علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

تعداد سوالات : تستی : ۰ **تشریحی :** ۷ | **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۰ **تشریحی :** ۱۲۰ | **سری سوال :** یک ۱

عنـــوان درس: آنالیزحقیقی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی کاربردی (آنالیزعددی)، ریاضی کاربردی (تحقیق درعملیات)، ریاضی محض (آنالیز)،ریاضی محض (ارشد)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)۱۱۱۱۱۷۹

1- Let X be a nonempty set — نمره ۲،۰۰

a) What is a topology in X?

b) What is a σ -algebra in X?

c) Let (X,m) be a measurable space and Y be a nonempty set and $f:(X,m)\to Y$ be a map.

Prove that if $\Omega=\{A\subset Y: f^{-1}(A)\in m\}$ then

Ω is a σ-algebra in Y.

2- State and prove Lebesgue's Monotone Convergence Theorem. — نمره ۲،۰۰

3- Suppose X is a locally compact Hausdorff Space and m is a measure on a σ -algebra m in X. — نمره ۲،۰۰

a) What is the meaning of the following notation : $K \prec f \prec V$.

b) Define $C_0(X)$ and $C_c(X)$ and $L^p(\mu)$.

c) Prove that for $1\le p<\infty$, $C_c(X)$ is dense in $L^p(\mu)$.

4- If L is a continuous linear functional on Hilbert space H, then prove that there is a unique $y\in H$ such that $L(x)=(x,y)$ for every $x\in H$. — نمره ۲،۰۰

5- If X is a normed linear space and if $x_0\in X$ and $x_0\neq 0$, then prove that there is a bounded linear functional F on X of norm 1, so that $F(x_0)=\|x_0\|$. — نمره ۲،۰۰

6- Prove that $L^2(\mu)$ is a Hilbert space. — نمره ۲،۰۰

7- Let X, Y be two Banach spaces. — نمره ۲،۰۰

a) Define a homeomorphism between X and Y .

b) If $T: X \to Y$ is a bijective continuous linear map, then prove that T is a homeomorphism.

olomyar.com

Edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

1- Suppose $\mathfrak{M}$ is σ-algrbra in X, and let f map X into $[-\infty,\infty]$ such that for every real a, $f^{-1}((a,\infty])\in\mathfrak{M}$, show that f is measurable. نمره ۲،۰۰

2- Suppose X is a locally compact, σ-compact Hausdorff space. If m and μ are as described in the statement of Riesz Representation theorem, prove that then if $E\in m$ and $\in>0$,there is a closed set F and an open set V such that $F\subset E\subset V$ and $\mu(V-F)<\in$. نمره ۲،۰۰

3- Suppose μ be every positive measure. prove that $L^{\infty}(\mu)$ is a complete metric space. نمره ۲،۰۰

4- Suppose that $f\in L^{1}(T)$, a function $\hat{f}$ on Z defined by $\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ini}dt\ (n\in Z)$ prove that then $\lim_{|n|\to+\infty}\hat{f}(n)=0$ نمره ۲،۰۰

5- a) Define the "inner product spaces" and " Hilbert space".
b) Give an example of an inner product space but is not a Hilbert space. نمره ۲،۰۰

6- Suppose $\mu(\Omega)=1$,and suppose f and g are positive measurable function on Ω such that $fg\geq 1$ Prove that $\int_{\Omega} fd\mu.\int_{\Omega} gd\mu\geq 1$. نمره ۲،۰۰

7- Suppose $f_n:X\to[0,\infty]$ is measurable for $n=1,2,3,..$ and $f_1\geq f_2\geq f_3\geq\ldots\geq 0$, $f_n(x)\to f\ (x)$ as $n\to\infty$, for every $x\in X$, and $f_1\in L^{p}(\mu)$. Prove that then $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$ نمره ۲،۰۰

olomyar.com
Edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

تعداد سوالات : تستی : ۰ **تشریحی :** ۷ | **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۰ **تشریحی :** ۱۲۰ | **سری سوال :** یک ۱

عنـــوان درس : آنالیز حقیقی (آموزش محور)،آنالیزحقیقی ۱

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی کاربردی (آنالیزعددی)،ریاضی محض (آنالیز)،ریاضی محض (جبر)،ریاضی محض (ارشد)،ریاضی محض (هندسه)،ریاضی کاربردی (تحقیق درعملیات) ۱۱۱۱۱۷۹ - ،آموزش ریاضی۱۱۱۱۴۵۶

1- Let C be the space of all continuous functions on [0,1], with the supremum norm . Let M consist of all $f \in C$ for which $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 1$. Prove that M is a closed convex subset of C. نمره ۲.۰۰

2- If $f_n : X \to [0,\infty]$ is measurable , for each positive integer n, then prove that $\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n d\mu) \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$. نمره ۲.۰۰

3- Suppose X is a locally compact Hausdorff space . V is open and K is compact subset of V . Then there exists an $f \in C_c(X)$ such that $K \prec f \prec V$. نمره ۲.۰۰

4- If X is a locally compact Hausdorff space, then $C_0(X)$ is the completion of $C_c(X)$ relative to the metric defined by the supremum norm $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. نمره ۲.۰۰

5- a) Let μ be a positive measure on a σ -algebra m in a set Ω , so that $\mu(\Omega) = 1$, if f is a real function in $L^1(\mu)$,if $a < f(x) < b$ for all $x \in \Omega$, and if ϕ is convex on (a,b) , then prove that نمره ۲.۰۰

$$\phi(\int_\Omega f d\mu) \le \int_\Omega (\phi \circ f) d\mu$$

b) Suppose ϕ is a real function on R^1 such that

$$\phi(\int_0^1 f(x)dx) \le \int_0^1 \phi(f)dx$$

for every real bounded measurable function f . prove that ϕ is then convex .

6- The Riesz-Fischer Theorem. Let $\{u_\alpha ; \alpha \in A\}$ be an orthonormal set in H . Suppose $\varphi \in l^2(A)$. Then $\varphi = \hat{x}$ for some $x \in H$. نمره ۲.۰۰

7- If M is a subspace of a normed linear space X and if f is a bounded linear functional on M , then f can be extended to a bounded linear functional F on X so that $\|F\| = \|f\|$. نمره ۲.۰۰

Edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

1- Let $\{f_n\}$ be a sequence of measurable functions on X, and suppose that نمره ۲،۰۰

(a) $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le \infty$ for every $x \in X$,

(b) $f_n(x) \to f(x)$ as $n \to \infty$, for every $x \in X$.

Prove that f is measurable, and $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$ as $n \to \infty$.

2- Let X be a locally compact Hausdorff space in which every open set is $\sigma - compact$. Let λ be any positive Borel measure on X such that $\lambda(K) < \infty$ for every compact set K. Prove that λ is regular. نمره ۲،۰۰

3- Let S be the class of all complex, measurable, simple functions s on X such that $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$. نمره ۲،۰۰

If $1 \le p < \infty$, prove that S is dense in $L^p(\mu)$.

4- Suppose that نمره ۲،۰۰

(a) X and Y are metric spaces, X is complete,

(b) $f : X \to Y$ is continuous,

(c) X has a dense subset X_0, such that, f is an isometry on X_0, and

(d) $f(X_0)$ is dense in Y.

Prove that f is an isometry of X onto Y.

5- If X and Y are Banach spaces and if Λ is a bounded linear transformation of X onto Y which is also one-to-one, prove that there is a $\delta > 0$ such that $\|\Lambda x\| \ge \delta \|x\|$ $(x \in X)$. نمره ۲،۰۰

6- If $\{f_n\}$ is a sequence of continuous functions on $[0,1]$ such that $0 \le f_n \le 1$ and $f_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$, for all $x \in [0,1]$, prove that $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$ نمره ۲،۰۰

7- Suppose $f_n \in L^p(\mu)$, for $n = 1,2,3,\ldots,$ and $\|f_n - f\|_p \to 0$ and $f_n \to g$ a.e., as $n \to \infty$. نمره ۲،۰۰

What relations exists between f and g ?

Edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

نمره ۳،۱۱

1- Let (X,m,μ) be a measurable space and $f:X\to[0,\infty]$ is a measurable , $E\in m$ and $\int_E fd\mu=0$. Then $f=0$ $a.e.$ on E.

نمره ۳،۱۱

2- Suppose $f\in L^1(\eta)$, f is real-valued , and $\in>0$. Then there exist functions u and v on X such that $u\le f\le v$, u is upper semicontinuous and bounded above, v is lower semicontinuous and bounded below, and $\int_X (v-u)d\eta<\varepsilon.$

نمره ۱،۵۶

3- State and prove Fatou's lemma.

نمره ۱،۵۶

4- Let M be a closed subspace of a Hilber space H .

(a) Every $x\in H$ has then a unique decomposition $x=Px+Qx$ into a sum of $Px\in M$ and $Qx\in M^{\perp}$.

(b) $\|x\|^2=\|Px\|^2+\|Qx\|^2$.

نمره ۱،۵۶

5- Let S be the class of all complex , measurable, simple functions on X such that $\mu(\{x:s(x)\neq 0\})<\infty$.

If $1\le p<\infty$, then S is dense in $L^p(\mu)$.

نمره ۱،۵۶

6- Suppose that (X,m,η) be a measure space and $\Omega\in m$, such that $\mu(\Omega)=1$. Let f and $g\in L^2(\eta)$ be positive functions on Ω such that $fg\ge 1$. Prove that $(\int_\Omega fd\eta)(\int_\Omega gd\eta)\ge 1$.

نمره ۱،۵۴

7- Let (X,m,μ) be a measure space and $f\in L^1(\mu)$. Then $A=\{x:f(x)\neq 0\}$ have $\sigma-finite$ measure.

olomyar.com
Edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

تعداد سؤالات: تستی: ـــ **تشریحی:** ۷ | **زمان آزمون (دقیقه): تستی:** ـــ **تشریحی:** ۱۲۰

نام درس: آنالیز حقیقی ۱

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی (آنالیز - جبر — هندسه - آنالیز عددی - تحقیق در عملیات) ۱۱۱۱۱۷۹

--

استفاده از: **مجاز است.**

بارم هر سوال ۲ نمره است

1.Let s and t be two nonnegative measurable simple functions on X , where $(X, \mathcal{m}, \mu)$ is a measure space. Show that :

(i) Show that the following function, φ , is a measure on $\mathcal{m}$:

$$\varphi(E) = \int_E s\, d\mu \ , \ \forall E \in \mathcal{m}$$

(ii) $\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$

Also show that , if f_1 and f_2 are non- negative measurable functions,then

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

2. Define an upper semicontinuous function and show that if f_1 and f_2 are two non- negative real valued functions on $\mathbb{R}$ and both are upper semicontinuous, then $f_1 + f_2$ is an upper semicontinuous function.

3. Write the Minkowski's inequality and then prove it.

4. Let $p > 0$ and $f \in L^p(\mu)$ $(f \geq 0)$, where X is a measure space with the positive measure μ. Let for all $n \in N$, $f_n = \min\{f, n\}$. Show that $f_n \in L^p(\mu)$ and $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$.

5. Let L be a continuous linear functional on the Hilbert space H and $M = \{x \in H \mid Lx = 0\}$.

Prove that , if $M \neq H$ then $M^{\perp}$ is a vector space of dimension 1.

olomyar.com

Edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

تعداد سؤالات: تستی: ـــ تشریحی: ۷ زمان آزمون (دقیقه): تستی: ـــ تشریحی: ۱۲۰

نام درس: آنالیز حقیقی ۱

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی (آنالیز- جبر — هندسه- آنالیز عددی- تحقیق در عملیات) ۱۱۱۱۱۷۹

--

استفاده از: مجاز است.

6. Let L is a continuous functional on the Hilbert space H. Prove that there exists an unique element $y \in H$ such that $Lx = (x, y)$ $(\forall x \in H)$.

7. Calculate the following integrals:

(i) $\int_{R^+} e^{-[x]}\, dx$ ($[x]$ is the integer part of x)

(ii) $\int_{[0,1]} \chi_Q(x)dx$ (χ is the characteristic function On the rational numbers Q .)

olomyar.com

Edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

1- If Ω is any collection of subsets of X, there exists a smallest σ-algebra Ψ^* in X such that $\Omega \subset \Psi^*$. نمره ۲،۰۰

2- Suppose $V_1,...,V_n$ are subsets of a locally compact Hausdorff space X, K is compact, and $K \subset V_1 \cup ... \cup V_n$.

Then there exist functions $h_i \prec V_i (i = 1,...,n)$ such that $h_1(x) + ... + h_n(x) = 1$ $(x \in K)$. نمره ۲،۰۰

3- Let S be the class of all complex, measurable, simple functions on X such that $\mu(\{x : S(x) \neq 0\}) < \infty$.

If $1 \leq p < \infty$, then show that S is dense in $L^p(\mu)$. نمره ۲،۰۰

4- prove that Every nonempty, closed, convex set E in a Hilbert space H is contains a unique element of smallest norm. نمره ۲،۰۰

5- For a linear transformation Λ of a normed linear space X into a normed linear space Y, each of the following three conditions implies the other two: نمره ۲،۰۰

(a) Λ is bounded.

(b) Λ is continuos.

(c) Λ is continuous at one point of X.

6- Suppose f is a complex measurable function on X, μ is a positive measure on X, and $\int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p$, and $\mu(X) = 1$. Prove that if $0 < r < s < \infty$ then $\|f\|_r \leq \|f\|_s$. نمره ۲،۰۰

7- Prove that every unit open ball is convex in every normed linear space. نمره ۲،۰۰

Edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

علومیار (جزوات و سوالات دانشگاهی)
@olomyar Site : olomyar.com

نام درس : آنالیزحقیقی ۱
رشته تحصیلی/ کد درس: ریاضی (آنالیزعددی -تحقیق درعملیات- آنالیز-جبر- هندسه) (۱۱۷۹_۱۱_۱۱)
آزمون: نیمسال تابستان۹۰

تعداد سوالات : تستی: ۰ تشریحی: ۷
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۰ تشریحی: ۱۰۵
کد سری سوال: یک - ۱

بارم هر سوال ۲ نمره است

۱.الف) مطلوبست تعریف انتگرال لبگ یک تابع مثبت اندازه پذیر

ب) نشان دهید اگر $X = \mathbb{N}$ و μ اندازه شمارشی روی X و $f: \mathbb{N} \to [0, \infty]$ آنگاه

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

۲.الف) قضیه نمایش ریس را بیان کنید.

ب) ثابت کنید اندازه صادق در شرایط قضیه نمایش ریس یکتاست.

۳.فرض کنید f یک تابع مختلط و اندازه پذیر بر X بوده و A یک مجموعه انداز پذیر با $\mu(A) < \infty$ و $f(x) = 0$ اگر $x \notin A$ و همواره $|f| \leq 1$.
ثابت کنید دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $g_n \in C_c(X)$ و $|g_n| \leq 1$ و

(ت . ه.) $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$

۴.فرض کنید M زیر فضای بسته‌ای از فضای هیلبرت H باشد ثابت کنید:

الف) هر $x \in H$ تجزیه منحصر به فردی مانند $x = P_x + Q_x$ دارد که $P_x \in M$ و $Q_x \in M^{\perp}$.

ب) P_x و Q_x به ترتیب نزدیکترین نقاط M و $M^{\perp}$ به x می باشند

۵. فرض کنید $L: H \to \mathbb{R}$ تابعی خطی و پیوسته بر فضای هیلبرت H باشد و $M = \{x: Lx = 0\}$ نشان دهید یا $M = H$ یا $M^{\perp}$ یک فضای برداری از بعد یک است.

۶ الف)قضیه نگاشت باز را بیان کنید.

ب) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ بوده و Λ یک تبدیل خطی کراندار یک به یک از X بروی Y باشد در اینصورت ثابت کنید $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $(x \in X)$ $\|\Lambda x\| \geq \delta \|x\|$

۷. الف) نامساوی هولدر و مینکوفسکی را بنویسید.

ب) فرض کنید $\mu(\Omega) = 1$ و f و g توابع اندازه پذیر مثبتی بر Ωباشند به طوری که $fg \geq 1$.ثابت کنید$\int_\Omega f d\mu \int_\Omega g d\mu \geq 1$

olomyar.com

سال جهاد اقتصادی