الکترومغناطیس

Subject .... Date ....

* آنالیز برداری *

$\vec{A} = A\,\hat{a}$

اندازه ← A ، بردار یکه (راستا) ← $\hat{a}$

* dot product: $\vec{A}\cdot\vec{B}$

۱۵ بردا:

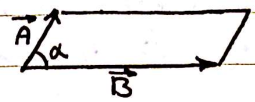
$A^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = |A|^2$

$$\begin{cases} \vec{A}_{\parallel} = (\vec{A}\cdot\hat{B})\,\hat{B} \\ \vec{A}_{\perp} = \vec{A} - \vec{A}_{\parallel} \end{cases}$$

* cross product: $\vec{A}\times\vec{B}$

✓ $\vec{A}\times\vec{A} = 0$

✓



$S = |\vec{A}\times\vec{B}|$
$= AB\sin\alpha$

* Scalar triple product:

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

\# حجم متوازی السطوح

* Vector triple product

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$? back cab ?

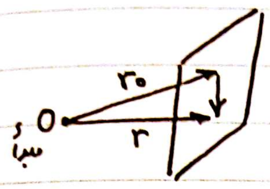
* $\vec{A}_{\perp} = \vec{A} - (\vec{A}\cdot\hat{B})\hat{B} = \vec{A}(\hat{B}\cdot\hat{B}) - \hat{B}(\vec{A}\cdot\hat{B}) = \hat{B}\times(\vec{A}\times\hat{B})$

$\Rightarrow \vec{A}_{\perp} = \hat{B}\times(\vec{A}\times\hat{B})$

clips

e.g. معادله صفحه

شامل نقطه با بردار مکان $\vec{r}_0$ و بردار نرمال $\hat{n}$:



r بردار مکان یک نقطه دلخواه
روی صفحه (که قراره معادله صفحه براش
نوشته شه)

$\Longrightarrow$ $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\hat{n}=0$ معادله صفحه

(نقاطش، نقاط صدق کننده در r)

e.g. سطح کره

** دستگاه مختصات منحنی الخط راستگرد متعامد **

Carvilinear Orthogonal Coordinate System

I

نقطه $P: (u_1, u_2, u_3)$

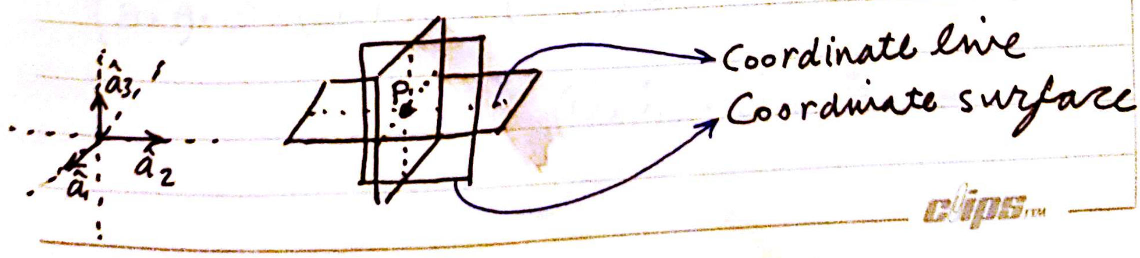
سه متغیر مختصاتی

(بسته به نوع دستگاه مختصات)

مثلاً قطبی r, θ, φ

با ثابت قرار دادن هر یک از متغیرها،
یک سطح بدست می آید (که لزوماً صفحه نیست)

و از تلاقی دو به دوی این سه سطح، سه خط (نه لزوماً راست) بدست میاید.

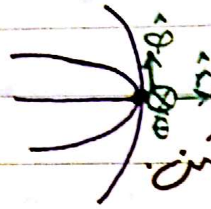


که $\hat{a}_1$ و $\hat{a}_2$ و $\hat{a}_3$ بردار نرمال سطوح در نقطه P هستند.

Base vectors

$\hat{a}_1 \times \hat{a}_2 = \hat{a}_3 \leftarrow$ راستگرد

$\hat{a}_i \cdot \hat{a}_j = 0 \leftarrow$ متعامد



e.g. کروی $\leftarrow$ a_1 و a_2 و a_3 ، $\hat{r}$ و $\hat{\phi}$ و $\hat{\theta}$ هستند

و سطوح مختصات اش کره، نیم صفحه و مخروط هستند.

دیفرانسیل *

$$Q = (u_1 + du_1 ,\ u_2 + du_2 ,\ u_3 + du_3)$$

$$\vec{PQ} = \vec{dl} = \vec{dl_1} + \vec{dl_2} + \vec{dl_3}$$

$$,\ \vec{dl_1} = dl_1 \hat{a}_1$$

$$\vec{dl_1} = dl_1 \hat{a}_1 = h_1\, du_1\, \hat{a}_1$$

ضرایب متریک (metric coefficient)

III که h_1 و h_2 و h_3 از ویژگیهای دستگاه مختصات هستند.

$$\rightarrow \vec{dl} = h_1\, du_1\, \hat{a}_1 + h_2\, du_2\, \hat{a}_2 + h_3\, du_3\, \hat{a}_3$$

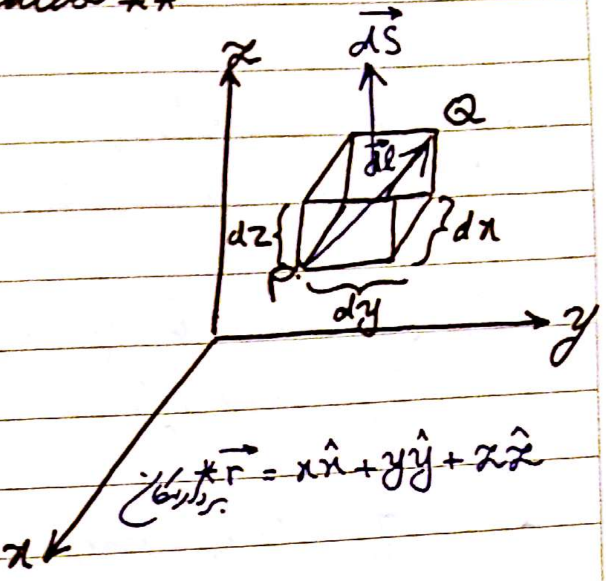
h ها ضریب‌هایی هستند که لازمند تا درون دیفرانسیل جنس اش طول شود.

** Cartesian Coordinates **

(x, y, z)

$\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}$

| | |



* بردار مکان $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

$\rightarrow \vec{dl} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$

$\rightarrow dV = dx\,dy\,dz$

, $\vec{ds} = dx\,dy\,\hat{z}$

** Cylindrical " **

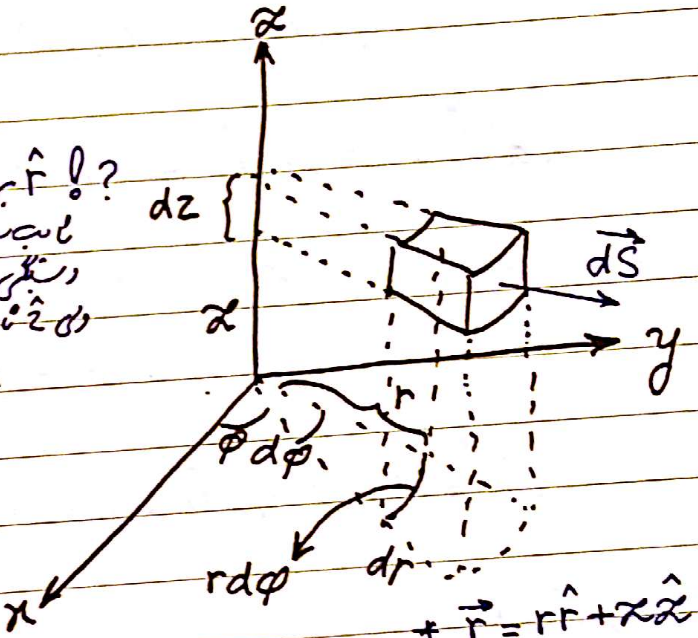
(r, φ, z)

$\hat{r} \quad \hat{\varphi} \quad \hat{z}$

| r |

بردار $\hat{r}$!?
تابعیته
وابستگی به نقطه داره
ولی $\hat{z}$ ثابته $(0,0,1)$

میدان برداری



* $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$

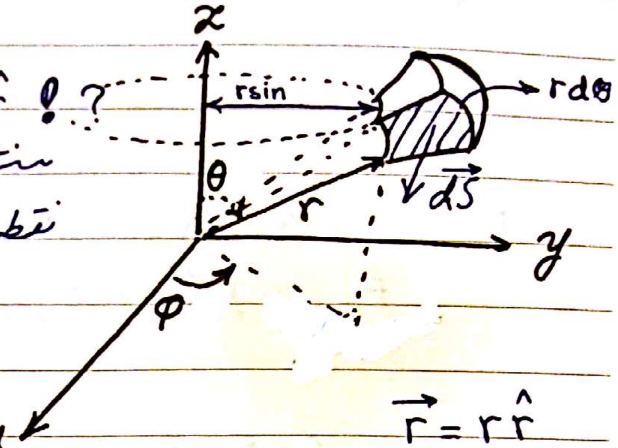
(در واقع $\hat{r}$ هم به φ)

$\vec{dl} = dr\,\hat{r} + r\,d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z}$

$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$\vec{ds} = r\,d\varphi\,dz\,\hat{r}$

** Spherical " **



(r, θ, φ)

$\hat{r} \quad \hat{\theta} \quad \hat{\varphi}$

$1 \quad r \quad r\sin\theta$

بردارها $\hat{r}$! ?
جهتش بستگی به
نقطه داره

$\vec{r} = r\hat{r}$

$\vec{dl} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$ (θ و φ دردسر هستن)

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

توی الکترومغناطیس !
$\vec{dS} = r\,d\theta\,dr\,(-\hat{\varphi})$ (اسم گذاری θ و φ برعکسه :)

** ارتباط سه دستگاه مختصات **

چگونگی تبدیل متغیرها، بردار پایه‌ها و ضرایب متریک

! دقت کنین که r استوانه‌ای با r کروی فرق می‌کنه!

e.g. کروی $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$

با استفاده از هندسه بدست میاد

سرگردانی

Subject Date 95,7,3

(Field)

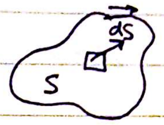
** میدان **

$f(x_1, x_2, x_3)$ Scalar
Vectorial

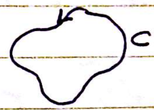
تابعی از مکان

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3)\hat{a}_1 + F_2(\,''\,)\hat{a}_2 + F_3(\,''\,)\hat{a}_3$$

$\oint_S \vec{F}\cdot\vec{ds}$ برای شار



$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dl}$ برای کار یا پتانسیل



دیفرانسیل برداری
غیر برداری

$\int_V \vec{F}\cdot dv$

$\int_C \vec{F}\cdot dl$ میدان مغناطیسی جریان خطی

$\int_S \vec{F}\cdot ds$

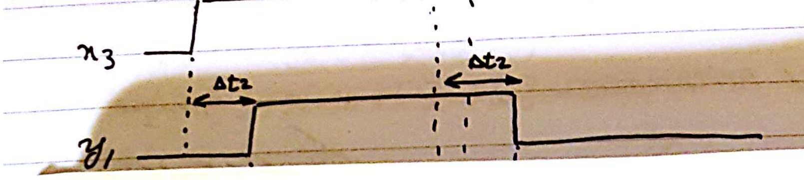
e.g. $\oint_S \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + F_3 ds_3$

ضرب داخلی

$\int \vec{F}\cdot dv = \hat{x}\int F_x\, dv + \hat{y}\int F_y\, dv + \cdots$

F ای که در راستای x است

clips



Subject .... Date ....

** مشتق گیری برداری **

① Gradient

$$\vec{\nabla} f(u_1, u_2, u_3) = \vec{F}$$

nable Del — Scalar — Vectorial

② Divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(u_1, u_2, u_3) = f(u_1, u_2, u_3)$$

Vectorial — Scalar

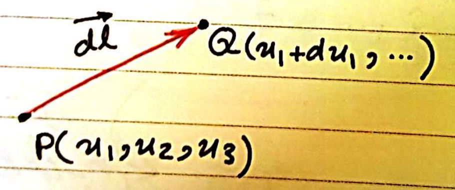
چشمه و چاه های میدان را نشان می دهد.
منبع

③ Curl

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(u_1, u_2, u_3) = \vec{C}(u_1, u_2, u_3)$$

منبع گردابی و برداری میدان را نشان می دهد.

① گرادیان



$\Phi(u_1, u_2, u_3)$
تابع اسکالر میدانی

$$\rightarrow d\Phi = \Phi|_Q - \Phi|_P = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} du_2$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} du_3 = \underbrace{\vec{G} \cdot \vec{dl}}_{\text{فرض وجود}} = G_1 h_1 du_1 + G_2 h_2 du_2 +$$

$$G_3 h_3 du_3$$

G همین میدان برداری

Subject Date

$$\vec{G} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\hat{a_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\hat{a_2} + \cdots$$

$\vec{\nabla}\varphi \longrightarrow \vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\hat{a}_1 + \cdots$

$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{dl} \Rightarrow \varphi\big|_B - \varphi\big|_A = \int_A^B \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{dl}$

مستقل از مسیر

$$\oint_C \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{dl} = 0$$

e.g. $f(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

$= \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$ $=$

راه 2: $f(x,y,z) = z$

همون تابع در دکارتی

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \cdots = \hat{z}$$

* تبدیل دستگاه‌ها به هم

کروی

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$\vec{\nabla}$ از دو طرف گرادیان

$$\frac{1}{r}\hat{\theta} = \frac{\partial \tan^{-1}\cdots}{\partial x}\hat{x} + \cdots$$

$\vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = df$

Subject .... Date ....

✓ جهت گرادیان در جهت بیشترین تغییر

✓ صفحات هم پتانسیل ← گرادیان عمود بر صفحات هم پتانسیل

✓ سطوح هم پتانسیل بهم نزدیکتر (تراکم بیشتر) ← تغییرات ↑ ← خطوط گرادیان بلندتر (گرادیان بیشتر)

تابعی در دستگاه کروی که فقط به r وابسته است

کروی

e.g. $\vec{\nabla} f(r) = h(r)\,\hat{r}$

سطوح هم پتانسیل کره

← خطوط گرادیان در راستای شعاع کره‌ها ← فقط $\hat{r}$ دارند.

این تعریف h عه که تابعی از $\vec{r}$ عه

? $h(\vec{r}) = g(|\vec{r}-\vec{r}_0|)$ ← دستگاه مختصاتی جدید در نظر می‌گیریم که r_0 مبدأش است.

$= g(r')$

$\longrightarrow \vec{\nabla} h(\vec{r}) = g'(r')\,\hat{r}'$

بردار یکه = بردار تقسیم بر اندازه

$\longrightarrow \vec{\nabla} h(\vec{r}) = g'(|\vec{r}-\vec{r}_0|) \times \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

الان اینجا h چون g باس

$$\vec{\nabla} h(|\vec{r}-\vec{r}_0|) = h'(|\vec{r}-\vec{r}_0|)\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

e.g. بار نقطه‌ای

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\hat{r}}{r^2}$$

پتانسیل $\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$\boxed{\varphi(B)-\varphi(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

② دیورژانس

— منابع نقطه رو میده

← میزان سیال عبور کننده از یک سطح مورد نظر

$$\oint_S \vec{v}\cdot d\vec{s} = \underset{\text{بسته}}{\hat{S}}$$

0 ←

>0 چشمه

<0 چاه

← شار عبوری از سطح

($\vec{v}$ بردار سرعت در هر نقطه)

میدان بردار سرعت

میتوان سطح بسته S را تا حد یک نقطه کوچک کرد.

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_{S=\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{s}}{V}}$$

← برای وقتی که singular باشه

e.g. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \lim \dfrac{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}}{V} \overset{\text{قانون گاوس}}{=} \lim_{V\to 0}\dfrac{\frac{Q}{\varepsilon_0}}{V}$

$= \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ *

$$* \quad \boxed{\oint_{S=\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overbrace{\int_V \rho\, dv}^{Q}}$$

$$\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g$$

برای وقتی پیوسته باشه

$$* \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3f_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3f_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2f_3)\right\}$$

* قضیه دیورژانس *

$$\oint_{S=\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dv$$

$$* \quad \vec{\nabla}\cdot(f\,\vec{F}) = \vec{\nabla}f\cdot\vec{F} + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

Ex

(کروی) $\dfrac{\hat{r}}{r^2} \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\hat{r}}{r^2} = ?$

$$\longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)}_{0}+0+0\right\}=0$$

ما می‌دانیم این تابع یک بار نقطه‌ای عه و نباید 0 باشه. باید یا (+) باشه یا (-)

(تعریف نشده)

چون $\dfrac{\hat{r}}{r^2}$ در مبدأ پیوسته نیست و singular است!

پس باید از تعریف استفاده کرد.

با کمک قضیه دیورژانس $\longrightarrow$

$$\underset{\substack{\text{کره به شعاع } \varepsilon \\ \varepsilon\to 0}}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}}\frac{\hat{r}}{\varepsilon^2}\cdot\hat{r}\,\varepsilon^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 4\pi = \int_{\text{کره به شعاع } \varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dv$$

! همه جا بجز مبدأ صفره ولی انتگرالش صفر نیست ← شبیه ضربه است!

اما سه بعدی!

$$\longrightarrow \int \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{F}}_{4\pi\,\delta^3(\vec{r})}\, dv = 4\pi$$

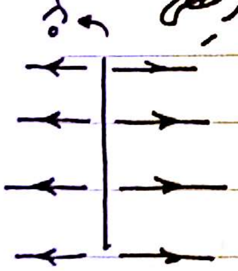
$$\longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{r}) = 4\pi\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \quad ***$$

(کروی)

$$* \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

Ex *(استوانه‌ای) $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r}\right)$ ✓ در این جا هم باید از تعریف رفت

میدان یک بار خطی



$$\Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r}\right) = 2\pi\,\delta(x)\,\delta(y)$$

Ex (استوانه‌ای) $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\varphi}}{r}\right) = 0$

با توجه به فیزیک

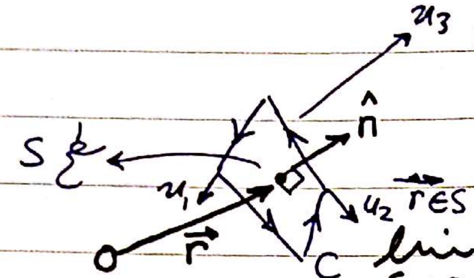
✓ باز هم باید با تعریف رفت

$\vec{E} = 0$

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\varphi}$

Curl III

(Rotation)



$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_{C=\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{l}}{S}=\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}$$

چرخش با قاعده دست راست حول $\hat{n}$

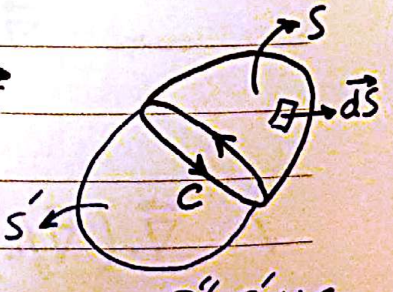
$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(u_1,u_2,u_3)\cdot\hat{a}_3=\lim_{\substack{\Delta u_1\to 0\\ \Delta u_2\to 0}}\frac{f_2h_2\Big|^{\Delta u_2}_{\Delta u_1+u_1,u_2,u_3}-f_2h_2\Big|^{\Delta u_2}_{u_1-\Delta u_1,u_2,u_3}+\dots}{h_1h_2\,\Delta u_1\,\Delta u_3}$$

$$\longrightarrow\ \vec{\nabla}\times\vec{F}(u_1,u_2,u_3)\cdot\hat{a}_3=\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2F_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1F_1)\right\}$$

$$\longrightarrow\ \vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\dfrac{\hat{a}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\hat{a}_2}{h_1h_3} & \dfrac{\hat{a}_3}{h_1h_2}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\[2mm] h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}$$

* قضیه استوکس *

$$\oint_{C=\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$$



$$\oint_{S''}\vec{\nabla}\times\vec{F}\,d\vec{S}=0 \longleftarrow$$ سطح بسته

(چون جهت C در S′ و S برعکس است همدیگر را خنثی می‌کنند)

Subject .... Date ....

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{F}) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\,\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

<u>Ex</u> $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0$

$\Longrightarrow$ حالت کلی: $\vec{\nabla}\times\left(f(r)\,\hat{r}\right) = 0$

<u>Ex</u> $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\hat{\varphi}}{r}\right) = 2\pi\,\delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z}$ ✓ با تعریف

** مشتقات مرتبه دوم بردارها **

✓ $\oint_{C=\partial S} \vec{\nabla}f\cdot d\vec{l} = 0 = \int_S \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)\,d\vec{S}$

$\Longrightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = 0$

✓ $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f) = \overset{\text{لاپلاسین}}{\nabla^2 f} \overset{\text{دکارتی}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Laplasian

clips

Subject .... Date ....

$$\checkmark \oint_{S=\partial V} \vec{\nabla}\times\vec{F}\, d\vec{S} = 0 = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})\, dv$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$$

لاپلاسین برداری

در اینجا تعریف میشه

$$\checkmark \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) \overset{\text{تعریف}}{=} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$$

در دکارتی : $\vec{\nabla}^2\vec{F} = (\vec{\nabla}^2 F_x)\hat{x} + (\nabla^2 F_y)\hat{y} + (\nabla^2 F_z)\hat{z}$

irrotational

پایستار (conservative) curl free $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = D(\vec{r}) \\ \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \end{cases}$

$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$

e.g. میدان الکتریکی ساکن # بار ساکن

$\vec{F}$

میدانهای برداری **

Solenoidal یا Divergenceless $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{F} = C(\vec{r}) \end{cases}$

$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0$

e.g. میدان مغناطیسی ساکن # جریان

C ← منبع برداری

D ← منبع نقطه‌ای

Time Varying EM Field $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = D(\vec{r}) \\ \vec{\nabla}\times\vec{F} = C(\vec{r}) \end{cases}$

ولی در فیزیک هم چنین میدانی نداریم $\vec{F} = 0 \nleftarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \end{cases}$

* برای میدان‌های بدون چرخش (curl free) (پایستار):

می‌توان پتانسیل اسکالر برایش تعریف کرد:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0 \Longleftrightarrow \vec{F}=-\vec{\nabla}\varphi$$

↳ Scalar Potential

* برای میدان‌های سیم‌لوله‌ای:

" پتانسیل برداری "

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0 \Longleftrightarrow \vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

↳ Vector Potential

* برای متغیر با زمان:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}\varphi+\vec{\nabla}\times\vec{A} \Longleftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\neq 0 \;,\; \vec{\nabla}\times\vec{F}\neq 0$$

* توضیح: در مورد میدان‌های irrotational :

این دوتا هر دو باید برقرار باشه

X?

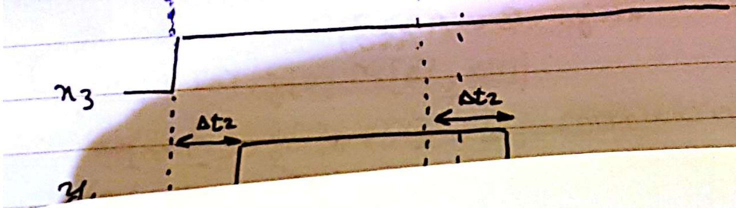
اگر $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}=0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}=0 \overset{\text{آنگاه}}{\Longrightarrow} \exists\varphi : \vec{F}=-\vec{\nabla}\varphi$

$$V(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

همون φ هه

که این انتگرال مستقل از مسیره بنابراین برای هر r ← تابع V قابل تعریفه

(e.g. میدان مغناطیسی سیم حامل جریان) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}=0 \;\overset{\text{لزوماً}}{\not\Longleftarrow}\; \vec{\nabla}\times\vec{F}=0$!!



* قضیه 2 : در مورد میدانهای solenoidal

این دو تا هر دو باید برقرار باشه

$$\left(\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0\right) \Longrightarrow \exists A:\ \vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

(میدان الکتریکی بار نقطه‌ای) $\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0 \quad \overset{\text{لزوماً}}{\not\Longleftarrow} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$!

* قضیه 3 : برای یک میدان کلی

(Helmholtz)

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{irrotational}} + \underbrace{\vec{F}_s}_{\text{solenoidal}}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{F}_s = \vec{\nabla}\times\vec{F} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_i = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} \\ \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F}_s = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \vec{F}_i = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\Longrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

✓ φ و A و F_s و F_i وجود دارن ولی یکتا نیستن.

Subject .... Date ....

* قضیه 4 : هلمهولتز

اگر در کل فضا $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{C}(\vec{r})$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=D(\vec{r})$ معلوم باشند

و D و مؤلفه‌های $\vec{C}$ با سرعتی بیشتر از $\frac{1}{r^2}$ در $r\to\infty$ به

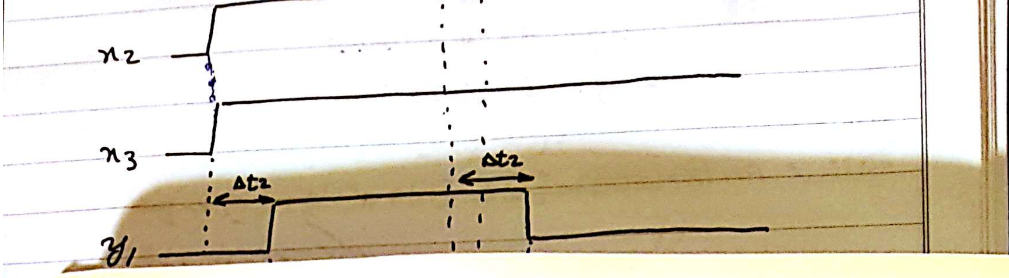
سمت صفر همگرا شوند و $\vec{F}$ در $\vec{r}\to\infty$ به صفر میل کند آنگاه:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}\Bigg(\overbrace{\int\frac{D(\vec{r}')\,dr'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}}^{\varphi}\Bigg)+\vec{\nabla}\times\Bigg(\underbrace{\int\frac{\vec{C}(\vec{r}')\,dr'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\vec{A}}\Bigg)$$

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\int\frac{-\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}')\,dr'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}+\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}')\,dr'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

* نتیجه قضیه 4 ← اگر F با سرعتی بیشتر از $\frac{1}{r}$ در ∞ به صفر میل کند:

$$\vec{F}=0 \xLeftarrow{\text{نتیجه می‌دهد}} \begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0\\ \vec{\nabla}\times\vec{F}=0\end{cases}$$



Subject .... Date ....

✓ اگه رو کل فضا C و D رو بدونیم ← F یکتا بدست میاد.
ولی اگه رو فضای محدود " " :

** قضایای یگانگی (Uniqueness) ← وقتی با روش غیر ریاضی حل می‌کنیم، اگه همون تابع صدق می‌کنه جوابمون همون جواب مسئله است

(I) اگه در حجم V، $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{C}(\vec{r})$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=D(\vec{r})$ ، $\vec{r}\in V$

$\vec{r}\in S=\partial V$ ، $\underset{\text{مؤلفه عمود بر سطح}}{\underline{\vec{F}\cdot\hat{n}=f_n(\vec{r})}}$

این‌ها معلوم باشن،
← آنگاه $\vec{F}$ یکتاست.

$$\vec{F}_1,\vec{F}_2 \longrightarrow \vec{w}=\vec{F}_2-\vec{F}_1 \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{w}=0\ ,\ \vec{\nabla}\times\vec{w}=0 \rightarrow \vec{w}=-\vec{\nabla}\varphi$$
$$,\ \vec{w}\cdot\hat{n}=0$$

$$\int_V \vec{w}\cdot\vec{w}\,dv=\int -\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{w}\,dv=\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{w})=\vec{w}\cdot\vec{\nabla}\varphi+\varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{w}$$

$$\int_V -\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{w})\,dv=\oint_{S=\partial V}\varphi\vec{w}\cdot\underbrace{\hat{n}\,ds}_{\vec{ds}}=0\ ✓$$

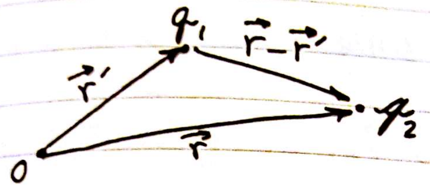
(II) اگر کرل، دیورژانس و مؤلفه‌ی مماسی روی سطح را بدانیم آنگاه میدان یکتاست.

clips™

Subject .... Date ....

* میدانهای الکتریکی ساکن *

*** بخش اول : در فضای خالی



Coulomb's Law $\quad \vec F(\vec r) = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3}$

Free Space Permitivity $\simeq \frac{1}{36\pi}$ E-9

Electric Field: $\vec E_1(\vec r) = \dfrac{\vec F_{12}}{q_2} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3}$

W کار لازم برای بردن بار q_2 از $\vec a$ به $\vec b$:

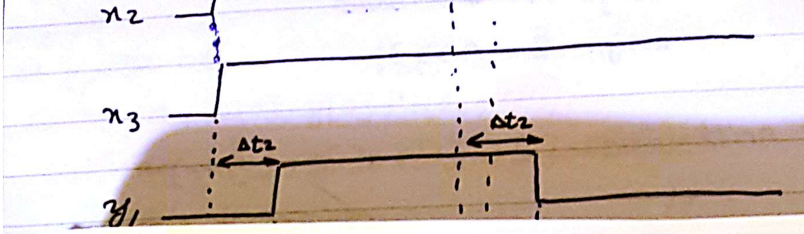
$$W_{ba} = \int_{\vec a}^{\vec b} \vec F_{ex} \cdot \vec{dl}$$ که مستقل از مسیره

excerted force نیروی اعمالی

چون باید بر نیروی بین دو بار (یا حاصل از میدان الکتریکی) غلبه کند و شتاب صفر شود:

$\rightarrow \quad F_{ex} = -\vec F_{12}$

$\rightarrow \quad W_{ba} = -q_2 \int_{\vec a}^{\vec b} \vec E_1 \cdot \vec{dl}$



Subject .... Date ....

Electric Potential Difference

$$\varphi_1(\vec b) - \varphi_1(\vec a) = \frac{W_{ba}}{q_2} = -\int_{\vec a}^{\vec b} \vec E_1 \cdot d\vec l \qquad (V)$$

Electric Potential

یک نقطه از فضا را مرجع گرفته و پتانسیل اش را صفر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(\vec r_0) = 0$$

نقطه‌ی هدف

$$\underbrace{\varphi_1(\vec r)}_{\text{تابع پتانسیل الکتریکی}} = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec E_1 \cdot d\vec l$$

مرجع

برای بار نقطه‌ای q_1 و با فرض $\underbrace{\vec r_0}_{\varphi=0} \to \infty$:

$$\varphi_1(\vec r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

متغیر ، محل منبع (بار q_1)

$$\varphi_1(\vec r + d\vec r) - \varphi_1(\vec r) = d\varphi_1 = -\vec E_1 \cdot d\vec r = \vec\nabla\varphi_1 \cdot d\vec r$$

$$\Longrightarrow \vec E_1(\vec r) = -\vec\nabla \varphi_1(\vec r)$$

$$\oint_C \vec E_1 \cdot d\vec l = 0 \xrightarrow{\text{irrotational}} \vec\nabla \times \vec E_1 = 0$$

Subject .... Date ....

ELECTRIC FLUX

$$\Psi_e = \varepsilon_0 \int_{S=\partial V} \vec{E}_1 \cdot \vec{ds} = q_1$$

$\vec{r}' \in V$. $\xrightarrow{\text{وگرنه}} = 0$

$$\Psi_e = \varepsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 \, dv$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \underbrace{\frac{q_1 \delta^3(\vec{r})}{\varepsilon_0}}_{\text{برای این مثال خاص (بار نقطه‌ای)}} = \underbrace{\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}_{\text{به طور کلی}}$$

ρ: چگالی حجمی بار الکتریکی

$$\rho(\vec{r}) = q_1 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

چون تمام بار تو یه جا جمع شده و نقطه‌ایس

* مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای q_i با بردار مکان $\vec{r}_i$

← کار لازم برای ایجاد یک چیدمان بار (Configuration Energy):
(از ∞ به $\vec{r}_i$)

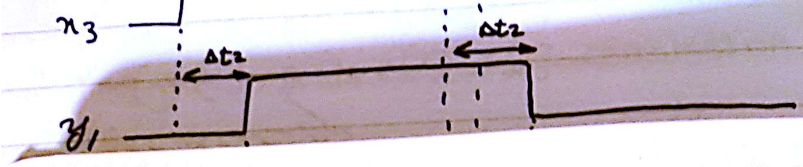
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i}^{N} \sum_{\substack{j \\ j > i}}^{N} \frac{q_j q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_i$$

پتانسیل الکتریکی سایر بارها (که قبلاً گذاشته شدن) در محل بار iام

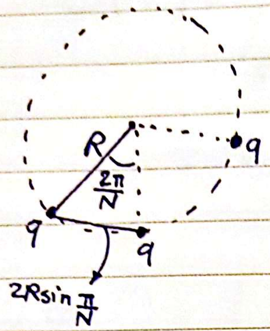
$$\Phi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

clips™



Subject .... Date ....

Ex N بار نقطه‌ای q روی رئوس یک N ضلعی منتظم



$$W = \frac{Nq}{2} \underbrace{\sum_{m=1}^{N-1} \frac{q}{8\pi \varepsilon_0 R \sin\left(\frac{\pi}{N} m\right)}}_{\text{پتانسیل بقیه بارها برای هر بار}} =$$ انرژی لازم برای ساختن این چیدمان

$$\varphi_{center} = \frac{Nq}{4\pi \varepsilon_0 R}$$

$$W_{N+1} = \varphi_{center}\, q = \frac{Nq^2}{4\pi \varepsilon_0 R} =$$ انرژی لازم برای گذاشتن یک بار q در مرکز چیدمان

? اگر یکی از بارهای N ضلعی رو برداریم، q ی وسط به کدام سمت حرکت می‌کند؟ (در حالت عادی که ثابت است)

← انگار کنار اون بار یه q- بذاریم و چون N تا q همدیگر رو خنثی می‌کنن ← انگار فقط اون q- عمل می‌کنه

← به سمت q- حرکت می‌کنه.

اگر فرض کنیم تا ∞ ادامه بده حرکتش رو، سرعت نهایی اش؟

با پایستگی انرژی:

$$U = \frac{(N-1)q^2}{4\pi \varepsilon_0 R} = \frac{1}{2} m v^2$$

$\longrightarrow v$ ✓

clips

Subject .... Date ....

رابطه میدان
الکتریکی چند بار
نقطه‌ای

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

$$E(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i (\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

بازگشت به مختصات قبلی

$$-\vec{\nabla}\Big(\underbrace{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}}_{1/r}\Big) = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

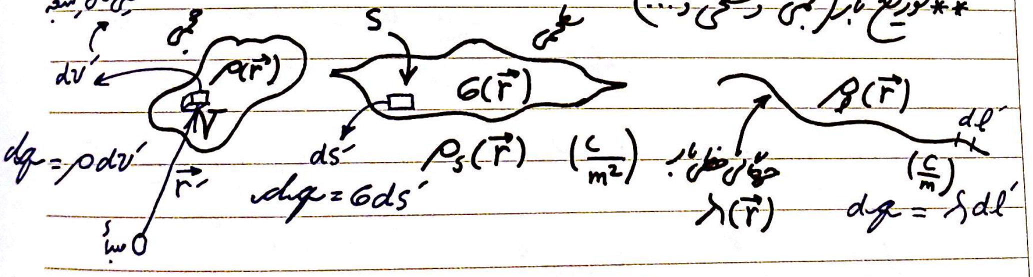
(به تغییر دستگاه مختصات)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\right) = 4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i) = \frac{\sum q_i \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}) \checkmark$$

** توزیع بار (حجمی و سطحی و ...)



در واقع چیدمانی از بارهای نقطه‌ای است

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\, dv'}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r}-\vec{r}'|}$$

بردار مکان نقطه‌ای که می‌خواهیم درش پتانسیل رو حساب کنیم

متغیر (نقاط توزیع بار)

$$\phi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')\, ds'}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_C \frac{\lambda(\vec{r}')\, dl'}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\, dv'\, (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$-\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\int_V \frac{\rho(\vec{r}')\, dv'}{4\pi\varepsilon_0}\, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

استفاده از خواص انتگرالی δ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\, dv' = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Subject .... Date ....

** انرژی ذخیره شده در توزیع بار پیوسته

? در هر نقطه‌ی توزیع بار ، بار کل صفر؟

✓ پتانسیل ∞ ، $=0$

$$W=\int_{V}\frac{1}{2}\rho(\vec{r}')dv'\varphi(\vec{r}')$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{V \text{ یا کل فضا}}\vec{\nabla}'\cdot\vec{E}\ \varphi(\vec{r}')dv'$$

(چون خارج V ، $\rho=0$)

$$\left[\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{E})=\underbrace{\vec{\nabla}\varphi}_{-\vec{E}}\cdot\vec{E}+\varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right]$$

$$\longrightarrow W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{V}\left(\vec{\nabla}'\cdot(\varphi\vec{E})+|E|^2\right)dv'$$

Closed

$$\xrightarrow{\text{قضیه‌ی دیورژانس}} W=\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0\oint_{S=\partial V}\overbrace{\varphi\vec{E}}^{1/r^3}\cdot\overbrace{\vec{ds}}^{\propto r^2}}_{\text{انرژی خارج از } V}+\underbrace{\int_{V}\frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2dv'}_{\text{انرژی ذخیره شده داخل حجم } V}$$

صفر نیست!؟

$$\xrightarrow{V\to\text{کل فضا}} W=\int_{\text{کل فضا}}\frac{1}{2}\varepsilon_0|E|^2dv$$

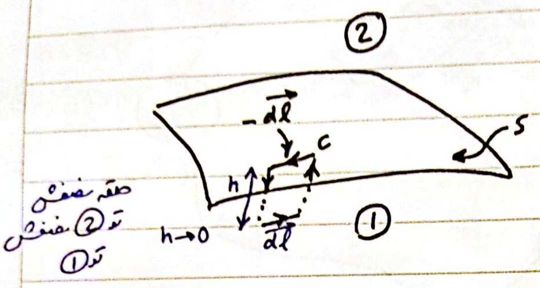
$$\Longrightarrow \text{چگالی حجمی انرژی الکتریکی}=\frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2\quad\left(\frac{J}{m^3}\right)$$

✓ برای یک بار نقطه‌ای ، $W=\infty$ می‌شه چون انرژی ساخت خودش رو هم در نظر گرفته‌ایم

Subject .... Date ....

Boundary Conditions

** شرایط مرزی میدان الکتریکی



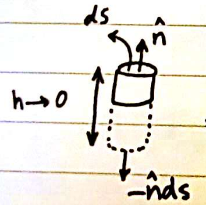
۱ و ۲ ماده‌ها با مرز بینشان روی s

هدف بررسی رفتار $\vec{E}(\vec{r})$ روی مرز (s) است.

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = \vec{E_1}\cdot\vec{dl} - \vec{E_2}\cdot\vec{dl} = 0$$

چون $h \to 0$ ، dl و E موازی سطح میشن

$\Longrightarrow$ I پیوستگی مؤلفه مماسی $\equiv$ $\hat{n} \times (\vec{E_2} - \vec{E_1})\Big|_{\text{روی مرز}} = 0$



$\Longrightarrow$ II $\oint_s \vec{E}\cdot\vec{ds} = \vec{E_2}\cdot\hat{n}\,ds - \vec{E_1}\cdot\hat{n}\,ds = \dfrac{Q_{enclosed}}{\varepsilon_0}$

مؤلفه قائم $\hat{n}\cdot(\vec{E_2} - \vec{E_1})\Big|_{\text{مرز}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ بار سطحی

clips

خلاصه معادلات

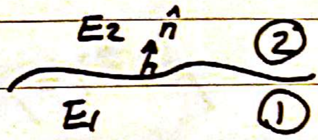
Integral form

$$
① \begin{cases}
\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = 0 \\
\oint_{S=\partial V} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \int_V \dfrac{\rho(\vec{r}\,')\,dv'}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}
\end{cases}
$$

point form

$$
② \begin{cases}
\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = 0 \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}
\end{cases}
$$

شروط مرزی



$$\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\Big|_{\text{مرز}} = 0$$

پیوستگی مولفه مماسی

$$\hat{n}\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\Big|_{\text{مرز}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

پتانسیل

$$③ \quad \nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad \text{(Poisson's eq.)}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

شروط مرزی پتانسیل

$$(\varphi_1-\varphi_2)\Big|_{\text{مرز}} = 0$$ پیوستگی تابع پتانسیل

$$\hat{n}\cdot(\vec{\nabla}\varphi_2-\vec{\nabla}\varphi_1) = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}$$

Subject .... Date ....

** استفاده از قانون گاوس در مسائل دارای تقارن

✓ تقارن کروی ← فقط تابع r

یعنی جهت $\vec{r}$ مهم نیست (θ و ϕ مهم نیست)

$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$

! بردار مکان

$\longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$

گاوس $\rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = E(r)\,4\pi r^2 = \dfrac{Q(r)}{\varepsilon_0}$

$\vec{ds} \rightarrow \sin\theta\, r^2\, \hat{r}\, d\theta\, d\varphi$

روی سطح کره به شعاع r

$$\Longrightarrow E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

✓ تقارن استوانه‌ای ← فقط تابع r (شعاع)

$\dfrac{\partial}{\partial\phi} = 0 = \dfrac{\partial}{\partial z}$

$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$

$\longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$

گاوس $\rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = E(r)\,2\pi r\,\Delta z = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

روی سطح استوانه به شعاع r

$$\longrightarrow E(r) = \frac{\frac{Q_{enc}}{\Delta z}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

✓ تقارن دکارتی ← فقط تابع z

$\dfrac{\partial}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial}{\partial y}$

? یه مکعب مستطیل که در راستای x و y تا ته می‌ره

$\rho(\vec{r}) = \rho(z)$

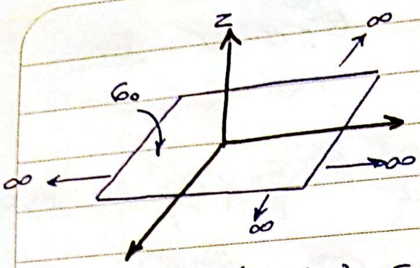
$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\,\hat{z}$

✓ گاوس با استوانه

تمرین: حک کردن φ و شرایط مرزی

Subject ---------- Date

Q سطح بار ∞



$$\vec{E} = E(z)\hat{z}$$

استوانه‌ای از $-z$ تا z با

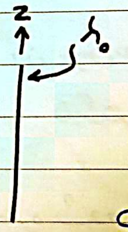
قاعده ΔS در نظر میگیریم (سطح گوسی)

$$\text{گاوس} \longrightarrow \Big(E(z) - \underbrace{E(-z)}_{-E(z)}\Big)\Delta S = \frac{\sigma_0 \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\longrightarrow E(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & z>0 \\[2ex] \dfrac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0} & z<0 \end{cases} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{z} \quad \checkmark$$

/ وقتی یه سطح محدود داریم، اگه بسیار بهش نزدیک بشیم انگار سطح نامحدود است.

Q



تقارن استوانه‌ای — دستگاه استوانه‌ای

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} \longleftarrow \text{گاوس}$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{r_0}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

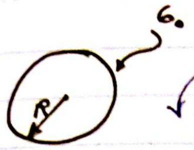
$r_0 =$ مرجع — اگه ∞ بگیریم ∞ میشه X

راه دیگه: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi \underset{\text{چون فقط تابع r است}}{=} -\frac{d\varphi}{dr}\hat{r} \longrightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{-\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$$\longrightarrow \varphi(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\ln(r) + \ln(r_0)\right] = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} \quad \checkmark$$

تمرین ← بدون گاوس و با پواسون یا Div, curl حل کنید.

Ex کره‌ای به شعاع R



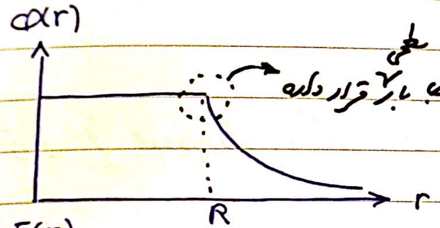
گاوس

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{\sigma_0 \, 4\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2}\hat{r} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 \hat{r} & r>R \end{cases}$$

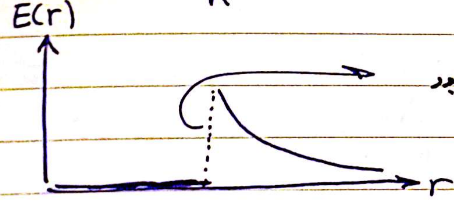
اثر بار نقطه‌ای در مرکز است.

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} E(r)\,dr = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}R & r<R \\ \dfrac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & r>R \end{cases}$$

یکنواخته! و به r بستگی نداره



این یعنی این جا بار سطحی قرار داره



این پرش یعنی بار سطحی وجود داشته

* انرژی ذخیره شده در میدان (انرژی چیدمان)

$$W = \int_{\text{کل فضا}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 dv = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |E(r)|^2 4\pi r^2 dr$$

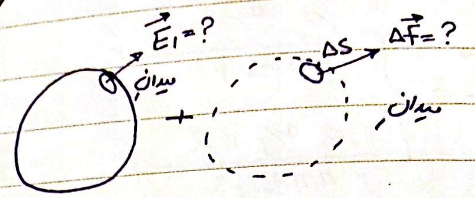
$$= \int \frac{1}{2}\sigma(r')\,\varphi(\vec{r}')\,ds' = \frac{1}{2}\sigma_0 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} R \, 4\pi R^2$$

$$\underset{\text{بار کل}}{Q} = \sigma_0 \, 4\pi R^2 \Longrightarrow W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

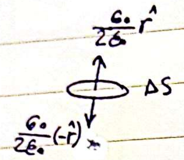
Subject .... Date ....

* فشار الکترواستاتیک وارد بر سطح ؟

$$\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \vec{P}$$



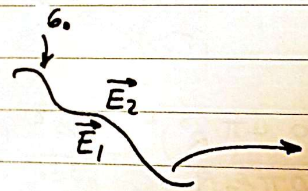
میدان موجود در فضا = میدان + میدان و $\vec{E}\Big|_{r=R} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{r}$



$$\vec{E}\Big|_{r=R^-} = 0 = \vec{E}_1 - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\longrightarrow \vec{E}_1 = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\longrightarrow \Delta\vec{F} = \underbrace{\sigma_0 \Delta S}_{Q_{\Delta S}} \underbrace{\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{r}}_{E_1} \longrightarrow \vec{P} = \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0}\hat{r} \checkmark \left(\frac{N}{m^2}\right)$$



* میدان داشتن روی سطح $= \frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_2}{2}\Big|_{\text{مرز}}$

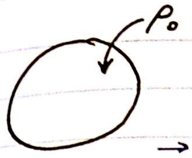
که E_1 و E_2 به مرز میل کنند.

ادامه مثال قبل :

روش دیگر :

$$\varphi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')\, ds'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma_0 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}}$$



Ex کره با بار حجمی

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0\,\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r\leqslant R\\[2ex] \dfrac{\rho_0\,\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\hat{r} & r\geqslant R\end{cases}$$

$$\longrightarrow \vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\vec{r} & r\leqslant R\\[2ex] \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\dfrac{R^3}{r^2}\,\hat{r} & r\geqslant R\end{cases}$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi \longrightarrow -E(r)=\frac{d\varphi}{dr}$$

$$\longrightarrow \varphi=\begin{cases}\dfrac{-\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\dfrac{r^2}{2}+C_1 & r\leqslant R\\[2ex] \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\dfrac{R^3}{r} & r\geqslant R\end{cases}$$

با توجه به اینکه φ باید پیوسته باشد، بدست میاد

$$W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\times\frac{12}{10}=\frac{3\left(\rho_0\,\frac{4\pi}{3}R^3\right)^2}{20\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\rho_0^{\,2}}{3\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{5}R^5$$

* حل براساس پتانسیل

خارج کره: $\nabla^2\varphi_{ex}(\vec{r})=0\ ,\quad \varphi_{ex}\big|_{\vec{r}\to\infty}=0$

چون بار سطحی نداریم

داخل کره: $\vec{\nabla}\varphi_{in}(\vec{r})=\dfrac{-\rho_0}{\varepsilon_0}\ ,\quad \varphi_{ex}\big|_R=\varphi_{in}\big|_R\ ,\quad \dfrac{d\varphi_{in}}{dr}\Big|_R=\dfrac{d\varphi_{ex}}{dr}\Big|_R$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(\underbrace{r^2\frac{d\varphi_{ex}}{dr}}_{cte}\Big)=0\longrightarrow \varphi_{ex}(r)=\frac{K_1}{r}+\cancel{K_2}\to 0$$

شکل کلی φ_{ex}

$$\to K_1=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^3$$

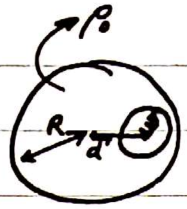
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{d\varphi_{in}}{dr}\Big)=\frac{-\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi_{in}(r)=c-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2$$

شکل کلی φ_{in}

$$\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}R^2$$

Ex

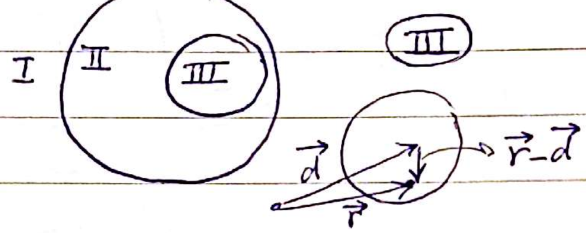


شعاع حفره a

مرکزش نسبت به مرکز کره بزرگ

$\vec{d}$

$\longleftarrow$ (P) جمع آثار



$$\vec{E}_3 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{d})$$

$$\longrightarrow \vec{E}_3 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{d} \checkmark$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{\underbrace{V'}_{\text{کره به شعاع R - حفره}}} \underbrace{\rho(\vec{r}')}_{\rho_0}\ \underbrace{\varphi(\vec{r}')}_{\varphi_2}\ dv'$$

راه دیگر: حفره رو مثل کره با $-\rho_0$ در نظر گرفت:

$$W = W_{\rho_0} + \underbrace{W_{-\rho_0}}_{\text{ساختن کره } -\rho_0} + \underbrace{W_2}_{\text{هزینه‌ی گذاشتن کره‌ی } -\rho_0 \text{ در اینجا}}$$

$$\longrightarrow W = \frac{\rho_0^2}{3\varepsilon_0}\left[\frac{4\pi}{5}R^5 + \frac{4\pi}{5}a^5 + \frac{2\pi}{5}a^5 - 2\pi R^2 a^3 + \frac{2\pi}{3}d^3 a^3\right]$$

$$W_2 = 2\pi a^3 \big(\underbrace{\tfrac{1}{5}a^2 + \tfrac{1}{3}d^3 - R^2}_{<0}\big)$$

$R > d + a$

راه راحت‌تر اینه که بازهم از جمع آثار استفاده کنیم:

$$E = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

ρ_0 ناشی از کره ρ_0 — " $-\rho_0$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} |\vec{E}|^2 dv = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int |\vec{E}_1|^2 dv}_{W_{\rho_0}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int |\vec{E}_2|^2 dv}_{W_{-\rho_0}}$$

$$+ \underbrace{\varepsilon_0 \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \, dv}_{W_2}$$

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\Phi_1$$

$$W_2 = \int -\varepsilon_0 \vec{\nabla}\Phi_1 \cdot \vec{E}_2 \, dv = \int [-\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot(\Phi_1 \vec{E}_2) +$$

$$\varepsilon_0 \Phi_1 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2) dv = \int_{\text{حفره}} -\rho_0 \Phi_1 \, dv$$

$$\xrightarrow{\text{کلا در این موارد}} W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \left[|\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\rho_2 \Phi_1\right] dv$$

* ? روی مرزها، پیوستگی میدان الکتریکی و پتانسیل رو چک کنین (چون بار سطحی نداریم)

Subject .... Date ....

Ex

$$\vec{F}(x,y) = e^{-x}\left[-\sin y\,\hat{x} + f(y)\,\hat{y}\right] \qquad 0<x<2 \quad 0<y<2$$

a) شرایط اینکه F یک میدان الکتریکی باشد

$$\longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}=0 \longrightarrow f(y)=\cos y \checkmark$$

b) داخل ناحیه‌ای که $\vec{F}$ تعریف شده، توزیع بار را بدست آورید.

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

باری وجود ندارد توی $\longleftarrow$ $0<y<2,\ 0<x<2$

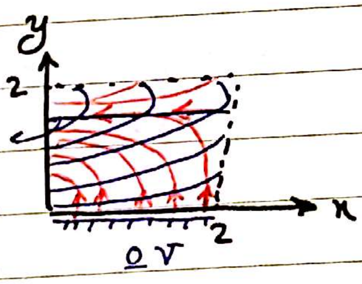
c) اگر $\varphi(0,0,0)=0$ ← تابع پتانسیل درین ناحیه؟

$$\vec{E} = e^{-x}\left[-\sin y\,\hat{x} + \cos y\,\hat{y}\right] = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y}$$

$$\longrightarrow \varphi(x,y) = -e^{-x}\sin y \qquad 0<x,y<2$$

d) رسم هم پتانسیل‌ها؟

میدان الکتریکی —



$-1V$ به سطح هم پتانسیل بر خط $y=\frac{\pi}{2}$ عمود

$$-e^{-x}\sin y = V_0$$

$$\Longrightarrow -1 \leq V_0 \leq 0$$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = -\tan y$$

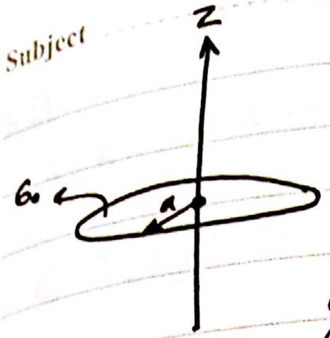
معادله خطوط میدان $\longrightarrow x = \ln(k\cos y)$

e.g. $\dfrac{dr}{E_r} = \dfrac{r\,d\varphi}{E_\varphi} = \dfrac{dz}{E_z}$

اگر توی استوانه‌ای بود

Subject .... Date ....

Ex



$\Phi(0,0,z) = ?$

$\vec{E}(0,0,z) = ?$

$\vec{r} = z\hat{z}$

$\vec{r}' = r\hat{r}$

$$\Phi(0,0,z) = \int \frac{\rho(\vec{r}')\,dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 r'\,d\varphi'\,dr'}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r'^2+z^2}}$$

$$= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+a^2} - |z|\right]$$

$$\vec{E} = \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')\,dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = \int_0^a \frac{2\pi r'\sigma_0\,dr'\,(z\hat{z} - r'\hat{r})}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+r'^2)^{3/2}}$$

$z\hat{z} \xrightarrow{\varphi \text{ تج}} \int \longrightarrow r\hat{r} = 0$

$\checkmark\ z\hat{z}$

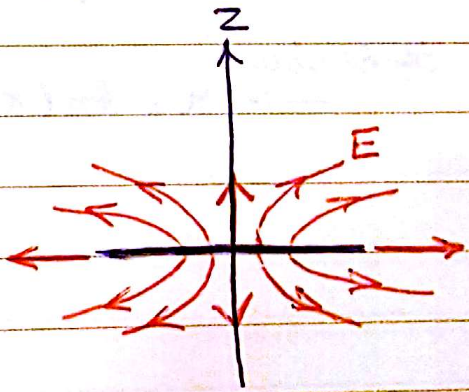
$$= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{z}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = -\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} \hat{z}$$

$z \to 0 \implies$ میدان صفحهٔ بی‌نهایت

$z \to \infty \implies$ میدان بار نقطه‌ای

$\hat{z}\cdot(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

$\hat{z}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

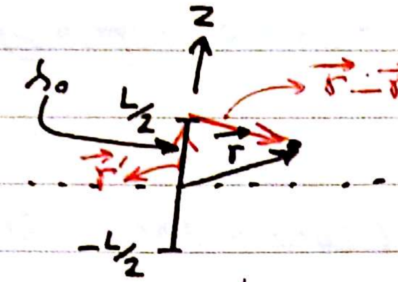


clips

Scanned by CamScanner

Subject .... Date ....

En



$$\vec{r}-\vec{r}' = r\hat{r} + (z-z')\hat{z}$$

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$$

$$\vec{r}' = z'\hat{z}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda_0 \, dz'}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2+(z-z')^2}}$$

✓ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}(x/a) = \ln\left(x/a + \sqrt{(x/a)^2+1}\right)$$

✓ $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0\pi} \sinh^{-1}\left(\frac{z'-z}{r}\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\sinh^{-1}(\tan\alpha_1) + \sinh^{-1}(\tan\alpha_2)\Big]$$

$$\vec{E} = \int_{-L/2}^{L/2}$$

** حل مسائل الکترواستاتیک در فضای خالی

انتگرال گیری

تقارن خاص

حل معادله دیفرانسیل $\left\{ \nabla^2\Phi = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \right.$ B.C.

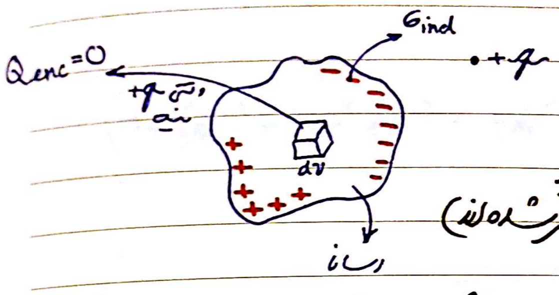
حدس زدن! (بنا بر یکتایی مطمئنیم که جوابمون درسته)

میدانهای الکتریکی ساکن

***بخش دوم : در مجاورت رساناها}

رسانا (Conductor) ⟵ رسانای کامل

Perfect Electric Conductor (PEC)



⟵ بعد از نزدیک کردن +q و بعد از رسیدن به حالت ماندگار که همه چیز ساکن می شود (یعنی تمامی نیروها صفر شده اند) E درون رسانا صفر خواهد شد.

⇐ و هم چنین کل رسانا هم پتانسیل می شود و چگالی بار درونش صفر می شود.

⇐ خواص اصلی رسانا:

I $\vec{E}_{inside}=0$

II $\varphi(\vec{r}_{inside})=cte$

III $\rho(\vec{r}_{inside})=0$

IV Induced Surface Charge

$$\sigma_{ind}(\vec{r}) \quad \vec{r}\in\partial V \xrightarrow{①} \sigma_{ind}(\vec{r})=\varepsilon_0\,\vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}$$

V Boundary Conditions

$$\vec{E}_{tan}\Big|_{\underbrace{\vec{r}\in\partial V}_{\text{در نقاط روی سطح مرز رسانا}}}=0 \longrightarrow ①\ \hat{n}\times\vec{E}\Big|_{\text{روی سطح رسانا}}=0$$

مماسی

✓ چون E توی رسانا صفره، فقط مولفه E داریم که نرمال بیرون رساناست

$$② \quad \hat{n}\cdot\vec{E}\Big|_{\text{روی سطح رسانا}}=\frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0} \quad ①$$

* ⇐ روی سطح رسانا E عمود بر سطح

VI در نقطه‌های بسیار نزدیک به سطح رسانا

$$\vec{E}(\vec{r}) = \cancel{\vec{E}_{tan}} + E_n \hat{n} = \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

$\vec{r}^{+}$ که کمی با جسم مرز — 0

$$\vec{E}(\vec{r})\Big|_{\text{میدان دقیقاً روی سطح رسانا}} = \frac{\sigma_{ind}(\vec{r})}{2\varepsilon_0} \hat{n}$$ با میانگین‌گیری

نیروی الکتروستاتیک وارد بر سطح $\quad \vec{P} = \frac{\sigma_{ind}^2}{2\varepsilon_0} \hat{n} \quad \left(N/m^2\right)$ به فشار در جهت خارج از رسانا

* نیروی وارد بر یک رسانای بدون بار، همیشه جاذبه است. (از طریق E)

Q اگه همین چگالی بار سطحی رو با همین آرایش در فضای خالی قرار دهیم، میدان الکتریکی حاصل، درونش چقدر خواهد بود؟

$$E_{inside} = E_{\sigma_{ind}} + E_{+q} = 0 \Longrightarrow E_{\sigma_{ind}} = -E_{+q} \checkmark$$

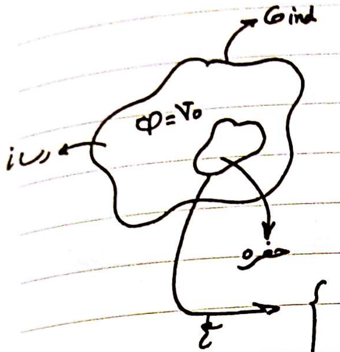
بیرونش؟

$$\vec{E} = \int_{\partial V} \frac{\sigma_{ind}(\vec{r}')\,(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, ds'$$

VII $\quad \oint_{\partial V} \sigma_{ind}(\vec{r}')\, ds' = 0$

Subject .... Date ....

(VIII) * رسانایی که درونش حفره است:



← این مسئله با قبلی هیچ فرقی نداره!

$\vec{r}$ داخل حفره

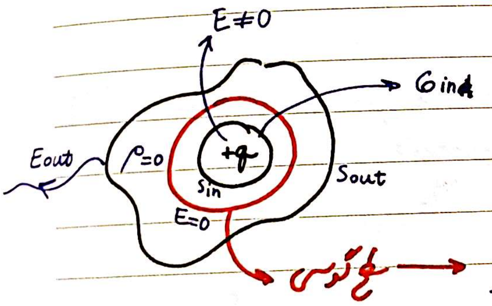
$$\begin{cases} \varphi = cte \\ \nabla^2 \varphi = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{دیفرانسیل}]{\text{معادله}} \varphi(\vec{r}) = cte \Rightarrow \text{صدق می‌کند} \checkmark$$

چون جواب یکتایه (یگانگی) ← ✓

$$\longrightarrow \varphi_{\text{درون حفره}} = V_0 \checkmark \Rightarrow \vec{E} = 0$$

قفس فارادی

(IX) رسانای ایزوله بدون بار



سطح گوسی ⟶ $\oint \underset{0}{E} \cdot ds = 0 = \dfrac{q + \sigma_{in} S}{\varepsilon_0}$

$$\longrightarrow \oint_{S_{in}} \sigma_{in}(\vec{r}') \, ds' = -q$$

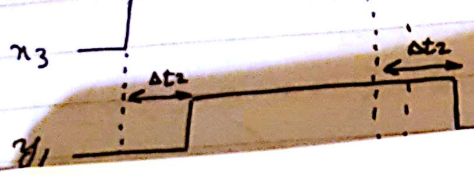
$$\oint_{S_{out}} \sigma_{out}(\vec{r}') \, dr' = +q \quad (1)$$

σ_{in} و $+q$ برابر (قرینه)

σ_{out} و σ_{in} برابر (قرینه)

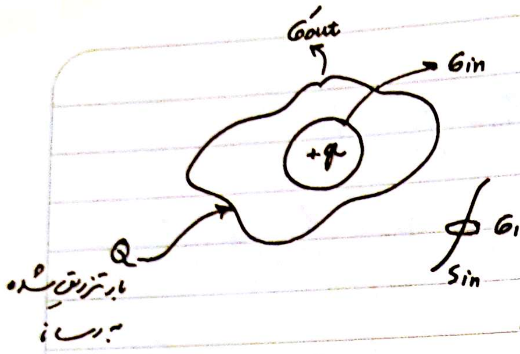
← مجموع بارش ← $+q$

clips™



Subject .... Date ....

۸) رسانای ایزوله باردار



$$\oint_{S_{in}} \sigma_{in}\, ds' = -q$$

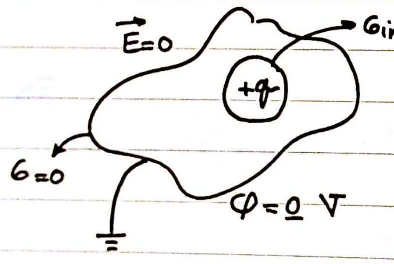
$$\oint_{S_{out}} \sigma'_{out}\, ds' = Q+q$$

① $\sigma'_{out}(\vec{r}) = \alpha\, \sigma_{out}(\vec{r})$ ۱) تذکر

۱) حالت خاص ← $Q=-q$

۲) رسانا فضای درون و بیرونش را از هم جدا می‌کند و کاری به هم ندارند.

** رسانای زمین شده grounded conductor



σ_{in} → دنیای درون به بیرون کاری ندارد و مثل قبله

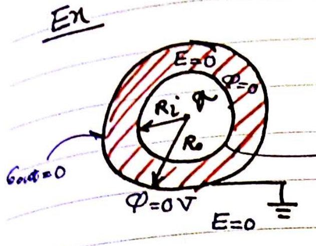
← انگار بار $-q$ از بی‌نهایت به رسانا تزریق می‌شود.

$\sigma=0$ ←

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \varphi\big|_{\text{مرز}} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{دیریکله}} \varphi = 0 \; , \; \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = 0$$

Subject .... Date ....

Ex



$\sigma_{in} = \frac{-q}{4\pi R_i^2}$

$$\vec{E}_{in} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\varphi_{in} = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{\text{پتانسیل بار نقطه ای}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

که روی مرز φ=صفر شه

اگه ? V_0 باشه ؟

Ex

$\sigma_{in} \rightarrow -q$ غیر یکنواخت

چون متقارن نیست

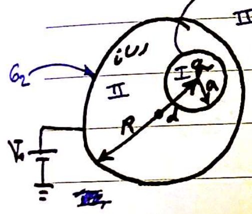
$\sigma_{out} \rightarrow +q \xrightarrow[\text{کاری به درون نداره}]{\text{یکنواخت}} \sigma_{out} = \frac{+q}{4\pi R^2}$

Ex

پتانسیل الکتریکی در کل فضا ؟

$\sigma_1 = \frac{-q}{4\pi a^2}$

III



(III) $\varphi(\vec{r}) = V_0 \frac{R}{r} \quad r > R$

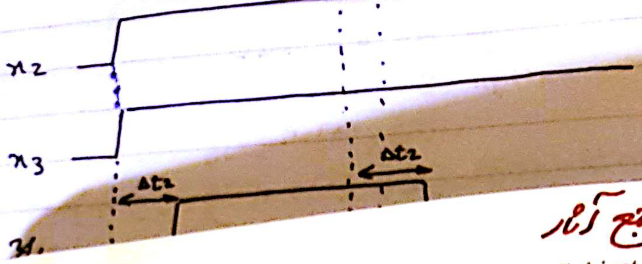
راه دیگه

σ_2 یکنواخت $\longrightarrow \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R^2}$

با حدس و تکیاتی

$$\xrightarrow[\text{در مرکز کره است}]{\text{انگار یه بار Q}} \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi\Big|_{|\vec{r}|=R} = V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \longrightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \checkmark$$



جمع آثار ✓

II $\quad \varphi = V_0$

I جمع آثار :

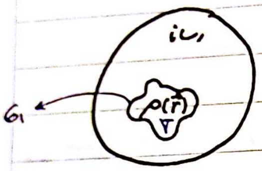
$$\varphi = \underbrace{V_0}_{\text{ناشی از } \sigma_2} + \underbrace{\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{d}|}}_{\text{ناشی از } \sigma_1} + \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{d}|}}_{\text{ناشی از } q}$$

$|\vec{r}-\vec{d}| = a$

Ex

کرهٔ بدون بار - ایزوله

پتانسیل بیرون کره؟



(i) $\displaystyle\oint_{\partial V} \sigma_1 \, ds = -\int_V \rho(\vec{r}) \, dv$

(ii) $\vec{E}_{\sigma_1} + \vec{E}_{\rho(\vec{r})} = 0$ بیرون حفره

(iii) $\displaystyle\oint_R \sigma_2 \, ds = \int \rho(\vec{r}) \, dv$

(iv) $\displaystyle\sigma_2 = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \, dv}{4\pi R^2} \Rightarrow \vec{E}_{\sigma_1} + \vec{E}_{\rho} + \vec{E}_{\sigma_2} = 0$ داخل رسانا

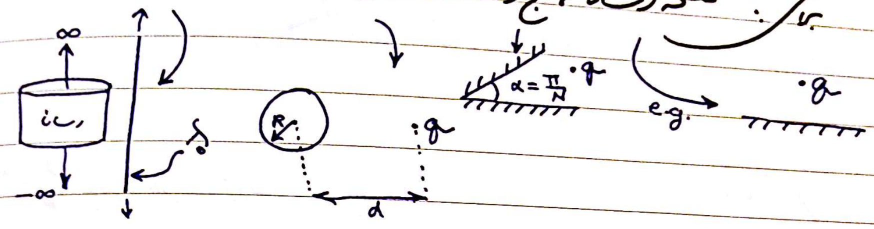
$$\longrightarrow \quad \varphi = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \, dv}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad r > R \quad ✓$$

✓ اگه ρ طوری باشه که انگار یه $+q$ و یه $-q$ تو حفره داریم، برای بیرون انگار بار حفره صفره.

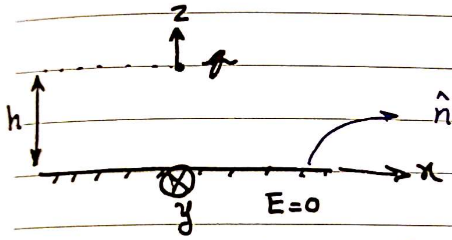
Method of Images

** روش تصاویر

برای: صفحه رسانا، کنج رسانا، کره رسانا، استوانه نامحدود رسانا



** صفحه نامحدود رسانا

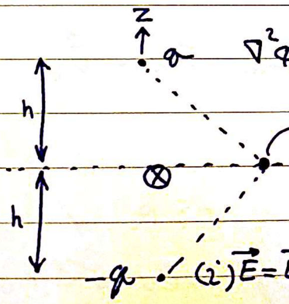


$\hat n\cdot\vec E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, $\hat n\times\vec E = 0$

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = \frac{-q}{\epsilon_0}\,\delta(\vec r - h\hat z) \\ \vec\nabla\varphi\times\hat z\Big|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

روش تصاویر (P)

فرض می‌کنیم رسانا نباشد



$\nabla^2\varphi = \frac{-q}{\epsilon_0}\delta(\vec r - h\hat z)$

$\hat z\times\vec E = 0$

(i) $\vec E = \vec E_q + \vec E_{-q}$

تصویر آینه‌ای بار q رو نسبت به صفحه و با بار مخالف قرار می‌دیم ← برآیند دوتا رو می‌گیریم ولی فقط در فضای بالا و به فضای جدید اضافه شده کاری نداریم.

$$(ii)\quad \sigma(x,y,0) = \epsilon_0\,\hat z\cdot\vec E\Big|_{z=0} = \epsilon_0\,\hat z\cdot\left\{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat r + (z-h)\hat z}{(r^2+(z-h)^2)^{3/2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat r + (z+h)\hat z}{[r^2+(z+h)^2]^{3/2}}\right\}\Bigg|_{z=0}$$

$$\longrightarrow \sigma(r,\varphi,0) = \frac{-qh}{2\pi\,[r^2+h^2]^{3/2}}$$

x^2+y^2

Subject .... Date ....

? $W_{eq} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int |E|^2 dv = \frac{1}{2}\sum_{1}^{2} q_i \varphi_i \longrightarrow W = \frac{1}{2} W_{eq} = \frac{1}{2} q \varphi_i$ ↳ image

$$\text{(iii)} \iint_{\substack{\text{روی صفحه} \\ z=0}} \sigma \, ds = -q$$

$$\text{(iv)} \quad W = \frac{1}{2}\varphi(0,0,h)\, q \;\checkmark$$ انرژی گذاشتن q

configuration

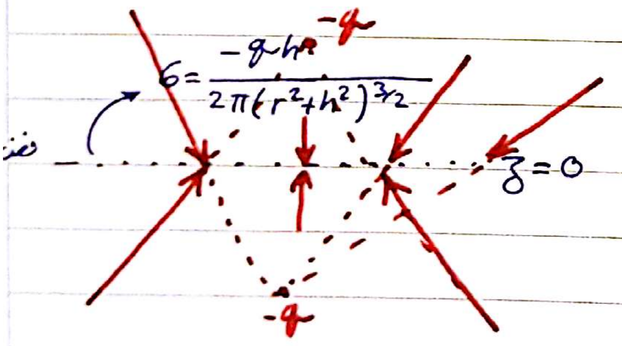
دقت $E = E_q + E_{-q} \Rightarrow \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 dv = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 |E_q|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 |E_{-q}|^2 + \varepsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_{-q}\, dv$

$$\longrightarrow W = \frac{1}{2}\varphi(0,0,h)\, q = \frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_0 h}$$

$F \downarrow q$

$$\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2z)^2}\hat{z} \longleftarrow$$ * با استفاده از روش تصاویر

$$\longrightarrow W = \int_{\infty}^{h} \underbrace{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 z^2}\hat{z}}_{\vec{F}} \cdot (dz\,\hat{z})$$



برای فضای بالا انگار تو $z=-h$ $(0,0,-h)$ بار $-q$ داریم و فضای پایین انگار تو $(0,0,h)$ برای $-q$ داریم.

$$\longrightarrow \vec{E}_{z<0} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\hat{r} + (z-h)\hat{z}}{(r^2+(z-h)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_{z>0} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\hat{r} + (z+h)\hat{z}}{(r^2+(z+h)^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} \hat{n}\cdot(E_{z>0} - E_{z<0})\big|_{z=0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \hat{n}\times(\quad '' \quad)\big|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

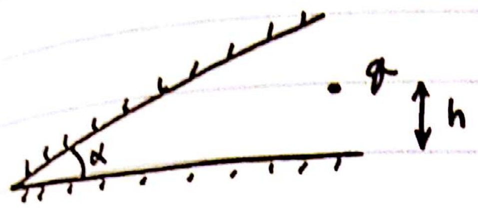
$$W_{eq} = \int \frac{1}{2} \rho \varphi \, dv = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i = 2N \frac{1}{2} q \varphi \rightarrow W = \frac{1}{2N} W_{eq} = \frac{1}{2} q \varphi_i$$

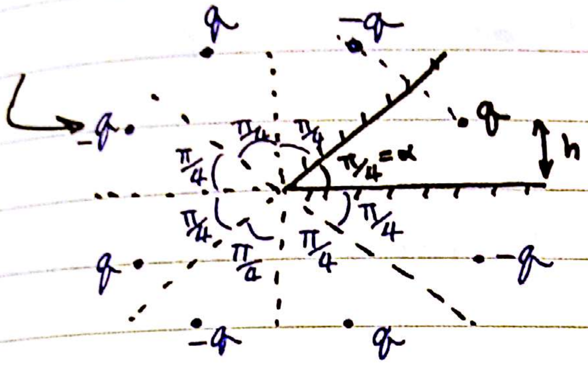
(پتانسیل نقطه‌ی بار از کل qها به جز اصلی) ← ; در سیستم واقعی ← ; پتانسیل بارهای تصویر ←

Date

Subject

** کنج

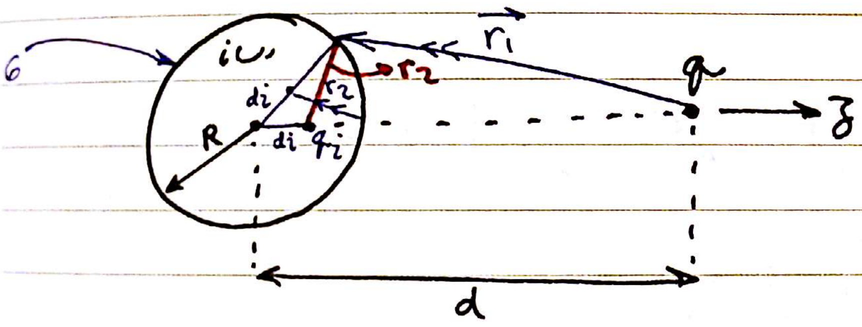




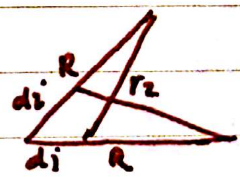
$\alpha = \frac{\pi}{N} \longrightarrow 2N$ تا بار داریم

بارها نسبت به صفحه‌ای قرینه کن (انگار هر صفحه مرز صفحه‌ی نوعی قبله) !

** کره رسانا



$$\varphi \Big|_{\text{روی کره}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \varphi_\sigma = cte$$



تشابه: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{d_i}{R} = \frac{R}{d}$

$$\varphi \Big|_{\text{کره}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \left\{ 1 + \frac{q_i/q}{r_2/r_1} \right\} \longrightarrow = 0$$

$$q_i = -\frac{R}{d} q \quad , \quad d_i = \frac{R^2}{d}$$

← خلاصه :

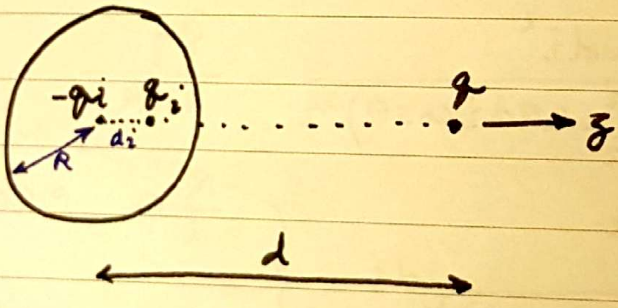
$$q_i = \frac{-R}{d}\, q \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\Phi_q + \Phi_{-q}\right]\Big|_{\text{کره}} = 0$$

$$d_i = \frac{R^2}{d}$$

← $-q_i$ هم می‌ذاریم تو مرکز

$$\Phi(\vec r)\Big|_{\text{بیرون کره}} = \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec r - d\hat z|}}_{\text{ناشی از } q} + \underbrace{\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec r - d_i\hat z|}}_{\text{ناشی از تصویر}} \underbrace{- \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\text{ناشی از } -q_i \text{ در مرکز}}$$

حالت I) کرهٔ ایزوله بدون بار



$$q_i = -\frac{R}{d}\, q \qquad d_i = \frac{R^2}{d}$$

میدان بیرون کره : $\vec E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec r - d\hat z}{|\vec r - d\hat z|^3} + \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec r - d_i\hat z}{|\vec r - d_i\hat z|^3} + \frac{-q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat r}{r_2}$?

→ پتانسیل کره $\Phi\Big|_{\text{کره}} = \frac{-q_i}{4\pi\epsilon_0 R}$

$$W = \frac{1}{2} q\, \Phi\Big|_{\substack{q \text{ محل} \\ \text{ناشی از سایر بارها}}} = \int_{\text{بیرون کره}} \frac{1}{2}\rho\, \Phi\, dv = \frac{1}{2} q\, \Phi(d\hat z)$$

$$\rho \longrightarrow q\,\delta(\vec r - d\hat z)$$

Subject .... Date ....

q_i و $-q_i$ در واقع جایگزین σ_{ind} هستند ✓

$$\sigma_{ind} = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{r}\Big|_{\substack{\text{روی کره}\\ r=R}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\hat{r}-d\hat{z}}{(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}\cdot\hat{r}$$

$$+\frac{-q\frac{R}{d}\left(R\hat{r}-\frac{R^2}{d}\hat{z}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+\left(\frac{R}{d}\right)^2-2\frac{R^2}{d}R\cos\theta\right)^{3/2}}\cdot\hat{r}+\frac{\frac{R}{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\underbrace{\cdot\hat{r}}_{?}$$

باید طوری همگنی رو خنثی کنی که فقط در راستای $\hat{r}$ باشه و $\hat{z}$ نداشته باشه.

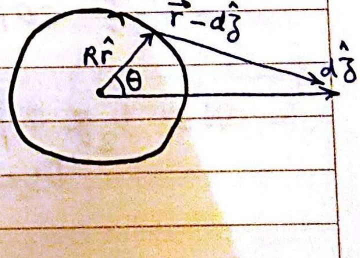
$$\longrightarrow \sigma_{ind}(\theta) = \underbrace{\frac{q}{4\pi R}\frac{R^2-d^2}{(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}}_{\text{توزیع غیر یکنواخت ناشی از بار تصویر } q_i}+\underbrace{\frac{q}{4\pi Rd}}_{\text{توزیع بار یکنواخت ناشی از بار } q_i \text{ در مرکز کره}}$$

* انتگرالش صفره چون کره بدون بار بوده

$$\longrightarrow \sigma_{ind} = \frac{q_i}{4\pi R}\frac{R^2-d_i^2}{(R^2+d_i^2-2Rd_i\cos\theta)^{3/2}}-\frac{q_i}{4\pi R^2}$$

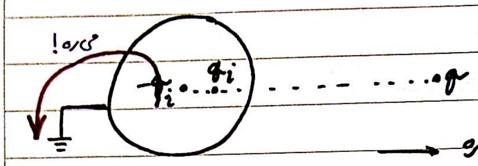
$$\oint_{\text{کره به شعاع } R}\frac{q}{4\pi R}\frac{R^2-d^2}{(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}\,ds=\begin{cases}-\frac{R}{d}q \;(\to q_i) & R<d\\ -q \;(?) & R>d\end{cases}$$

$$\vec{E}\Big|_{r=R^+}=\sigma_{ind}(\theta)\frac{\hat{r}}{\varepsilon_0}$$



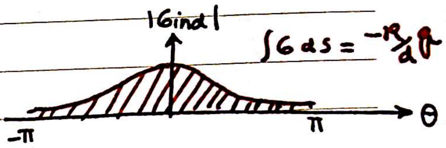
Subject .... Date ....

حالت II) کرهٔ زمین شده



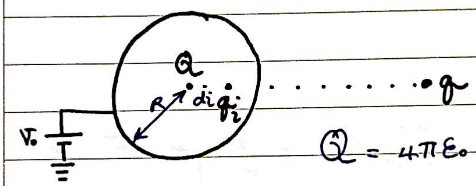
$\longrightarrow$ بار کل درون کره $= q_i$

$$\sigma_{ind} = \frac{q}{4\pi R}\,\frac{R^2-d^2}{(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}$$



$\int \sigma\, ds = -\frac{R}{d}q$

حالت III) کره با پتانسیل ثابت

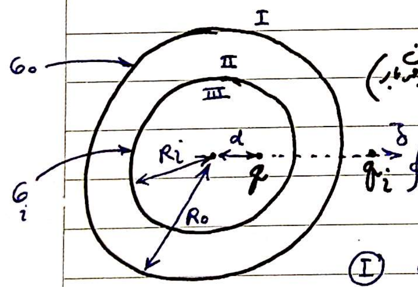


$Q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$

کل بار القا شده $= Q + q_i$

$$W = \frac{1}{2}q\left\{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 (d-d_i)}\right\}$$

حالت IV) بار داخل حفرهٔ کروی (رسانا ایزوله و بدون بار)



$\oint \sigma_i\, ds = -q$ $\qquad \sigma_0 = \frac{q}{4\pi R_0^2}$

I $\quad \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$

II $\quad \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} \qquad \vec{E}_2 = 0$

$d_i = \frac{R^2}{d} \qquad q_i = -\frac{R}{d}q$ $\quad$ یک بار q_i در $(0,0,d_i)$ قرار می‌دهیم.

III $\quad \varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - d\hat{z}|} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - d_i\hat{z}|} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$

پتانسیل ثابت

$\longrightarrow \varphi_3\big|_{r=R_i} = \varphi_2$

clips™

$$\sigma_i = \frac{q}{4\pi R_i} \frac{R_i^2 - d^2}{(R_i^2 + d^2 - 2R_i d\cos\theta)^{3/2}}$$

$$\oint_{\text{کره } R_i} \sigma_i \, ds = -q$$

(۴) کلاً کافیه که q و q_i پتانسیل کره رو صفر کنن.

$$\Phi(\vec{0}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

۲ F رو هم میشه حساب کرد به کمک روش تصاویر (در واقع نیروی σ_{ind})

؟ کار لازم برای انتقال q از مرکز حفره به فاصله d ؟ (دو راه)