

سری سوال: یک ۱

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۰۰ تشریحی: ۱۲۰

تعداد سوالات: تستی: ۰۰ تشریحی: ۷

عنوان درس: آنالیز حقیقی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (ارشد)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۱۷۹

- 1- Let X be a nonempty set نمره ۲,۰۰۰
 - a) What is a topology in X ?
 - b) What is a σ -algebra in X ?
 - c) Let (X, m) be a measurable space and Y be a nonempty set and $f: (X, m) \rightarrow Y$ be a map. Prove that if $\Omega = \{A \subset Y: f^{-1}(A) \in m\}$ then Ω is a σ -algebra in Y .
- 2-State and prove Lebesgue's Monotone Convergence Theorem. نمره ۲,۰۰۰
- 3-Suppose X is a locally compact Hausdorff Space and m is a measure on a σ -algebra m in X . نمره ۲,۰۰۰
 - a) What is the meaning of the following notation: $K \prec f \prec V$.
 - b) Define $C_0(X)$ and $C_c(X)$ and $L^p(\mu)$.
 - c) Prove that for $1 \leq p < \infty$, $C_c(X)$ is dense in $L^p(\mu)$.
- 4-If L is a continuous linear functional on Hilbert space H , then prove that there is a unique $y \in H$ such that $L(x) = (x, y)$ for every $x \in H$. نمره ۲,۰۰۰
- 5-If X is a normed linear space and if $x_0 \in X$ and $x_0 \neq 0$, then prove that there is a bounded linear functional F on X of norm 1, so that $F(x_0) = \|x_0\|$. نمره ۲,۰۰۰
- 6-Prove that $L^2(\mu)$ is a Hilbert space. نمره ۲,۰۰۰
- 7-Let X, Y be two Banach spaces. نمره ۲,۰۰۰
 - a) Define a homeomorphism between X and Y .
 - b) If $T: X \rightarrow Y$ is a bijective continuous linear map, then prove that T is a homeomorphism.

تعداد سوالات : تستی : ۰ تشریحی : ۷ زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۰ تشریحی : ۱۲۰ سری سوال : یک ۱

عنوان درس : آنالیز حقیقی ۱

رشته تحصیلی / کد درس : ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (ارشد)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۱۷۹

1- Suppose $\mathfrak{M}$ is σ -algebra in X , and let f map X into $[-\infty, \infty]$ such that for every real a , $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathfrak{M}$, show that f is measurable. نمره ۲.۰۰

2- Suppose X is a locally compact, σ -compact Hausdorff space. If m and μ are as described in the statement of Riesz Representation theorem, prove that then if $E \in m$ and $\epsilon > 0$, there is a closed set F and an open set V such that $F \subset E \subset V$ and $\mu(V - F) < \epsilon$. نمره ۲.۰۰

3- Suppose μ be every positive measure. prove that $L^\infty(\mu)$ is a complete metric space. نمره ۲.۰۰

4- Suppose that $f \in L^1(T)$, a function $\hat{f}$ on Z defined by
$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-in t} dt \quad (n \in Z)$$
 prove that then $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \hat{f}(n) = 0$ نمره ۲.۰۰

5-a) Define the "inner product spaces" and "Hilbert space".
b) Give an example of an inner product space but is not a Hilbert space. نمره ۲.۰۰

6- Suppose $\mu(\Omega) = 1$, and suppose f and g are positive measurable function on Ω such that $fg \geq 1$. Prove that $\int_{\Omega} f d\mu \cdot \int_{\Omega} g d\mu \geq 1$. نمره ۲.۰۰

7- Suppose $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ is measurable for $n = 1, 2, 3, \dots$ and $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots \geq 0$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ as $n \rightarrow \infty$, for every $x \in X$, and $f_1 \in L^p(\mu)$. Prove that then
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$
 نمره ۲.۰۰

تعداد سوالات : تستی : ۰ تشریحی : ۷ زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۰ تشریحی : ۱۲۰ سری سوال : یک ۱

عنوان درس : آنالیز حقیقی ۱

رشته تحصیلی / کد درس : ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق

در عملیات) ۱۱۱۱۱۷۹

1- If Ω is any collection of subsets of X , there exists a smallest σ -algebra Ψ^* in X such that $\Omega \subset \Psi^*$. نمره ۲.۰۰

2- Suppose $V_1, \dots, V_n$ are subsets of a locally compact Hausdorff space X , K is compact, and $K \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$. نمره ۲.۰۰

Then there exist functions $h_i \prec V_i (i = 1, \dots, n)$ such that $h_1(x) + \dots + h_n(x) = 1$ ($x \in K$).

3- Let S be the class of all complex, measurable, simple functions on X such that $\mu(\{x : S(x) \neq 0\}) < \infty$. نمره ۲.۰۰

If $1 \leq p < \infty$, then show that S is dense in $L^p(\mu)$.

4- prove that Every nonempty, closed, convex set E in a Hilbert space H contains a unique element of smallest norm. نمره ۲.۰۰

5- For a linear transformation Λ of a normed linear space X into a normed linear space Y , each of the following three conditions implies the other two: نمره ۲.۰۰

- (a) Λ is bounded.
- (b) Λ is continuous.
- (c) Λ is continuous at one point of X .

6- Suppose f is a complex measurable function on X , μ is a positive measure on X , and $\int_X |f|^p d\mu = \|f\|_p^p$, and $\mu(X) = 1$. Prove that if $0 < r < s < \infty$ then $\|f\|_r \leq \|f\|_s$. نمره ۲.۰۰

7- Prove that every unit open ball is convex in every normed linear space. نمره ۲.۰۰

تعداد سوالات: تستی: ۰۰ تشریحی: ۷ زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۰۰ تشریحی: ۱۲۰ سری سوال: یک ۱

عنوان درس: آنالیز حقیقی (آموزش محور)، آنالیز حقیقی ۱

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (ارشد)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی

کاربردی (تحقیق در عملیات) ۱۱۱۱۷۹ - آموزش ریاضی ۱۱۱۴۵۶

1- Let C be the space of all continuous functions on $[0,1]$, with the supremum norm. Let M

نمره ۲.۰۰

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = 1$$

consist of all $f \in C$ for which

Prove that M is a closed convex subset of C .

2- If $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ is measurable, for each positive integer n , then prove that

نمره ۲.۰۰

$$\int_X (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

3- Suppose X is a locally compact Hausdorff space. V is open and K is compact subset of V .

نمره ۲.۰۰

Then there exists an $f \in C_c(X)$ such that $K \prec f \prec V$.

4- If X is a locally compact Hausdorff space, then $C_0(X)$ is the completion of $C_c(X)$

نمره ۲.۰۰

relative to the metric defined by the supremum norm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

5- a) Let μ be a positive measure on a σ -algebra m in a set Ω , so that $\mu(\Omega) = 1$, if f is a real function in $L^1(\mu)$, if $a < f(x) < b$ for all $x \in \Omega$, and if ϕ is convex on (a, b) , then prove that

نمره ۲.۰۰

$$\phi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} (\phi \circ f) d\mu$$

b) Suppose ϕ is a real function on R^1 such that

$$\phi\left(\int_0^1 f(x) dx\right) \leq \int_0^1 \phi(f) dx$$

for every real bounded measurable function f . prove that ϕ is then convex.

6- The Riesz-Fischer Theorem. Let $\{u_\alpha; \alpha \in A\}$ be an orthonormal set in H . Suppose

نمره ۲.۰۰

$\varphi \in l^2(A)$. Then $\varphi = \hat{x}$ for some $x \in H$.

7- If M is a subspace of a normed linear space X and if f is a bounded linear functional on M ,

نمره ۲.۰۰

then f can be extended to a bounded linear functional F on X so that $\|F\| = \|f\|$.

تعداد سوالات : تستی : ۰ تشریحی : ۷ زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۰ تشریحی : ۱۲۰ سری سوال : یک ۱

عنوان درس : آنالیز حقیقی ۱

رشته تحصیلی / کد درس : ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی

محض (جبر) ۱۱۱۱۱۷۹

1- Let $\{f_n\}$ be a sequence of measurable functions on X , and suppose that نمره ۲.۰۰

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$ for every $x \in X$,

(b) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ as $n \rightarrow \infty$, for every $x \in X$.

Prove that f is measurable, and $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ as $n \rightarrow \infty$.

2- Let X be a locally compact Hausdorff space in which every open set is نمره ۲.۰۰

σ -compact. Let λ be any positive Borel measure on X such that $\lambda(K) < \infty$ for every compact set K . Prove that λ is regular.

3- Let S be the class of all complex, measurable, simple functions s on X such that نمره ۲.۰۰

$\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$.

If $1 \leq p < \infty$, prove that S is dense in $L^p(\mu)$.

4- Suppose that نمره ۲.۰۰

(a) X and Y are metric spaces, X is complete,

(b) $f : X \rightarrow Y$ is continuous,

(c) X has a dense subset X_0 , such that, f is an isometry on X_0 , and

(d) $f(X_0)$ is dense in Y .

Prove that f is an isometry of X onto Y .

5- If X and Y are Banach spaces and if Λ is a bounded linear transformation of X نمره ۲.۰۰

onto Y which is also one-to-one, prove that there is a $\delta > 0$ such that

$\|\Lambda x\| \geq \delta \|x\|$ ($x \in X$).

6- If $\{f_n\}$ is a sequence of continuous functions on $[0,1]$ such that $0 \leq f_n \leq 1$ and نمره ۲.۰۰

$f_n(x) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, for all $x \in [0,1]$, prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$.

7- Suppose $f_n \in L^p(\mu)$, for $n = 1, 2, 3, \dots$, and $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ and $f_n \rightarrow g$ a.e., as $n \rightarrow \infty$. نمره ۲.۰۰

What relations exists between f and g ?

تعداد سوالات : تستی : ۰ تشریحی : ۷ زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۰ تشریحی : ۱۲۰ سری سوال : یک ۱

عنوان درس : آنالیز حقیقی ۱

رشته تحصیلی / کد درس : ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق

در عملیات) ۱۱۱۱۷۹

1- Let (X, m, μ) be a measurable space and $f : X \rightarrow [0, \infty]$ is a measurable, $E \in m$ and $\int_E f d\mu = 0$. Then $f = 0$ a.e. on E . نمره ۳.۱۱

2- Suppose $f \in L^1(\eta)$, f is real-valued, and $\epsilon > 0$. Then there exist functions u and v on X such that $u \leq f \leq v$, u is upper semicontinuous and bounded above, v is lower semicontinuous and bounded below, and $\int_X (v - u) d\eta < \epsilon$. نمره ۳.۱۱

3-State and prove Fatou's lemma. نمره ۱.۵۶

4- Let M be a closed subspace of a Hilber space H . نمره ۱.۵۶

(a) Every $x \in H$ has then a unique decomposition $x = Px + Qx$ into a sum of $Px \in M$ and $Qx \in M^\perp$.

(b) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.

5- Let S be the class of all complex, measurable, simple functions on X such that $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$. نمره ۱.۵۶

If $1 \leq p < \infty$, then S is dense in $L^p(\mu)$.

6- Suppose that (X, m, η) be a measure space and $\Omega \in m$, such that $\mu(\Omega) = 1$. Let f and $g \in L^2(\eta)$ be positive functions on Ω such that $(\int_\Omega f d\eta)(\int_\Omega g d\eta) \geq 1$. نمره ۱.۵۶

$fg \geq 1$. Prove that $\int_\Omega f d\eta \geq 1$.

7- Let (X, m, μ) be a measure space and $f \in L^1(\mu)$. Then $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ have نمره ۱.۵۴

σ -finite measure.



مجاز است.

استفاده از:

بارم هر سوال ۲ نمره است

1. Let s and t be two nonnegative measurable simple functions on X , where $(X, \mathcal{m}, \mu)$ is a measure space. Show that :

(i) Show that the following function, φ , is a measure on $\mathcal{m}$:

$$\varphi(E) = \int_E s d\mu, \forall E \in \mathcal{m}$$

(ii)
$$\int_X (s + t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

Also show that, if f_1 and f_2 are non-negative measurable functions, then

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

2. Define an upper semicontinuous function and show that if f_1 and f_2 are two non-negative real valued functions on $\mathbb{R}$ and both are upper semicontinuous, then $f_1 + f_2$ is an upper semicontinuous function.

3. Write the Minkowski's inequality and then prove it.

4. Let $p > 0$ and $f \in L^p(\mu)$ ($f \geq 0$), where X is a measure space with the positive measure μ .

Let for all $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \min\{f, n\}$. Show that $f_n \in L^p(\mu)$ and $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\mu)$.

5. Let L be a continuous linear functional on the Hilbert space H and $M = \{x \in H \mid Lx = 0\}$.

Prove that, if $M \neq H$ then $M^\perp$ is a vector space of dimension 1.



مجاز است.

استفاده از:

6. Let L is a continuous functional on the Hilbert space H . Prove that there exists a unique element $y \in H$ such that $Lx = (x, y)$ ($\forall x \in H$).

7. Calculate the following integrals:

(i) $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-[x]} dx$ ($[x]$ is the integer part of x)

(ii) $\int_{[0,1]} \chi_Q(x) dx$ (χ is the characteristic function On the rational numbers Q .)

نام درس : آنالیز حقیقی ۱
رشته تحصیلی / کد درس : ریاضی (آنالیز عددی - تحقیق در عملیات - آنالیز جبر - هندسه) (۱۱_۱۱_۱۷۹)
آزمون: نیمسال تابستان ۹۰
تعداد سوالات : تستی: + تشریحی: ۷
زمان آزمون (دقیقه): تستی: + تشریحی: ۱۰۵
کد سری سوال: یک - ۱

بارم هر سوال ۲ نمره است

۱. الف) مطلوبست تعریف انتگرال لبگ یک تابع مثبت اندازه پذیر

ب) نشان دهید اگر $X = \mathbb{N}$ و μ اندازه شمارشی روی X و $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ آنگاه

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

۲. الف) قضیه نمایش ریس را بیان کنید.

ب) ثابت کنید اندازه صادق در شرایط قضیه نمایش ریس یکتاست.

۳. فرض کنید f یک تابع مختلط و اندازه پذیر بر X بوده و A یک مجموعه انداز پذیر با $\mu(A) < \infty$ و $f(x) = 0$ اگر $x \notin A$ و همواره $|f| \leq 1$.

ثابت کنید دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ وجود دارد به طوری که $g_n \in C_c(X)$ و $|g_n| \leq 1$ و

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \quad (\text{ت. ه.})$$

۴. فرض کنید M زیر فضای بسته‌ای از فضای هیلبرت H باشد ثابت کنید:

الف) هر $x \in H$ تجزیه منحصر به فردی مانند $x = P_x + Q_x$ دارد که $P_x \in M$ و $Q_x \in M^\perp$.

ب) P_x و Q_x به ترتیب نزدیکترین نقاط M و $M^\perp$ به x می باشند

۵. فرض کنید $L: H \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی خطی و پیوسته بر فضای هیلبرت H باشد و $M = \{x: Lx = 0\}$ نشان دهید یا $M = H$ یا $M^\perp$ یک فضای برداری از

بعد یک است.

۶. الف) قضیه نگاشت باز را بیان کنید.

ب) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ بوده و Λ یک تبدیل خطی کراندار یک به یک از X بروی Y باشد در اینصورت ثابت کنید $\delta > 0$ وجود دارد به طوری

$$\|\Lambda x\| \geq \delta \|x\| \quad (x \in X)$$

۷. الف) نامساوی هولدر و مینکوفسکی را بنویسید.

ب) فرض کنید $\mu(\Omega) = 1$ و f و g توابع اندازه پذیر مثبتی بر Ω باشند به طوری که $fg \geq 1$. ثابت کنید $\int_\Omega f d\mu \int_\Omega g d\mu \geq 1$