \\ dv = R^2 \sin dR d\theta d\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^{\infty} \frac{P^2(3\cos^2\theta + 1)R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi}{(4\pi\epsilon_0 R^3)^2} = \frac{P^2(2\pi)(2-(-2))}{32\pi^2\epsilon_0(3b^3)} = \frac{P^2}{12\pi\epsilon_0 b^3}$$

مسئله ۴۳: ثابت کنید معادلات (۳_۱۸۰) در مورد انرژی الکتریسیته ساکنی ذخیره شده برای هر خازن متشکل از دو هادی برقرار است.

$$W = V \cdot Q \Rightarrow dW = VdQ$$

$$W = \int_0^Q V \cdot dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C} \cdot dQ = \frac{1}{C}\int_0^Q QdQ \Rightarrow W = \frac{1}{2} \times \frac{Q^2}{C}$$

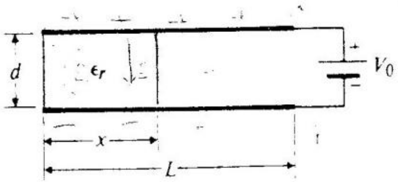
$$dW = VdQ = Vd(CV) = VC \cdot dV \Rightarrow W = \int_0^V VCdV = \frac{1}{2}CV^2$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}CV^2$$

مسئله ۴۴: یک خازن صفحه‌ای موازی به عرض w، طول L و فاصله d، مطابق شکل ۳_۴۳ به طور جزئی توسط یک محیط دی‌الکتریک به ضریب دی‌الکتریک ϵ_r پرشده است. یک باطری V_0 ولتی بین صفحات متصل شده است.

الف) D، E و ρ_s را در هر ناحیه پیدا کنید.

ب) فاصله x را چنان بیابید که انرژی الکتریسیته ساکن ذخیره شده در هر دو ناحیه یکسان باشد.



شکل ۳.۴۰ مسئله ۴۴

پاسخ قسمت الف)

می‌دانیم شدت میدان الکتریکی در یک خازن صفحه‌ای موازی (با شرط صرف نظر از اثر فریز شدن خطوط میدان در دو انتهای صفحات خازن) همواره بطور عمودی از قطب مثبت به قطب منفی است. بنابراین در مرز مشترک فقط مولفه مماسی خواهیم داشت و مولفه قائم نداریم. چون $E_{1t} = E_{2t}$ در نتیجه : $E_1 = E_2$

$$V_0 = -\int E_1 dl = -\int E_2 dl = Ed \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{V_0}{d}$$

$$\begin{cases} D_1 = \epsilon_0 E_1 = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \\ D_2 = \epsilon_0\epsilon_r E_2 = \frac{\epsilon_0\epsilon_r V_0}{d} \end{cases}$$

$$D_1 = \rho_{s1} \Rightarrow \rho_{s1} = \frac{\epsilon_0 V_0}{d}, D_2 = \rho_{s2} \Rightarrow \rho_{s2} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r V_0}{d}$$

پاسخ قسمت ب)

$$W_1((1)\ \text{انرژی ذخیره شده در ناحیه}) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{v_1} E_1^2 dv = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{v_1} E_1^2 dv$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int \frac{V_0^2}{d^2}\,dv = \frac{\epsilon_0 V_0^2}{2d^2}(L-x)wd$$

$$\Rightarrow W_1 = \frac{v_0^2\,\epsilon_0\,w(L-x)}{2d}$$

در روابط فوق $\int dv$ بیانگر حجم ناحیه (۱) است که برابر $(L-x)wd$ می‌باشد. دقّت کنید محیط به ضریب دی الکتریک ϵ_r را محیط (۱) و سمت راست آن را محیط (۲) فرض کرده‌ایم .

W_2((انرژی ذخیره شده در ناحیه (۲)) $= \frac{\epsilon_0}{2}\int E_2^2\,dv$

$$= \frac{\epsilon_0 V_0^2}{2d^2}xwd \Rightarrow W_2 = \frac{\epsilon_0\epsilon_r V_0^2\,wx}{2d}$$

بنا به خواسته مسئله : $W_1 = W_2$

$$\Rightarrow = \frac{\epsilon_0 V_0^2\,w(L-x)}{2d} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r w V_0^2\,x}{2d} \Rightarrow \boxed{x = \frac{L}{1+\epsilon_r}}$$

مسئله ۴۵: با استفاده از اصل جابجائی مجازی، فرمولی برای نیروی بین دو بار نقطه‌ای $+Q$ و $-Q$ که در فاصله x از یکدیگر در فضای آزاد قرار دارند، بدست آورید.

$$F = -\nabla W$$

$$W = V(-Q)$$

$$V = -\int_\infty^l E\cdot dl = -\int_\infty^l \frac{Q\,dl}{4\pi\epsilon_0 l^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}\Big]_\infty^l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}$$

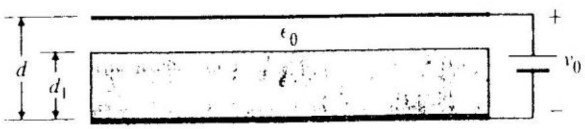
$$W = V(-\theta) = \frac{-Q\cdot Q}{4\pi\epsilon_0 l} \Rightarrow W = \frac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$$

$$\begin{cases} F = -\nabla W = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0 x}\right) \Rightarrow F = \dfrac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \\ l \rightarrow x \end{cases}$$

علامت منفی بیانگر نیروی جاذبه بین دو بار $-Q, +Q$ است که قابل پیش بینی بود.

مسئله ۴۶: ولتاژ ثابت V_0 به خازن صفحه‌ای موازی پرشده جزئی طبق شکل ۳_۴۴ اعمال می‌شود. گذردهی دی‌الکتریک ϵ و مساحت صفحات S است. نیروی وارد بر صفحه بالائی را تعیین

کنید.



شکل ۳.۴۱ مسئله ۴۶

بنابه رابطه (۳_۱۹۹) صفحه ۱۷۰ کتاب درسی داریم :

$$F = \frac{V^2}{2}\times\frac{\partial C}{\partial l} \Rightarrow F = \frac{V_0^2}{2}\times\frac{\partial C}{\partial l} \quad (*)$$

چند نکته تستی : هرگاه در یک خازن صفحه‌ای موازی دی الکتریکها (هر چند تا که باشند) بصورت طبقه طبقه بموازات صفحات بر روی هم قرار گیرند (مانند مسئله ۴۶) مجموعه را می‌توان مجموعی از خازنهای سری دانست که با توجه به فرمول ظرفیت خازنهای سری داریم :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\cdots$$

و هرگاه دی الکتریکها بصورت عمودی و در راستای عمود بر صفحات خازن قرار گیرند (مانند مسئله ۴۴) مجموعه را می‌توان مجموعی از خازنهای موازی به حساب آورد. یعنی :

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdot$$

حال قبل از حل این مسئله (یعنی ۴۶) برای اینکه ارزش این روش را بدانید به مسائل ۳۲ و ۳۳ همین فصل رجوع کنید.

ملاحظه خواهید کرد که در کمتر از سه سطر (بدون خلاصه نویسی) جواب مسئله بدست می‌آید که به دانشجوی علاقمند واگذار می‌شود.

(راهنمایی : مسئله ۳۲ دو خازن سری و مسئله ۳۳ متشکّل از دو خازن موازی است).

حال به مسئله (۴۶) برمی‌گردیم :

بنا به توضیحات فوق :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon S}{d_1},\quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{(d-d_1)}$$

$$C = \frac{\dfrac{\epsilon_0\epsilon S^2}{d_1(d-d_1)}}{\dfrac{\epsilon S d - \epsilon S d_1 + \epsilon_0 S d_1}{d_1(d-d_1)}} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{\epsilon_0 d_1 + (d-d_1)\epsilon}$$

$$\frac{\partial C}{\partial l} = \frac{\partial C}{\partial d_1} = \frac{-(\epsilon_0-\epsilon)\epsilon\epsilon_0 S}{[\epsilon_0 d_1+(d-d_1)\epsilon]^2}$$

$$(*) \Rightarrow F = \frac{-V_0^2(\epsilon_0-\epsilon)\epsilon\epsilon_0 S}{[\epsilon_0 d_1 + (d-d_1)\epsilon]^2}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\epsilon_0\epsilon V_0^2(\epsilon-\epsilon_0)}{2[\epsilon_0 d_1+(d-d_1)\epsilon]^2}$$

روش دیگری هم وجود دارد که تشریحی و طولانی است و بدین صورت است که W_2, W_1 را با استفاده از E_2, E_1 در هر دو ناحیه (که E_2, E_1 خود باید تعیین شوند) محاسبه می‌کنیم. می دانیم :

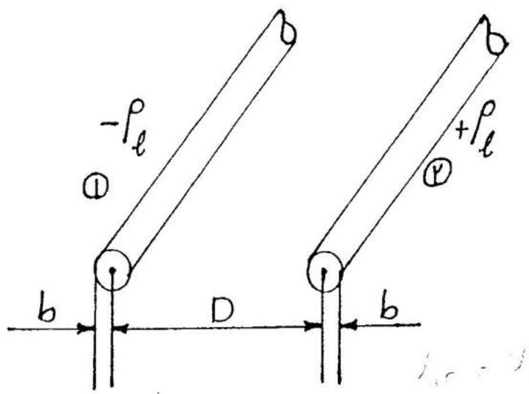
$$\begin{cases} F_1 = \nabla W_1 \\ F_2 = \nabla W_2 \end{cases}$$

و نیز $F_1 + F_2 = F$ (کلّ) که در نهایت به همین جواب می‌رسیم

۲۳

مسئله ۴۷: هادی‌های یک خط انتقال دو سیمهٔ مجزا هر یک به شعاع b و فاصله D از هم قرار گرفته‌اند. با فرض اینکه $D \gg b$ و ولتاژ بین دو خط V_0 است، نیروی وارد بر واحد طول خط را تعیین کنید.

پاسخ مسئله ۴۷:



شکل ۳.۴۲ مسئله ۴۷

$$V_{21} = V_0 = \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{D} + \frac{\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{D}{b}$$

$$V_0 = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{D} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{D}{b}$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{D^2}{b^2} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{D}{b})^2$$

$$= \frac{2\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{D}{b}) = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0}\ln(\frac{D}{b}) = V_0 \qquad (*)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_l\times L}{V_0}\ (\text{چون در واحد طول}) = \frac{\rho_l \times 1}{V_0}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{\rho_l}{V_0} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{D}{b})} \Rightarrow C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{D}{b})}$$

$$F = \frac{V_0^2}{2}\times\frac{\partial C}{\partial l} = \frac{V_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{D}{b})}\right)$$

$$= \frac{V_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial D}\left(\frac{\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{D}{b})}\right) = \frac{\pi\epsilon_0 V_0^2}{2} \times \frac{-\frac{1}{b}}{\frac{D/b}{(\ln\frac{D}{b})^2}}$$

$$= \frac{-\pi\epsilon_0 V_0^2}{2D(\ln\frac{D}{b})^2} \Rightarrow \boxed{F = \frac{\pi\epsilon_0 V_0^2}{2D[\ln(\frac{D}{b})]^2}}$$

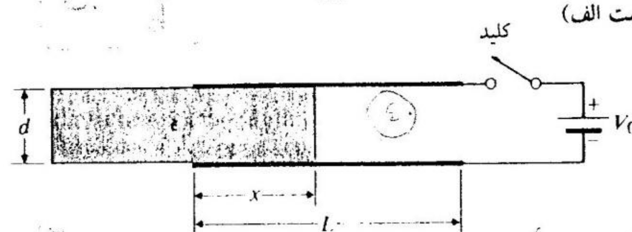
مسئله ۴۸: یک خازن صفحه‌ای موازی با عرض w، طول L و فاصله d دارای یک باریکهٔ دی‌الکتریک جامد گذردهی ϵ در فضای بین صفحات است. این خازن، توسط یک باطری مطابق شکل ۳ـ۴۵، تا ولتاژ V_0 باردار شده است. فرض کنید باریکهٔ دی‌الکتریک به وضعیت نشان داده شده بیرون آورده شود، نیروی وارد بر باریکه را تعیین نمایید.

الف) در حالی که کلید بسته است.

ب) با فرض باز شدن کلید قبل از حرکت دادن باریکه.

پاسخ مسئله ۴۸)

پاسخ قسمت الف)



شکل ۳.۴۳ مسئله ۴۸

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1V_0^2 = \text{انرژی قبل از حرکت دی الکتریک}$$

در حالتی که کلید بسته است و قبل از حرکت باریکه الکتریک داریم :

$$C_1 = \frac{\epsilon S}{d} = \epsilon\frac{Lw}{d} \Rightarrow E = \frac{1}{2}(\epsilon\frac{Lw}{d})V_0^2 = \frac{\epsilon w L V_0^2}{2d}$$

اگر C_2 ظرفیت خازن بعد از حرکت باریکه باشد:

$$C_2 = \frac{\epsilon w x}{d} + \frac{\epsilon_0 w(L-x)}{d} \Rightarrow W_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon w x}{d}+\frac{\epsilon_0 w(L-x)}{d}\right)V_0^2$$

$$\Rightarrow W_2 = \frac{W}{2d}[\epsilon x+\epsilon_0(L-x)]V_0^2$$

$\frac{\omega}{d}(\varepsilon x+\varepsilon_0(L-x))$

که انرژی بعد از حرکت دی الکتریک است.

$$W_2 - W_1 = \Delta W \Rightarrow \Delta W = \frac{w\epsilon x V_0^2}{2d}$$

$$F = \frac{\partial(\nabla W)}{\partial x} = \frac{x\epsilon V_0^2 - w\epsilon_0 V_0^2}{2d} \Rightarrow F = \frac{wV_0^2(\epsilon-\epsilon_0)}{2d}$$

پاسخ قسمت ب)

دقّت کنید در حالت دوّم که کلید باز است با حرکت دادن دی الکتریک Q بار روی صفحات ثابت است ولی ولتاژ بین آنها تغییر می‌کند. قبل از حرکت باریکه دی الکتریک:

$$W_1 = \frac{\epsilon w L V_0^2}{2d}$$

که در قسمت الف بدست آمد.

$$W_2 = \frac{Q}{2C_2}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید بدلیل تغییر ولتاژ از بار ثابت برای محاسبه W_2 استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} Q = C_1V_0 \\ C_1 = \frac{\epsilon w L}{d}\end{cases} \Rightarrow Q = \frac{\epsilon w L V_0}{d}$$

$$W_2 = \frac{\epsilon^2 w L^2 V_0^2}{2d^2}\left(\frac{d}{\epsilon_0(L-x)w+\epsilon w x}\right)$$