دانشجوی گرامی

هدف از تدوین این مجموعه بررسی نکات مهم سوالات آمار رشته برق و کامپیوتر در سال‌های اخیر بوده است به‌جز فصل اول که در قالب سوالات چهارگزینه‌ای مورد بررسی قرار گرفته بقیه فصول شامل تحلیل نکات و بررسی سوالات چهارگزینه‌ای است.

دانشجویان رشته برق: فصل ۱ تا ۴

دانشجویان رشته کامپیوتر: فصل ۱ تا ۵

امید است این مجموعه بتواند کمکی در جهت موفقیت شما در آزمون کارشناسی ارشد باشد.

مولف

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیماندهٔ خود را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

رشته: کامپیوتر		درس: آمار و احتمال						
ردیف	مبحث	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع	نسبت
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	۵ سال	از کل
1	آنالیز ترکیبی و احتمال	1	1	1	1	2	6	22%
2	متغیرهای تصادفی	1	1	0	0	0	2	7%
3	متغیرهای تصادفی توام	0	0	0	0	0	0	0%
4	توزیع گسسته و پیوسته	2	1	2	1	0	6	22%
5	توزیع های نمونه ای، برآورد و آزمون	2	3	2	3	3	13	48%
جمع		6	6	5	5	5	27	100%

فصل اول

آنالیز ترکیبی و احتمال

روابط احتمالاتی

۱. فرض کنید A و B دو پیشامد تصادفی مستقل باشند به قسمی که احتمال وقوع همزمان آن‌ها $\frac{1}{6}$ و احتمال اینکه هیچ‌یک رخ ندهد $\frac{1}{3}$ باشد. در این صورت: (برق ـ سراسری ۷۴)

۱) $P(A)=\frac{1}{2} \ , \ P(B)=\frac{1}{3}$

۲) $P(A)=\frac{1}{3} \ , \ P(B)=\frac{1}{2}$

۳) $P(A)\neq P(B)$

۴) $P(A)=P(B)$

حل:گزینه ۳ درست است.

یادآوری: هرگاه A و B مستقل باشند A' و B' نیز مستقل هستند.

همزمان رخ دهند. $\rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6} \xrightarrow{\text{مستقل } B\,,\,A} P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{6} \quad (I)$

هیچ‌یک رخ ندهند. $\rightarrow P(A'\cap B')=\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{مستقل } B'\,,\,A'} P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\frac{1}{3}$

$$\rightarrow (1-P(A))(1-P(B))=\frac{1}{3}\rightarrow 1-P(A)-P(B)+\underbrace{\cancel{P(A)P(B)}}_{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}\rightarrow P(A)+P(B)=\frac{5}{6} \quad (II)$$

یادداشت:

....

....

....

....

مقدار احتمال $P(A'\cap B')$ از طریق قانون دمورگان نیز به دست می‌آید:

یادآوری: قانون دمورگان $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i'\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'$

$$P(A'\cap B') = P(A\cup B)' = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B)+\underbrace{\cancel{P(A\cap B)}}_{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \to P(A)+P(B) = \frac{5}{6}$$

باتوجه به روابط (I) و (II) به این نتیجه می‌رسیم که حاصل‌ضرب دو احتمال، $\frac{1}{6}$ و حاصل‌جمع آن‌ها، $\frac{5}{6}$ است، پس احتمال یکی، $\frac{1}{2}$ و دیگری $\frac{1}{3}$ است. اما دقت کنید که مشخص نیست مقدار احتمال کدام‌یک $\frac{1}{3}$ و کدام‌یک $\frac{1}{2}$ است زیرا با حل دستگاه تشکیل شده از روابط (I) و (II) داریم:

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{3} \to P(B) = \frac{1}{3} \text{ یا } \frac{1}{2}$$

پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست هستند و گزینه ۳ درست است.

۲. اگر $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (برق ـ سراسری ۷۶)

۱) $P(A\cup B) < \frac{3}{8}$ ۲) $P(A\cup B) < \frac{3}{4}$ ۳) $P(A\cup B) \le \frac{3}{4}$ ۴) $P(A\cup B) \ge \frac{3}{4}$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$P(A\cap B) \le \begin{cases} P(A) \\ P(B) \end{cases} \le P(A\cup B) \le P(A)+P(B) \to \frac{3}{4} \le P(A\cup B) \le \frac{6}{4}$$

۳. اگر $P(A) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{3}{8}$ باشد کدام‌یک از گزاره‌های زیر در رابطه با $P(A\cup B)$ صحیح است؟

(کامپیوتر ـ سراسری ۷۶)

۱) $P(A\cup B) = \frac{3}{8}$ ۲) $P(A\cup B) \le \frac{3}{4}$

۳) $P(A\cup B) \ge \frac{3}{4}$ ۴) اطلاعات داده‌شده برای اظهارنظر در مورد $P(A\cup B)$ کافی نیست.

حل:گزینه ۳ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

$$P(A\cap B) \le \begin{cases} P(A) \\ P(B) \end{cases} \le P(A\cup B) \le P(A)+P(B)$$

$$\begin{cases} P(A\cup B) \ge \frac{3}{4} \\ P(A\cup B) \ge \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow P(A\cup B) \ge \frac{3}{4}$$

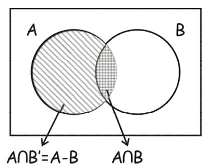
$$\begin{cases} P(A\cup B) \ge \frac{3}{4} \\ P(A\cup B) \le \frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4} \le P(A\cup B) \le \frac{9}{8}$$

۴. فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای Ω هستند به طوری که $P(A)=0.2$, $P(B)=0.4$ و $P(A\cap B)=0.06$ است؛ در این صورت $P(A\cap \overline{B})$ کدام است؟(کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) 0.1 ۲) 0.12 ۳) 0.14 ۴) 0.17

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.2-0.06=0.14 \\ P(A)=0.2\ ,\ P(A\cap B)=0.06 \end{cases}$$

۵. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند. احتمال اینکه هیچ‌کدام اتفاق نیفتند برابر با a و احتمال اینکه B اتفاق افتد برابر با b باشد. آن‌گاه احتمال اینکه A اتفاق افتد کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $P(A)=\frac{a}{1-b}$ ۲) $P(A)=\frac{b-a}{1-b}$

۳) $P(A)=\frac{a-b}{1-b}$ ۴) $P(A)=\frac{1-b-a}{1-b}$

حل:گزینه ۴ درست است.

P(هیچ یک از پیشامدهای A و B اتفاق نیفتد) = P(نه A و نه B) = $P(A'\cap B')=a$

$P(B)=b \quad , \quad P(A)=?$

راه حل اول:

یادآوری: هرگاه A و B مستقل باشند، B',A' نیز مستقل‌اند.

$$P(A'\cap B')=P(A').P(B')=P(A')(1-P(B))=P(A')(1-b)=a$$

$$\rightarrow P(A')=\frac{a}{1-b} \rightarrow P(A)=1-\frac{a}{1-b}=\frac{1-b-a}{1-b}$$

یادداشت:

راه حل دوم:

یادآوری: قانون دمورگان $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A'_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A)P(B)\right) = a$$

$$\rightarrow \quad P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 1 - a \quad \rightarrow \quad P(A) + b - P(A)b = 1 - a$$

$$\rightarrow \quad P(A)(1-b) = 1 - a - b \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{1-a-b}{1-b}$$

۶. احتمال اینکه دو فرد به نام‌های A و B بیست سال دیگر زنده بمانند به‌ترتیب برابر است با: 0.8 و 0.9، احتمال اینکه در طول بیست سال حداقل یک نفر از این دو زنده بماند، چقدر است؟(کامپیوتر ـ آزاد ۸۲)

۱) 0.7 ۲) 0.72 ۳) 0.02 ۴) 0.98

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} P(A \text{ زنده ماندن}) = 0.8 \\ P(B \text{ زنده ماندن}) = 0.9 \end{cases}$$

راه حل اول:

$$P(\text{حداقل یک نفر زنده بماند}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.9 - (0.8 \times 0.9) = 0.98$$

چون زنده ماندن هر فرد مستقل از دیگری است داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

راه حل دوم:

$$P(\text{حداقل یک نفر زنده بماند}) = 1 - P(\text{هیچ‌کدام زنده نمانند}) = 1 - (1-0.8)(1-0.9) = 1 - (0.2)(0.1) = 0.98$$

استقلال پیشامدها

۷. اتومبیل I در جاده ناگهان توقف می‌کند و اتومبیل II از عقب به آن برخورد می‌نماید درحالی‌که ناظران A، B و C شاهد آن‌ها هستند. اگر احتمال اینکه این ناظران به درستی رویداد را ملاحظه و گواهی کرده باشند به ترتیب برابر 0.9، 0.8 و 0.7 باشد، آن‌گاه احتمال اینکه لااقل دو شاهد رویداد را صحیح گواهی نمایند برابر کدام است؟

(برق ـ سراسری ۸۶)

۱) 0.892 ۲) 0.902 ۳) 0.908 ۴) 0.994

حل:گزینه ۲ درست است.

$$P(\text{حداقل 2 نفر گواهی درست دهند}) = P(\text{2 نفر گواهی درست دهند}) + P(\text{هر 3 نفر گواهی درست دهند}) = 0.504 + 0.398 = 0.902$$

یادداشت:

....

....

....

....

با توجه به اینکه هر یک از ناظران مستقل از یکدیگر رویداد را ملاحظه می‌کنند، داریم:

$$\begin{cases} P(\text{2 نفر گواهی درست دهند.}) = P(A\cap B\cap C') + P(A\cap B'\cap C) + P(A'\cap B\cap C) \\ = 0.216+0.126+0.056=0.398 \quad = 0.9\times 0.8\times 0.3 + 0.9\times 0.2\times 0.7 + 0.1\times 0.8\times 0.7 \\ P(\text{هر 3 نفر گواهی درست دهند}) = P(A\cap B\cap C) = 0.9\times 0.8\times 0.7 = 0.504 \\ P(A)=0.9 \quad P(B)=0.8 \quad P(C)=0.7 \end{cases}$$

۸ . فرض کنید در ارسال اطلاعات بین دو کامپیوتر، بسته‌های اطلاعاتی ارسالی 4 بیتی بوده و احتمال خطا در هر بیت آن $\frac{1}{3}$ و مستقل از هم باشند. احتمال اینکه بسته‌ای را صحیح دریافت کنیم برابر است با:(کامپیوتر ـ آزاد ۸۶)

۱) 0.2　　۲) 0.3　　۳) 0.6　　۴) 0.5

حل:گزینه ۱ درست است.

$$P(\text{سالم بودن بسته}) = P(\text{درست بودن هر 4 بیت}) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} = 0.197 \simeq 0.2$$

دقت کنید که چون احتمال خطا در هر بیت $\frac{1}{3}$ است، احتمال درست بودن هر بیت $\frac{2}{3}$ خواهد بود و چون احتمال خطا در هر بیت مستقل است، احتمال درست بودن 4 بیت به دلیل استقلال برابر با ضرب احتمال درست بودن هر یک از 4 بیت خواهد بود؛ یعنی $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

۹ . ظرفی حاوی سه گوی قرمز، دو گوی سفید و یک گوی آبی است. ظرف دیگری حاوی یک گوی قرمز دو گوی سفید و سه گوی آبی است. اگر از هر ظرف یک گوی انتخاب کنیم احتمال اینکه دو گوی انتخابی، همرنگ باشند، چقدر است؟(علوم کامپیوتر ـ ۸۴)

۱) $\left(\frac{1}{11}\right)^3$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $\frac{3}{11}$　　۴) $\frac{5}{18}$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$P(\text{دو گوی همرنگ}) = P(\text{هر دو قرمز}) + P(\text{هر دو سفید}) + P(\text{هر دو آبی})$$

$$= \frac{3}{3+2+1}\times\frac{1}{1+2+3} + \frac{2}{3+2+1}\times\frac{2}{1+2+3} + \frac{1}{3+2+1}\times\frac{3}{1+2+3} = \frac{3}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\times\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{3}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

احتمال کلاسیک

۱۰ . ظرفی شامل 52 توپ شماره‌گذاری‌شده از 1 تا 52 است. توپ‌ها را یکی یکی استخراج و بین چهار بازیکن $j=1,2,3,4$ توزیع می‌کنیم. به این ترتیب که توپ‌های شماره $4k+j$، که در آن $k=0,1,2,....,12$ مراحل توزیع را مشخص می‌کند و به بازیکن j ام داده می‌شود. اگر توپ‌های 1, 41,31,11 به عنوان توپ‌های بخت خوب (خوش یمن) در نظر گرفته شده باشند، احتمال اینکه هر بازیکن یک توپ بخت خوب را به چنگ آورد چیست؟

(برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{(13)^3}{17\times 25\times 49\times 4}$　　۲) $\frac{(13)^3}{17\times 25\times 49}$　　۳) $\frac{(13)^3}{17\times 50\times 49\times 4}$　　۴) $\frac{(13)^3}{51\times 50\times 49\times 4}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

یادآوری: اگر بخواهیم n شیء متمایز را بین k نفر تقسیم کنیم به طوری که به فرد اول n_1 شیء متمایز، به فرد دوم n_2 شیء متمایز، ... و به فرد kام، n_k شیء متمایز برسد، داریم:

$$\binom{n}{n_1\, n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad ; \qquad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

$$n(S) = \text{کل تعداد حالات توزیع 52 توپ بین 4 نفر} = \frac{52!}{13!\ 13!\ 13!\ 13!}$$

$$n(A) = \text{تعداد حالات مساعد برای توزیع توپها} = \underbrace{\frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!}}_{\text{تعداد حالات توزیع توپهای خوش‌یمن}} \times \underbrace{\frac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}}_{\text{تعداد حالات توزیع 48 توپ معمولی باقی‌مانده}}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times \dfrac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}}{\dfrac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}} = \frac{(13)^3}{17 \times 25 \times 49}$$

وقتی می‌گوید که توپ‌های شماره $4k+j$ ، $k = 0,1,2,\ldots,12$ ، به بازیکن jام می‌رسد یعنی توپها یکی یکی بین بازیکنان توزیع می‌شوند و درواقع به هر بازیکن به تعداد مساوی توپ می‌رسد. پس ابتدا 4 توپ خوش‌یمن را به صورت مساوی بین 4 نفر تقسیم می‌کنیم (!4) و سپس 48 توپ باقی‌مانده را نیز به صورت مساوی بین 4 نفر تقسیم می‌کنیم. لازم به ذکر است که در کل 52 توپ را به صورت مساوی بین 4 نفر تقسیم کرده‌ایم.

$$\begin{matrix} 4k + j \\ k = 0,1,2,\ldots 12 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} j=1 & \to & 4k+1 & \to & 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & \ldots & 49 \\ j=2 & \to & 4k+2 & \to & 2 & 6 & 10 & 14 & 18 & \ldots & 50 \\ j=3 & \to & 4k+3 & \to & 3 & 7 & 11 & 15 & 19 & \ldots & 51 \\ j=4 & \to & 4k+4 & \to & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & \ldots & 52 \end{matrix}$$

پس به هر بازیکن 13 توپ می‌رسد.

۱۱ . کیسه‌ای شامل 10 گلوله با شماره‌های 0,1,2,.... تا 9 است. گلوله‌ای را به طور تصادفی انتخاب کرده و شماره آن را بررسی می‌کنیم. احتمال آنکه شماره گلوله فرد بوده و مضرب 3 نیز باشد، چقدر است؟(برق ــ سراسری ۸۳)

۱) 0.15 ۲) 0.8 ۳) 0.2 ۴) 0.4

یادداشت:

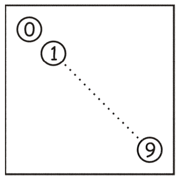
....

....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.



$n(S) =$ تعداد کل حالات انتخاب یک گلوله $= \{0,1,2,...,9\} = 10$

$B =$ شماره گلوله فرد $= \{1,3,5,7,9\}$

$C =$ شماره گلوله مضرب 3 $= \{3,6,9\}$

$n(A) =$ شماره گلوله فرد و مضرب 3 $= B \cap C = \{3,9\} = 2$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{10} = 0.2$

۱۲. پنج دانشجوی رشته برق سه دانشجوی رشته کامپیوتر و دو دانشجوی رشته شیمی به تصادف روی 10 صندلی که در یک ردیف قرار دارند می‌نشینند. احتمال آنکه تمام دانشجویان هم‌رشته کنار هم باشند چیست؟

(کامپیوتر ــ سراسری ۷۹ و آزاد ۸۸)

۱) $\frac{1}{210}$ ۲) $\frac{1}{252}$ ۳) $\frac{1}{330}$ ۴) $\frac{1}{420}$

حل:گزینه ۴ درست است.

یادآوری: جایگشت n نفر در یک ردیف برابر $n!$ است.

$$P(A) = \frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکن}} = \frac{5!\,3!\,2!\,3!}{10!} = \frac{1}{420}$$

حالات ممکن: تعداد کل حالات نشستن 10 نفر در یک ردیف $10!$ است.

حالات مساعد:

✓ 5 دانشجوی برق به $5!$ حالت می‌توانند کنار یکدیگر بنشینند.

✓ 3 دانشجوی کامپیوتر به $3!$ حالت می‌توانند کنار یکدیگر بنشینند.

✓ 2 دانشجوی شیمی به $2!$ حالت می‌توانند کنار یکدیگر بنشینند.

✓ دانشجویان هم‌رشته را مثل یک گروه مجزا در نظر می‌گیریم درنتیجه این 3 گروه (برق، کامپیوتر، شیمی) نیز به $3!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.

۱۳. عددی به تصادف از فاصله $(0,1)$ انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که رقم دوم اعشار آن 5 باشد؟

(علوم کامپیوتر ــ ۸۵)

۱) 0.01 ۲) 0.07 ۳) 0.10 ۴) 0.50

حل:گزینه ۳ درست است.

دقت کنید که هر رقم اعشار می‌تواند از 0 تا 9 باشد؛ بنابراین در حالت کلی 10 انتخاب برای هر رقم اعشار وجود خواهد داشت:

حالات ممکن $= 10 \times 10 = 100$

یادداشت:

....

....

....

....

حال می‌خواهیم رقم دوم اعشار عدد 5 باشد؛ بنابراین عدد 5 را در آن قرار داده و تنها یک انتخاب برای آن خواهیم داشت. اما برای رقم اول همان 10 انتخاب را می‌توانیم داشته باشیم؛ بنابراین:

ارقام اعشار	دوم اول
تعداد حالات مساعد	$= \boxed{10}\times\overset{5}{\boxed{1}} = 10$

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکن}} = \frac{10}{100} = 0.1$$

احتمال با جایگذاری و بدون جایگذاری

۱۴. 12 **جفت‌کفش مختلف در یک کیسه وجود دارد.** 8 **لنگه کفش را به طور تصادفی بیرون می‌کشیم. احتمال آنکه لااقل یک جفت کفش با هم جور باشد، چیست؟ (برق ــ سراسری ۷۶)**

۱) $1-\dfrac{\binom{12}{8}}{\binom{24}{8}}$ ۲) $1-\dfrac{\binom{12}{8}2^8}{\binom{24}{8}}$ ۳) $1-\dfrac{\binom{12}{8}}{\binom{24}{8}2^8}$ ۴) هیچ‌کدام

حل:گزینه ۲ درست است.

$$P(\text{حداقل یک جفت کفش جور}) = 1 - P(\text{هیچ جفت کفشی جور نباشد}) = 1 - \frac{\binom{12}{8}2^8}{\binom{24}{8}}$$

کل حالات:

$$n(S): (\text{تعداد کل حالات انتخاب 8 لنگه کفش از بین 12 جفت کفش (24 لنگه)}) = \binom{24}{8}$$

حالات مساعد: برای محاسبه تعداد حالات مساعد (هیچ جفت جور)، ابتدا 8 جفت از 12 جفت کفش را انتخاب می‌کنیم $\binom{12}{8}$ سپس از هر جفت یک لنگه بر می‌داریم تا هیچ دو لنگه‌ای جفت نباشند.

$$\binom{12}{8} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{جفت اول}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{جفت دوم}} \times \underbrace{\cdots}_{\cdots} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{جفت هشتم}} = \binom{12}{8}2^8$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۵. $n=10$ جعبه به ترتیب شامل یک مهره سفید و دو مهره سیاه است. از هر جعبه یک مهره به تصادف بیرون می‌کشیم احتمال اینکه حداقل یکی سفید باشد برابر است با: (برق ـ سراسری ۷۴)

۱) $\frac{3^{10}-2^{10}}{3^{10}}$ ۲) $1-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ ۳) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل:گزینه ۱ درست است.

$$P(\text{حداقل یکی از مهره‌های خارج‌شده سفید باشد}) = 1 - P(\text{همه مهره‌ها سیاه باشند})$$

$$= 1 - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\frac{2}{3}\right)}_{10\text{ تا}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 1 - \frac{2^{10}}{3^{10}} = \frac{3^{10}-2^{10}}{3^{10}}$$

توجه: احتمال خارج شدن مهره سیاه از هر جعبه، مستقل از دیگری و برابر $\frac{2}{3}$ است.

۱۶. n مهره را یکی یکی به طور تصادفی درون N ظرف $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N$ قرار می‌دهیم. احتمال اینکه در ظرف u_1، k مهره قرار بگیرد، چیست؟ (گنجایش ظرف‌ها محدودیتی ندارد.)(برق ـ سراسری۷۷)

۱) $\frac{(N-1)^{n-k}}{N^n}$ ۲) $\frac{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}{N^n}$

۳) $\frac{\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}$ ۴) $\frac{\binom{n}{k}\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}$

حل:گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم که تعداد کل حالات توزیع n مهره متمایز در N ظرف متمایز با فرض عدم محدودیت گنجایش ظرف‌ها N^n است. حال برای تعداد حالات مساعد به تعداد k مهره از مهره را انتخاب کرده $\binom{n}{k}$ و در ظرف U_1 قرار می‌دهیم. در ادامه $(n-k)$ مهره باقی‌مانده را در $N-1$ ظرف قرار می‌دهیم. در این حالت نیز چون گنجایش ظرف‌ها محدودیتی ندارد، با $(N-1)^{n-k}$ حالت، توزیع صورت خواهد گرفت (دقت کنید در پیش‌فرض، مهره‌ها و جعبه‌ها را متمایز در نظر گرفته‌ایم).

$$P(A) = \frac{\text{حالات مساعد}}{\text{کل حالات}} = \frac{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}{N^n}$$

۱۷. ظرفی حاوی 10 توپ سفید و 10 توپ سیاه است. هر بار 2 توپ به تصادف و بدون جایگذاری از ظرف بیرون می‌آوریم تا زمانی که همه توپ‌ها بیرون آورده شوند. احتمال آنکه در هر مرحله یک توپ سفید و یک توپ سیاه بیرون آورده شود کدام است؟

(برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{(10!)^2}{20!}$ ۲) $\frac{2^{10}(10!)^2}{20!}$ ۳) $\frac{2^{10}(10!)}{20!}$ ۴) $\frac{(10!)^2}{2^{10}(20)!}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

$$P=\frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}}\times\frac{\binom{9}{1}\binom{9}{1}}{\binom{18}{2}}\times\ldots\times\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{2}{2}}=\frac{10^2}{\frac{20\times19}{2}}\times\frac{9^2}{\frac{18\times17}{2}}\times\ldots\times\frac{1^2}{\frac{2\times1}{2}}=\frac{(10!)^2}{\frac{20!}{2^{10}}}=\frac{2^{10}(10!)^2}{20!}$$

در مرحله اول 1 توپ از 10 توپ سفید $\binom{10}{1}$ و 1 توپ از 10 توپ سیاه خارج می‌کنیم $\binom{10}{1}$ و در کل 2 توپ از 20 توپ $\binom{10}{2}$؛ در مرحله دوم 1 توپ از 9 توپ سفید باقی‌مانده در ظرف $\binom{9}{1}$ و 1 توپ از 9 توپ سیاه باقی‌مانده $\binom{9}{1}$ خارج می‌کنیم و در کل 2 توپ از 18 توپ باقی‌مانده $\binom{18}{2}$ و به همین ترتیب تا مرحله آخر ادامه می‌دهیم. توجه کنید که چون انتخاب توپ بدون جایگذاری است و ترتیب خارج شدن توپ‌ها از ظرف اهمیتی ندارد از ترکیب استفاده می‌کنیم.

۱۸. از یک ظرف شامل M توپ که از یک تا M شماره‌گذاری شده n بار و هر بار یک توپ با جایگذاری استخراج کرده و سپس مجدداً در ظرف جایگزین نموده‌ایم. حساب کنید احتمال اینکه هیچ توپی دوبار از ظرف خارج نشده باشد.(کامپیوتر ــ سراسری ۷۴)

۱) $P=\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{2}{M}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{M}\right)$ ۲) $P=\frac{n}{M}$

۳) $P=\frac{(M-n)!}{M!}$ ۴) $P=\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{2}{M}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{M}\right)$

حل:گزینه ۱ درست است.

توجه کنید چون انتخاب با جایگذاری است در هر بار انتخاب تعداد حالات فضای نمونه برابر M است.

$$P(\text{هیچ توپی دو بار از ظرف خارج نشده باشد})=\frac{M}{M}\times\frac{M-1}{M}\times\frac{M-2}{M}\times\ldots\times\frac{M-(n-1)}{M}=1\times\left(1-\frac{1}{M}\right)\times\left(1-\frac{2}{M}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{(n-1)}{M}\right)$$

بار اول با احتمال $\frac{M}{M}$ یکی از M توپ انتخاب می‌شود. در انتخاب دوم، چون یکی از توپ‌ها قبلاً انتخاب شده است پس تعداد توپ‌هایی که می‌توانیم برای خارج شدن انتخاب کنیم برابر $M-1$ است که احتمال آن $\frac{M-1}{M}$ می‌شود. در انتخاب سوم نیز با توجه به اینکه در دو انتخاب قبل 2 توپ برداشته شده است پس $M-2$ توپ باقی‌مانده می‌توانند انتخاب شوند و احتمال آن $\frac{M-2}{M}$ است و بالاخره در بار nام (انتخاب nامین توپ)، چون در $n-1$ دفعه قبل، $n-1$ توپ انتخاب شده است پس تعداد توپ‌هایی که می‌توانیم برای خارج شدن انتخاب کنیم برابر است با $M-(n-1)$ که احتمال آن برابر با $\frac{M-(n-1)}{M}$ است.

یادداشت:

....

....

....

....

۱۹. از ظرفی شامل 4 مهره سفید و 2 مهره مشکی، مهره‌ها را یکی یکی، بدون جایگذاری و به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه دومین مهره مشکی در انتخاب چهارم به دست آید چقدر است؟

(کامپیوتر ـ سراسری ۷۸ و آزاد ۸۸)

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{3}{10}$ ۳) $\frac{4}{10}$ ۴) $\frac{1}{5}$

حل: گزینه ۴ درست است.

راه حل اول: دومین مهره مشکی در انتخاب چهارم باشد بدین معنی است که در سه انتخاب قبلی یک مهره مشکی و در انتخاب چهارم نیز دومین مهره مشکی به دست آمده است.

چهارم چهارم چهارم

$$P(\text{مشکی، سفید، سفید، مشکی}) + P(\text{سفید، مشکی، سفید، مشکی}) + P(\text{سفید، سفید، مشکی، مشکی})$$

$$=\left(\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

دقت کنید که چون انتخاب بدون جایگذاری است در هر بار انتخاب یک مهره از ظرف کم می‌شود.

راه حل دوم:

چون می‌خواهیم دومین مهره مشکی در انتخاب چهارم به دست آید پس در سه انتخاب قبلی 1 مهره مشکی و 2 مهره سفید حاصل شده است و برای انتخاب چهارم نیز چون 1 مهره مشکی و 2 مهره سفید در ظرف باقی‌مانده است با احتمال $\frac{1}{3}$ مهره مشکی انتخاب می‌شود؛ بنابراین چون در سه انتخاب اول ترتیب مهره‌ها مهم نیست می‌توانیم برای سه انتخاب اول از ترکیب استفاده کنیم.

$$P=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}\times\frac{1}{3}=\frac{2\times 6}{20}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

دقت کنید که در این حالت نمی‌توان از توزیع دوجمله‌ای منفی استفاده کرد، چون انتخاب بدون جایگذاری است احتمال موفقیت ثابت نیست و می‌دانیم که در توزیع‌های دوجمله‌ای، دوجمله‌ای منفی و هندسی باید احتمال موفقیت ثابت باشد. (انتخاب با جایگذاری)

۲۰. جعبه‌ای شامل 3 مهره آبی، 4 مهره بنفش و 5 مهره قرمز است. اگر دو مهره به طور تصادفی انتخاب کنیم (بدون جایگزینی)، احتمال همرنگ بودن مهره‌ها را حساب کنید. (کامپیوتر ـ آزاد ۸۴)

۱) 0.288 ۲) 0.310 ۳) 0.272 ۴) 0.324

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

راه حل اول:

احتمال همرنگ بودن مهره‌ها برابر این است که یا هر دو مهره آبی $\binom{3}{2}$، یا هر دو مهره بنفش $\binom{4}{2}$ و یا هر دو مهره قرمز $\binom{5}{2}$ باشند. در کل نیز، 2 مهره از بین 12 مهره انتخاب می‌کنیم $\binom{12}{2}$.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{3+6+10}{66}=\frac{19}{66}=0.288$$

راه حل دوم:

$$\text{احتمال مورد نظر}=\underbrace{\left(\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\right)}_{\text{2 مهره آبی}}+\underbrace{\left(\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\right)}_{\text{2 مهره بنفش}}+\underbrace{\left(\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\right)}_{\text{2 مهره قرمز}}=0.288$$

مدارهای سری و موازی

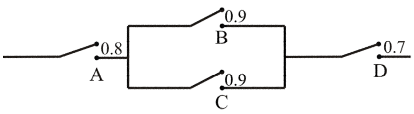
۲۱. احتمال کار کردن هر یک از قطعات مستقل A ،B ،C و D در یک سیستم الکتریکی به ترتیب 0.8، 0.9، 0.9 و 0.7 است. اگر برای کار کردن این سیستم، کار کردن قطعات A و D و یکی از قطعات B یا C الزامی باشد، احتمال کار کردن این سیستم برابر است با:

(برق ـ سراسری ۷۷)

۱) 0.5544 ۲) 0.5454 ۳) 0.4545 ۴) 0.4455

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به استقلال قطعات و صورت مسئله، شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.



$$P(\text{کارکردن سیستم})=P[(A \text{ و } D) \text{ و } (C \text{ یا } B)]=P\left[A\cap(B\cup C)\cap D\right]=P(A)\times P(B\cup C)\times P(D)=0.8\times0.99\times0.7=0.5544$$

$$\begin{cases} P(C \text{ یا } B)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=P(B)+P(C)-P(B)P(C)=0.9+0.9-0.9\times0.9=0.99 \\ \text{یا:} \quad P(C \text{ یا } B)=1-P(C \text{ نه و } B \text{ نه})=1-P(B'\cap C')=1-P(B')P(C')=1-0.1\times0.1=0.99 \end{cases}$$

یادآوری:

۱) همیشه «و» به معنی اشتراک و «یا» به معنی اجتماع دو پیشامد است.

۲) در صورتی که B و C مستقل باشند B' و C' نیز مستقل هستند.

یادداشت:

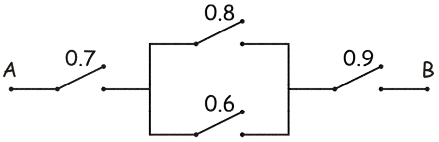
....

....

....

....

۲۲ . میان دو نقطه A و B ارتباط از طریق شبکه‌ای است که احتمال وصل بودن قطعات آن در شکل زیر نشان داده شده است. احتمال برقراری ارتباط میان نقاط A و B برابر است با:(کامپیوتر ـ سراسری ۷۷)

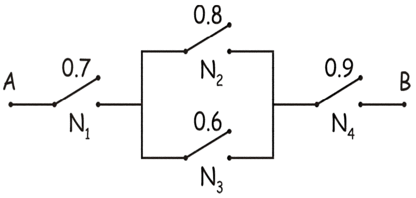


۱) 0.5796 ۲) 0.504

۳) 0.378 ۴) 0.882

حل:گزینه ۱ درست است.

اگر در این شکل 4 گره N_1 , N_2 , N_3 , N_4 را در نظر بگیریم، با توجه به اینکه وصل بودن یا قطع بودن هر گره مستقل از سایر گره‌هاست، به منظور برقراری جریان بین A و B، گره‌های N_1 و N_4 باید وصل باشند و از بین گره‌های N_2 و N_3 وصل بودن یکی کافی است (N_2 یا N_3):



$P(\text{وصل بودن سیستم}) = P[N_1 \text{ و } (N_3 \text{ یا } N_2) \text{ و } N_4] = P\left(N_1 \cap (N_2 \cup N_3) \cap N_4\right) = 0.7 \times 0.92 \times 0.9 = 0.5796$

$$\begin{cases} P\left(N_2 \cup N_3\right) = P\left(N_2\right) + P\left(N_3\right) - P\left(N_2 \cap N_3\right) = 0.8 + 0.6 - \left(0.8 \times 0.6\right) = 0.92 \\ P(\text{وصل باشند } N_3 , N_2 \text{ حداقل یکی از گره‌های}) = 1 - P(\text{هر دو قطع}) = 1 - (1-0.8)(1-0.6) = 0.92 \end{cases}$$

یا

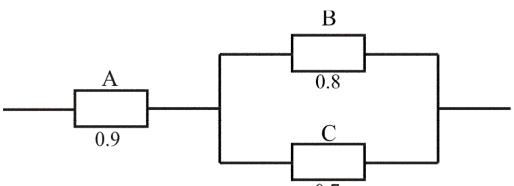
حرف اضافه «و» بین دو پیشامد یعنی «اشتراک» و حرف اضافه «یا» یعنی «اجتماع».

۲۳ . یک سیستم کامپیوتری دارای سه بخش A، B و C است. احتمال آنکه A، B و C هر یک بدون خرابی به مدت 100 ساعت کار کند به ترتیب 90%، 80% و 70% است. احتمال آنکه B و C هر دو به مدت 100 ساعت کار کنند 60% است. کارکرد بخش A مستقل از کارکرد بخش‌های B و C است. برای آنکه این سیستم کار کند باید بخش A و حداقل یکی از بخش‌های B و C کارکنند. در این صورت احتمال آنکه این سیستم بدون خرابی به مدت 100 ساعت کار کند برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) %68 ۲) %75 ۳) %81 ۴) %86

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به صورت مسئله می‌توان شکل سیستم را رسم کرد. در مسئله گفته شده برای کار کردن سیستم برقراری بخش A الزامی است و از بین B و C کار کردن یکی کافی است، یعنی:



$P(\text{کار کردن سیستم}) = P[A \text{ و } (C \text{ یا } B)] = P\left[A \cap (B \cup C)\right]$

یادداشت:

....

....

....

....

به دلیل اینکه کارکرد بخش A مستقل از کارکرد بخش‌های B و C است، داریم:

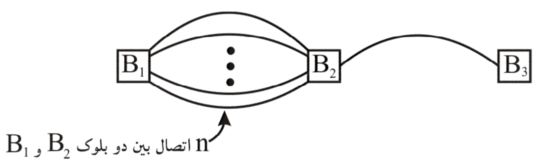
$$P\left[A\cap(B\cup C)\right]=P(A)\times P(B\cup C)=0.9\times0.9=0.81$$

$$\begin{cases}P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=0.8+0.7-0.6=0.9\\ P(B,C)=P(B\cap C)=0.6\ ,\ P(A)=0.9\end{cases}$$

دقت کنید که «و» به معنی اشتراک دو پیشامد، «یا» به معنی اجتماع آن دو است.

۲۴ . در شکل زیر اگر احتمال آزاد بودن هر خط برابر با p باشد،احتمال اتصال ارتباط بین B_1 و B_3 برابر است با:

(کامپیوتر ـ آزاد ۷۹)



۱) $p-(1-p)^{n-1}$

۲) $2p-\dfrac{p^{2n}}{n}$

۳) $2p-p^{n}$

۴) $\left[1-(1-p)^{n}\right]p$

حل:گزینه ۴ درست است.

برای اتصال بین B_1 و B_3 باید حداقل یکی از n مدار بین B_1 و B_2 متصل باشد و اتصال بین B_2 و B_3 نیز که مستقل از n اتصال بین B_1 و B_2 است، برقرار باشد؛ پس داریم:

P(اتصال بین B_1 و B_3) $=P$(اتصال حداقل یکی از n مدار بین B_1 و B_2) $\times P$(اتصال B_2 و B_3) $=\left[1-(1-p)^{n}\right]\times p$

P(اتصال حداقل یکی از n مدار بین B_1 و B_2) $=1-P$(متصل نبودن هیچ‌کدام از n مدار) $=1-(1-p)^{n}$

دقت کنید، هر اتصال با احتمال p وصل است و با احتمال $1-p$ وصل نیست؛ ضمناً n اتصال مستقل از یکدیگر هستند.

مسئله بازی‌ها

۲۵ . ظرفی شامل یک توپ قرمز و 3 توپ سیاه است. بازیکن‌های A و B به طور متوالی و هر دفعه یک توپ به تصادف از جعبه خارج می‌کنند تا زمانی که یک توپ قرمز انتخاب شود. اگر A بازی را شروع کند و انتخاب بدون جایگذاری باشد، احتمال برنده شدن A چقدر است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $\dfrac{4}{9}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{2}{9}$

حل:گزینه ۱ درست است.

P(برنده شدن A)

P(A دفعه اول توپ قرمز را خارج کند) $=\dfrac{1}{4}$

P(A در نوبت بعدی (دفعه سوم) توپ قرمز را خارج کند) $=A'B'A=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

یادداشت:

....

....

....

....

$P(A \text{ برنده شدن}) = P(\text{دفعه اول برنده شود}) + P(\text{دفعه سوم برنده شود}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

توجه کنید که چون انتخاب بدون جایگذاری است در هر بار انتخاب یک توپ از ظرف خارج خواهد شد پس هر بار از تعداد توپ‌ها یکی کم می‌شود. همچنین دقت کنید که چون 4 توپ در ظرف است اگر A در دفعه سوم هم توپ قرمز را خارج نکند (برنده نشود) دیگر امکان برنده شدن او وجود ندارد.

مسئله کلاسیک روز تولد

۲۶ . احتمال اینکه n نفر ($n \le 365$) که به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند روز تولد متفاوت داشته باشند چقدر است؟
(کامپیوتر ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{365}$
۳) $\frac{1}{365}(n-1)!$
۴) $\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$

حل:گزینه ۴ درست است.

با توجه به اینکه یک سال 365 روز است و تعداد این n نفر نیز کمتر از 365 است، داریم:

$$\frac{365}{365}\times\frac{365-1}{365}\times\frac{365-2}{365}\times\dots\times\frac{365-(n-1)}{365}=1\times\left(1-\frac{1}{365}\right)\times\left(1-\frac{2}{365}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$$

اولین نفر می‌تواند در هر روز از 365 روز متولد شده باشد. نفر دوم، به غیر از روز تولد نفر اول، $365-1$ روز باقی‌مانده می‌تواند روز تولدش باشد، نفر سوم نیز به غیر از روزهای تولد دو نفر قبل $365-2$ روز باقی‌مانده می‌تواند روز تولدش باشد و بالاخره نفر nام نیز به غیر از روزهای تولد $n-1$ نفر قبل، $365-(n-1)$ روز باقی‌مانده سال می‌تواند روز تولدش باشد.

احتمال شرطی

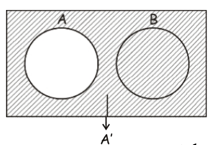
۲۷ . موشکی را برای زدن منطقه‌ای با هدف‌های A و B پرتاب می‌کنیم. اگر احتمال زدن هدف A برابر 0.4 و احتمال زدن B برابر 0.5 باشد و بدانیم که هدف A زده نشده باشد احتمال زدن B چقدر است؟

(برق ـ سراسری ۷۲)

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{5}{6}$
۳) $\frac{2}{6}$
۴) $\frac{3}{6}$

حل:گزینه ۲ درست است.

زدن هدف A ارتباطی با زدن هدف B ندارد؛ پس با توجه به ناسازگار بودن هدف‌های A و B داریم:



$$\begin{cases}P(A\cap B') = P(A)\\ P(B\cap A') = P(B)\end{cases}$$

یادداشت:

....
....
....
....

$$\begin{cases} P(\text{زده نشده } A \text{ وقتی } B \text{ زدن}) = P(B|A') = \dfrac{P(B\cap A')}{P(A')} = \dfrac{P(B)}{P(A')} = \dfrac{0.5}{0.6} = \dfrac{5}{6} \\ P(A) = 0.4 \quad \to \quad P(A') = 1 - 0.4 = 0.6 \, , P(B) = 0.5 \end{cases}$$

توجه: A و B مستقل نیستند (وابسته‌اند) چون می‌دانیم که هرگاه A و B ناسازگار باشند، وابسته نیز هستند. مستقل بودن یعنی وقوع یکی تأثیری در وقوع دیگری نداشته باشد ولی در اینجا مثلاً اگر A مورد هدف قرار گیرد، B دیگر نمی‌تواند مورد هدف قرار گیرد، پس A و B وابسته‌اند.

۲۸. اگر $P(E)=P(F)=0.6$ و $P(E|F)=0.8$ باشد، کدام یک از موارد زیر درست است؟(برق ـ سراسری ۷۳)

۱) $P(E|\overline{F})=0.3$ ۲) $P(E|\overline{F})=0.2$ ۳) $P(E|\overline{F})=0.5$ ۴) $P(\overline{E}|\overline{F})=0.5$

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به گزینه‌ها باید $P(E|F')$ و $P(E'|F')$ را بیابیم، یعنی:

$$P(E|F') = \frac{P(E\cap F')}{P(F')} \qquad ; \qquad P(E'|F') = \frac{P(E'\cap F')}{P(F')}$$

چون $P(E) = P(F) = 0.6$ است، $P(E') = P(F') = 0.4$ خواهد بود؛ پس تنها باید به دنبال $P(E\cap F')$ و $P(E'\cap F')$ باشیم:

$$\begin{cases} P(E) = P(E\cap F') + P(E\cap F) \quad \to \quad 0.6 = P(E\cap F') + 0.48 \quad \to \quad P(E\cap F') = 0.12 \\ P(E|F)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}=0.8 \to 0.8=\dfrac{P(E\cap F)}{0.6} \to P(E\cap F)=0.48 \to P(E|F')=\dfrac{P(E\cap F')}{P(F')}=\dfrac{0.12}{0.4}=0.3 \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(E'|F') = \dfrac{P(E'\cap F')}{P(F')} = \dfrac{0.28}{0.4} = 0.7 \; \times \\ P(E'\cap F') = P(E\cup F)' = 1 - P(E\cup F) = 1 - 0.72 = 0.28 \\ P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F) = 0.6 + 0.6 - 0.48 = 0.72 \end{cases}$$

۲۹. اگر A و B دو پیشامد باشند به طوری که: ($\overline{A}$ یعنی مکمل A) آن‌گاه: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

$$P(A\cap B) = \frac{5}{100} \; , \; P(A\cap \overline{B}) = \frac{45}{100} \; , \; P(\overline{A}\cap B) = \frac{1}{10}$$

۱) $P(B|A) = \frac{1}{2} \;,\; P(A|B) = 0.2 \;,\; P(B|\overline{A}) = 0.1$

۲) $P(B|\overline{A}) = \frac{1}{3} \;,\; P(B|A) = 0.1 \;,\; P(A|B) = 0.2$

۳) $P(B|\overline{A}) = 0.2 \;,\; P(B|A) = 0.1 \;,\; P(A|B) = \frac{1}{3}$

۴) $P(A|B) = 0.1 \;,\; P(B|\overline{A}) = \frac{1}{2} \;,\; P(B|A) = 0.2$

یادداشت:

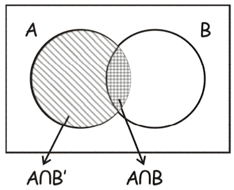
....

....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.



$$\begin{cases} P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.05}{0.15}=\dfrac{1}{3} \\ P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.05}{0.5}=0.1 \\ P(B|A')=\dfrac{P(B\cap A')}{P(A')}=\dfrac{0.1}{1-0.5}=\dfrac{0.1}{0.5}=\dfrac{1}{5}=0.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')=0.05+0.45=0.5 \\ P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=0.05+0.1=0.15 \end{cases}$$

$$P(A\cap B')=0.45\ ;\ P(A\cap B)=0.05\ ;\ P(A'\cap B)=0.1$$

۳۰ . اگر A و B دو پیشامد باشند به طوری که $P(A\cap B)=0.5$ ، $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.2$ و $P(\bar{A}\cap B)=0.1$ ، $P(A\cap\bar{B})=0.2$ آن‌گاه:
(کامپیوتر ــ سراسری ۸۳)

۱) A و B مستقل نیستند و $P(A|B)=0.83$
۲) A و B مستقل هستند و $P(A|B)=0.7$
۳) A و B مستقل هستند و $P(A|B)=0.83$
۴) A و B مستقل نیستند و $P(A|B)=0.7$

حل:گزینه ۱ درست است.

در صورت برقراری یکی از شرایط زیر A و B مستقل‌اند.

$$\begin{cases} P(A\cap B)=P(A)P(B) \\ P(A|B)=P(A)\ ,\ P(B|A)=P(B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')=0.5+0.2=0.7 \\ P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=0.5+0.1=0.6 \end{cases} \rightarrow\ P(A\cap B)=0.5\neq 0.7\times 0.6=P(A)P(B)$$

بنابراین A و B مستقل نیستند.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.5}{0.6}=0.83\neq 0.7=P(A)$$

۳۱ . فرض کنید در کیسه‌ای 4 مهره سفید و 3 مهره آبی وجود دارد. از این کیسه یک مهره را بیرون آورده و بدون نگاه کردن به رنگ آن، آن را کنار می‌گذاریم. احتمال اینکه مهره دوم که از کیسه بیرون می‌آید سفید باشد، چقدر است؟(کامپیوتر ــ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{3}{6}$ ۲) $\frac{4}{6}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

راه حل اول:

هرگاه از رنگ مهره‌های قبلی خارج‌شده اطلاعی نداشته باشیم، احتمال بیرون آوردن هر مهره در هر بار انتخاب، بدون در نظر گرفتن اینکه مهره ای از ظرف خارج شده باشد عبارت است از:

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{\text{تعداد مهره مورد نظر در ظرف در ابتدا}}{\text{کل مهره‌ها}}$$

در این سؤال چون از رنگ مهره اول اطلاعی نداریم احتمال بیرون آوردن مهره سفید در انتخاب دوم برابر همان $\frac{4}{7}$ است.

راه حل دوم:

از طریق فرمول احتمال متوسط با شرط بر روی رنگ مهره اول داریم:

$$P(\text{دومی سفید}) = P(\text{دومی سفید | اولی سفید})P(\text{اولی سفید}) + P(\text{دومی سفید | اولی آبی})P(\text{اولی آبی})$$

$$=\left(\frac{3}{6}\times\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{3}{7}\right)=\frac{4}{7}$$

دقت کنید که چون انتخاب بدون جایگذاری است در هر بار انتخاب یک مهره از ظرف کم خواهد شد.

۳۲. فرض کنید A و B دو پیشامد با احتمال‌های مثبت باشند به طوری که $P(A) + P(B) > 1$. یک کران پایین برای $P(B|A)$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ــ ۸۵)

۱) $1-\frac{P(\bar{B})}{P(A)}$ ۲) $P(A)+P(\bar{B})-1$

۳) $\frac{1-P(B)}{P(A)}$ ۴) $1-P(B)$

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به خاصیت احتمال و فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\geq\frac{P(A)+P(B)-1}{P(A)}=1+\frac{P(B)-1}{P(A)}=1-\frac{1-P(B)}{P(A)}=1-\frac{P(\bar{B})}{P(A)}$$

$$0\leq P(A\cup B)\leq 1 \;\rightarrow\; P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1 \;\rightarrow\; P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$$

۳۳. در کیسه‌ای چهار مهره سفید، دو مهره آبی و چهار مهره قرمز وجود دارد. از این کیسه یک مهره بیرون می‌آوریم و بدون توجه به رنگ آن، در گوشه‌ای آن را قرار می‌دهیم. اکنون مهره دومی بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره دوم سفید باشد چقدر است؟ (مکاترونیک ــ ۸۵)

۱) $\frac{3}{9}$ ۲) $\frac{4}{10}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{10}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

راه تستی: هرگاه از رنگ مهره‌های بیرون‌آمده قبلی هیچ‌گونه اطلاعی نداشته باشیم احتمال خارج شدن هر مهره از هر رنگ در هر مرحله با در نظرگرفتن اینکه مهره‌ای از ظرف خارج نشده است عبارت است از:

تعداد مهره رنگ خاص در جعبه

کل مهره‌ها

در این سؤال نیز چون از رنگ مهره خارج‌شده هیچ‌گونه اطلاعی نداریم احتمال سفید بودن مهره دوم برابر $\frac{4}{10}$ است.

اگر از راه تستی مسئله را حل نکنیم باید تک تک حالات رابا شرط بر روی رنگ مهره اول محاسبه کنیم؛ یعنی:

P(دومی سفید و اولی سفید) + P(دومی سفید و اولی آبی) + P(دومی سفید و اولی قرمز)

$$=\left(\frac{4}{10}\times\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{2}{10}\times\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\right)=\frac{36}{90}=\frac{4}{10}$$

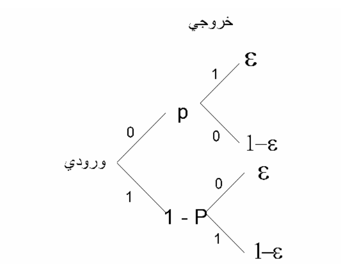
احتمال متوسط

۳۴ . بیت‌های تصادفی یک خط مخابراتی تک‌بیتی ارسال می‌شوند به طوری که هر بیت ارسالی با احتمال p برابر "0" است. اگر هر بیت ارسالی تا رسیدن به گیرنده با احتمال ε تغییر وضعیت دهد یک بیت دریافتی در گیرنده با چه احتمالی "0" است؟

(برق ـ سراسری ۸۲)

۱) p^{ε} ۲) $p+\varepsilon$ ۳) $p+\varepsilon-2p\varepsilon$ ۴) $1-p-\varepsilon+2p\varepsilon$

حل:گزینه ۳ درست است.



هر بیت ارسالی با احتمال p برابر صفر است پس با احتمال $(1-p)$ برابر 1 است و همچنین هر بیت با احتمال ε تغییر وضعیت می‌دهد پس با احتمال $1-\varepsilon$ تغییر وضعیت نخواهد داد؛ بنابراین داریم:

حال برای اینکه در گیرنده بیت صفر دریافت شود باید یا بیت ارسالی صفر باشد و با احتمال $1-\varepsilon$ تغییری نکند و یا بیت ارسالی 1 باشد و با احتمال ε تغییر کند؛ بنابراین داریم:

P(دریافت 0 در گیرنده) $=p\times(1-\varepsilon)+(1-p)\times\varepsilon=p-p\varepsilon+\varepsilon-p\varepsilon=p+\varepsilon-2p\varepsilon$

۳۵ . در کارخانه‌ای سه بخش تولیدی وجود دارد که میزان تولیدات بخش دوم و سوم به ترتیب دو برابر و 3 برابر بخش اول است. همچنین به ترتیب 4%، 5% و 6% تولیدات بخش‌ها معیوب هستند. کالایی از تولیدات انتخاب می‌شود، احتمال اینکه معیوب باشد چقدر است ؟(کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{4}{75}$ ۲) $\frac{10}{75}$ ۳) $\frac{65}{75}$ ۴) $\frac{71}{75}$

یادداشت:

....

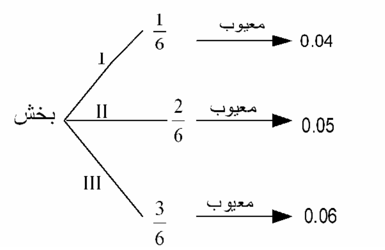
....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

E : معیوب بودن کالا



با استفاده از قضیه احتمال متوسط داریم:

$$\begin{cases} P(\text{تولید بخش اول}) = k \\ P(\text{تولید بخش دوم}) = 2k \\ P(\text{تولید بخش سوم}) = 3k \end{cases} \rightarrow k + 2k + 3k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{6}$$

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{100}\right)+\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{100}\right)+\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{6}{100}\right)=\frac{32}{600}=\frac{4}{75}$$

۳۶ . یک جعبه (شماره 1) محتوی سه عدد توپ قرمز و دو عدد توپ آبی است. جعبه دیگر (شماره 2) شامل دو عدد توپ قرمز و هشت عدد توپ آبی است. یک سکه پرتاب می‌شود. اگر شیر بیاید یک توپ از جعبه اول برداشته خواهد شد و اگر خط بیاید، توپ از جعبه دوم برداشته خواهد شد. احتمال انتخاب یک توپ قرمز چقدر است؟

(کامپیوتر ــ آزاد ۸۰)

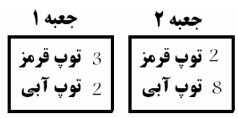
۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

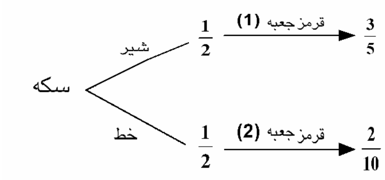
حل:گزینه ۲ درست است.

E : قرمز بودن توپ

H : سکه شیر بیاید

T : سکه خط بیاید





حال با توجه به قضیه احتمال متوسط داریم:

$$P(E)=P(E|H)P(H)+P(E|T)P(T)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$$

۳۷ . جعبه A شامل 3 مهره سفید و 7 مهره قرمز، جعبه B شامل 4 مهره سفید و 6مهره قرمز و جعبه C شامل 5 مهره سفید و 5 مهره قرمز می‌باشند. یکی از جعبه‌ها را به طورتصادفی انتخاب نموده و یک مهره از آن انتخاب می‌کنیم احتمال قرمز بودن مهره چقدر است؟(کامپیوتر ــ آزاد ۸۵)

۱) 0.4   ۲) 0.533   ۳) 0.467   ۴) 0.6

یادداشت:

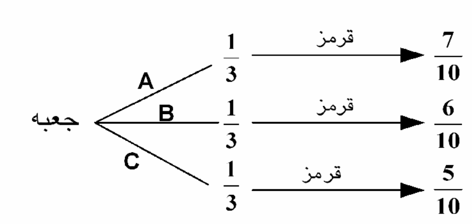
....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.



E : قرمز بودن مهره

با توجه به قضیه احتمال متوسط داریم:

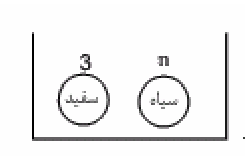
$$P(E)=P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|C)P(C)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{6}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}=0.6$$

دقت کنید که وقتی در سؤال گفته شده یکی از جعبه‌ها را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم پس احتمال انتخاب هر جعبه $\frac{1}{3}$ است (چون 3 جعبه داریم).

۳۸. ظرفی دارای 3 مهره‌سفید و n مهره سیاه است. یک مهره به تصادف از ظرف انتخاب و پس از رؤیت رنگ مهره، همراه با دو مهره مخالف رنگ مشاهده‌شده به ظرف برمی‌گردانیم. مقدار n چقدر باشد تا در انتخاب مرحله دوم شانس مشاهده مهره سفید $\frac{1}{2}$ باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ ۸۸)

۱) 1　　۲) 4　　۳) 3　　۴) 2

حل:گزینه ۳ درست است.



با توجه به فرمول احتمال متوسط با شرط بر روی رنگ مهره اول داریم:

$P(\text{دومی سفید})=\frac{1}{2}\ \rightarrow$

$P(\text{دومی سفید})=P(\text{دومی سفید | اولی سفید})P(\text{اولی سفید})+P(\text{دومی سفید | اولی سیاه})P(\text{اولی سیاه})$

$$\rightarrow\ \frac{1}{2}=\frac{3}{5+n}\times\frac{3}{3+n}+\frac{5}{5+n}\times\frac{n}{n+3}\ \rightarrow\ \frac{1}{2}=\frac{9+5n}{(5+n)(3+n)}\ \rightarrow\ 18+10n=n^2+8n+15$$

$$\rightarrow\ n^2-2n-3=0\ \rightarrow(n+1)(n-3)=0\rightarrow\begin{cases}n=-1 & \text{غ ق ق}\\ n=3 & \text{ق ق}\end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

توجه کنید درصورتی‌که مهره اول انتخاب‌شده با احتمال $\frac{3}{3+n}$ سفید باشد باید 2 مهره به رنگ مخالف یعنی سیاه به همراه همان مهره سفید به ظرف برگردد؛ یعنی در ظرف 3 مهره سفید و $n+2$ مهره سیاه موجود است که احتمال سفید خارج شدن از آن در این مرحله $\frac{3}{n+2+3}$ است.

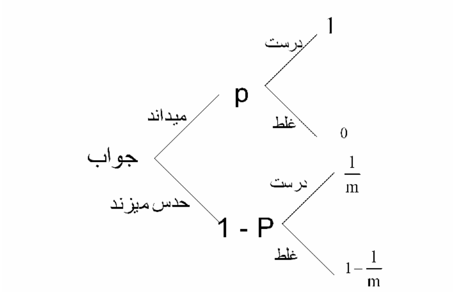
در صورتی‌که مهره اول انتخاب‌شده با احتمال $\frac{n}{n+3}$ سیاه باشد باید 2 مهره به رنگ مخالف یعنی سفید به همراه همان مهره سیاه به ظرف برگردد؛ یعنی در ظرف 5 مهره سفید و n مهره سیاه موجود است که احتمال سفید خارج شدن از آن در این مرحله $\frac{5}{5+n}$ است.

قضیه بیز

۳۹ . در پاسخ دادن به یک سؤال در یک آزمون m گزینه‌ای امتحان‌دهنده یا جواب را می‌داند و یا حدس می‌زند. فرض کنید p احتمال آن باشد که او جواب را می‌داند و $1-p$ احتمال آن باشد که آن را حدس می‌زند. فرض کنید احتمال جواب صحیح دادن به یک سؤال برای امتحان‌دهنده‌ای که جواب را می‌داند برابر یک و برای امتحان‌دهنده‌ای که حدس می‌زند برابر $\frac{1}{m}$ است. احتمال شرطی اینکه یک امتحان‌دهنده جواب یک سؤال را می‌دانسته، با فرض اینکه آن را به طور صحیح پاسخ داده باشد چیست؟(برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{\frac{1}{m}+p}$ ۲) $\frac{p}{1+\frac{1}{m}(1-p)}$ ۳) $\frac{1}{p+\frac{1}{m}(1-p)}$ ۴) $\frac{mp}{1+(m-1)p}$

حل:گزینه ۴ درست است.



E : پاسخ درست

A : جواب را می‌داند

$$P(A|E)=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|A')P(A')}=\frac{1\times p}{1\times p+\frac{1}{m}\times(1-p)}=\frac{mp}{1+(m-1)p}$$

۴۰ .کاسه‌ای دارای b گلوله سیاه و r گلوله قرمز است. گلوله‌ای به تصادف بیرون می‌کشیم و هر رنگی که درآمد ضمن برگرداندن گلوله به کاسه c گلوله از همان رنگ به کاسه اضافه می‌کنیم و سپس یک گلوله بیرون می‌کشیم. اگر بدانیم گلوله دوم قرمز است، احتمال آنکه گلوله اول سیاه بوده باشدکدام است؟(برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{r}{b+r+c}$ ۲) $\frac{b}{b+r+c}$ ۳) $\frac{b+c}{b+r+c}$ ۴) $\frac{r+c}{b+r+c}$

یادداشت:

....

....

....

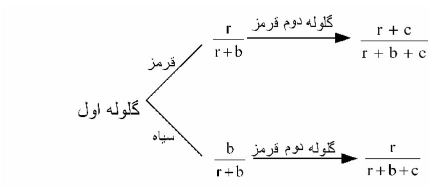
....

حل: گزینه ۲ درست است.

b_1 : گلوله اول سیاه

r_1 : گلوله اول قرمز

E : گلوله دوم قرمز



بنا بر قضیه بیز داریم:

$$P(b_1 | E)=\frac{P(b_1 \cap E)}{P(E)}=\frac{P(E | b_1)P(b_1)}{P(E | b_1)P(b_1)+P(E | r_1)P(r_1)}=\frac{\frac{r}{r+b+c}\times\frac{b}{b+r}}{\frac{r}{r+b+c}\times\frac{b}{b+r}+\frac{r+c}{r+b+c}\times\frac{r}{b+r}}=\frac{b}{r+b+c}$$

دقت کنید که وقتی b گلوله سیاه و r گلوله قرمز در جعبه است احتمال انتخاب یک گلوله قرمز $\frac{r}{b+r}$ و احتمال انتخاب یک گلوله سیاه $\frac{b}{b+r}$ است.

حال اگر یک گلوله قرمز انتخاب کنیم هنگام برگرداندن آن به ظرف، c گلوله قرمز (همرنگ) نیز به همراه آن به ظرف برمی‌گردانیم؛ پس در ظرف b گلوله سیاه و $r+c$ گلوله قرمز خواهد بود و درنتیجه احتمال انتخاب گلوله قرمز در دفعه دوم وقتی گلوله اول قرمز بوده برابر $\frac{r+c}{r+b+c}$ است.

در صورتی که یک گلوله سیاه انتخاب کنیم هنگام برگرداندن آن به ظرف، c گلوله سیاه (همرنگ) نیز به همراه آن به ظرف برمی‌گردانیم؛ پس در ظرف، $b+c$ گلوله سیاه و r گلوله قرمز وجود دارد و درنتیجه احتمال انتخاب گلوله قرمز در دفعه دوم وقتی گلوله اول سیاه بوده باشد $\frac{r}{r+b+c}$ است.

۴۱. در یک شهر بزرگ 0.5 درصد به ویروس خاصی آلوده هستند. آزمایش تشخیص این ویروس توانایی تشخیص 80 درصد موارد را برای افراد سالم و 98 درصد موارد را برای افراد بیمار دارد. فردی آزمایش شده و بیمار تشخیص داده شده است؛ احتمال آنکه تشخیص غلط باشد چیست؟(کامپیوتر ــ سراسری ۷۵)

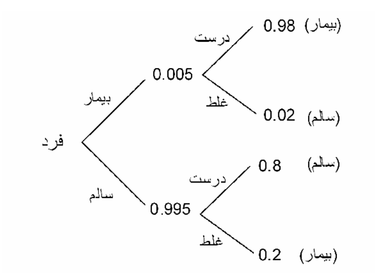
۱) 0.005 ۲) 0.199 ۳) 0.976 ۴) 0.795

حل: گزینه ۳ درست است.

E : فرد آزمایش‌شده بیمار تشخیص داده شود

A : فرد سالم

A' : فرد بیمار



$$P(A|E)=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|A')P(A')}=\frac{0.2\times0.995}{0.2\times0.995+0.98\times0.005}=0.976$$

یادداشت:

....

....

....

....

دقت کنید که وقتی فرد بیمار تشخیص داده شود، احتمال آنکه تشخیص غلط باشد یعنی همان احتمال سالم بودن فرد.

۴۲ . سه شخص A ، B و C به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال زدن به هدف این سه شخص به ترتیب $\frac{1}{6}$، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$است. اگر بدانیم که فقط یک تیر به هدف خورده است احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۷۷)

۱) $\frac{31}{72}$ ۲) $\frac{6}{31}$ ۳) $\frac{10}{31}$ ۴) $\frac{15}{31}$

حل:گزینه ۲ درست است.

E:فقط یک تیر به هدف خورده است.

بنا بر قضیه بیز داریم:

$$P(A|E)=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|C)P(C)}$$

$$P(A|E)=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)}=\frac{6}{31}$$

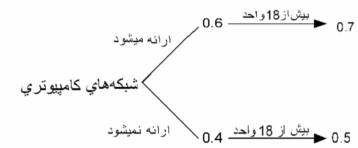
۴۳ . درس شبکه‌های کامپیوتری به احتمال 60% در ترم آینده ارائه خواهد شد. اگر این درس ارائه شود، مهشید به احتمال 70% در بیش از 18 واحد ثبت‌نام خواهد کرد و اگر ارائه نشود، مهشید به احتمال 50% در بیش از 18 واحد ثبت‌نام خواهد کرد. اگر پس از شروع ترم مهشید در بیش از 18 واحد ثبت‌نام کرده باشد، احتمال آنکه درس شبکه‌های کامپیوتری ارائه شده باشد برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) %33 ۲) %50
۳) %67 ۴) داده‌های مسئله برای محاسبه‌احتمال مورد نظر کافی نیست.

حل:گزینه ۳ درست است.

A : درس شبکه‌های کامپیوتری ارائه شده باشد.

E : مهشید بیش از 18 واحد ثبت‌نام کرده باشد.



بنا بر قضیه بیز داریم:

$$P(A|E)=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|A')P(A')}=\frac{0.7\times0.6}{0.7\times0.6+0.5\times0.4}=0.67=\%67$$

یادداشت:

....

....

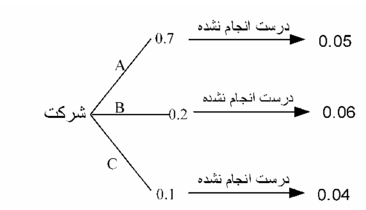
....

....

۴۴ . تعمیرات دستگاه‌های الکترونیکی در یک کارخانه توسط شرکت های A ،B و C انجام می‌پذیرد به طوری که 70% موارد از A و 20% موارد از B و 10% موارد از شرکت C استفاده می‌شود. همچنین به ترتیب در 5%، 6% و 4% موارد شرکت‌های A ،B و C کار خود را به درستی انجام نمی‌دهند. در یک زمان مشخص اگر تعمیر دستگاه الکترونیکی این کارخانه به درستی انجام نشده باشد چقدر احتمال دارد توسط شرکت B انجام شده باشد؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) 1.2% ۲) $\frac{12}{51}$ ۳) 5.1% ۴) $\frac{39}{51}$

حل:گزینه ۲ درست است.



E : درست انجام نشدن تعمیر

بنا بر قضیه بیز داریم:

$$P(B|E)=\frac{P(E|B)P(B)}{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|C)P(C)}=\frac{0.06\times0.2}{0.05\times0.7+0.06\times0.2+0.04\times0.1}=\frac{12}{35+12+4}=\frac{12}{51}$$

۴۵ . احتمال اینکه فردی که دارای مدرک کارشناسی است در یک آزمون استخدامی قبول شود 0.4 است. احتمال اینکه فردی که استخدام می‌شود دارای مدارک کارشناسی باشد 0.3 است. احتمال اینکه در این جامعه آماری فردی دارای مدرک کارشناسی باشد 0.7 است. مطلوب است احتمال اینکه یک فرد قبول شود.

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) 0.21 ۲) $\frac{2}{30}$ ۳) 0.28 ۴) $\frac{28}{30}$

حل:گزینه ۴ درست است.

E : قبول شدن در آزمون استخدامی یا همان استخدام شدن

A : دارای مدرک کارشناسی بودن

$$\begin{cases} P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} \rightarrow 0.3=\frac{0.4\times0.7}{P(E)} \rightarrow P(E)=\frac{28}{30} \\ P(E|A)=0.4\ ,\ P(A|E)=0.3\ ,\ P(A)=0.7\ ,\ P(E)=? \end{cases}$$

۴۶ . احتمال اینکه فردی در یک آزمون استخدامی شرکت کند 60% است. درصورتی‌که این فرد در آزمون شرکت کند احتمال قبول شدن او 50% است. تجربه قبلی نشان می‌دهد شانس قبول شدن افراد در این آزمون 30% است. حال اگر فرد مطمئن شود که می‌تواند در آزمون قبول شود احتمال شرکت کردن او در آزمون چند درصد است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) 30 ۲) 50 ۳) 60 ۴) 100

یادداشت:

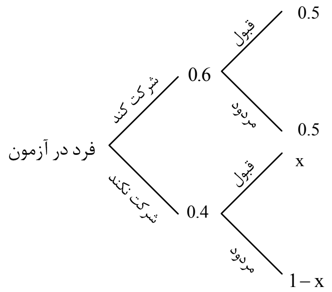
....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.



E : قبول شدن

A : شرکت کردن

حال با توجه به اینکه در صورت سؤال قبولی را 0.3 داده‌اند با استفاده از فرمول احتمال متوسط و شرط آن روی شرکت کردن در آزمون داریم:

$$P(E)=0.3 \rightarrow P(E|A)P(A)+P(E|A')P(A')=0.3 \rightarrow 0.5\times0.6+x\times0.4=0.3 \rightarrow x=0$$

بنابراین طبق قضیه بیز داریم:

$$P(A|E)=\frac{P(E\cap A)}{P(E)}=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E)}=\frac{0.5\times0.6}{0.3}=1=\%100$$

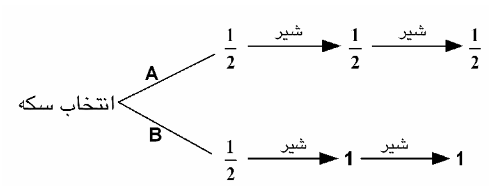
۴۷ . شخصی دو سکه در جیب دارد که یکی سالم و دیگری هر دو رو شیر است. وی یک سکه را به تصادف از جیب خود اختیار و وقتی پرتاب می‌کند، شیر مشاهده می‌شود. احتمال اینکه سکه سالم انتخاب شده باشد کدام است؟

(علوم کامپیوتر ــ ۸۷)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به قضیه بیز داریم:



E : هر دو بار شیر مشاهده کند

A : سکه سالم

B : سکه هر دو شیر

$$P(A|E)=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۴۸. جعبه‌ای شامل سه سکه A_1، A_2 و A_3 است که شانس شیر آمدن هر یک به ترتیب برابر با $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ است. یک سکه به تصادف از این جعبه انتخاب و 6 مرتبه پرتاب می‌شود. تعداد دفعاتی که شیر مشاهده می‌شود 3 است. احتمال اینکه سکه A_3 انتخاب شده باشد کدام است؟(علوم کامپیوتر ــ ۸۸)

۱) $\dfrac{2}{2+\left(\frac{3}{4}\right)^3}$ ۲) $\dfrac{1}{2+\left(\frac{4}{3}\right)^3}$ ۳) $\dfrac{1}{2+\left(\frac{3}{4}\right)^3}$ ۴) $\dfrac{2}{2+\left(\frac{4}{3}\right)^3}$

حل:گزینه ۲ درست است.

H_3 : مشاهده 3 شیر

سکه

A_1: $\frac{1}{3}$ $\xrightarrow[p=\frac{1}{4}]{\text{از 6 پرتاب 3 شیر}}$ $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3$

A_2: $\frac{1}{3}$ $\xrightarrow[p=\frac{1}{2}]{\text{از 6 پرتاب 3 شیر}}$ $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6$

A_3: $\frac{1}{3}$ $\xrightarrow[p=\frac{3}{4}]{\text{از 6 پرتاب 3 شیر}}$ $\binom{6}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3$

حال بنا بر قضیه بیز داریم:

$$P(A_3|H_3)=\frac{P(H_3|A_3)P(A_3)}{P(H_3|A_1)P(A_1)+P(H_3|A_2)P(A_2)+P(H_3|A_3)P(A_3)}$$

$$=\frac{\binom{6}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{3}}{\binom{6}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{3}+\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{1}{3}+\binom{6}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{3}}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^3+1+\left(\frac{3}{4}\right)^3}=\frac{1}{2+\left(\frac{4}{3}\right)^3}$$

یادداشت:

....

....

....

....

فصل دوم

متغیرهای تصادفی

تابع احتمال گسسته (Discrete Probability Function)

درصورتی‌که X متغیر تصادفی گسسته باشد، آن‌گاه $f(x)$ با داشتن شرایط زیر، تابع احتمال متغیر X خواهد بود:

الف) $\forall x : 0 \le f(x) = P(x) \le 1$

ب) $\sum f(x) = \sum P(x) = 1$

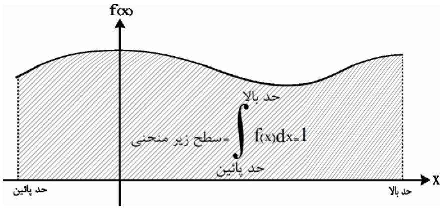
x	$x_1 \quad \dots \quad x_n$	
$P(X=x)=f(x)$	$0 \le f(x_1) \le 1 \quad \dots \quad 0 \le f(x_n) \le 1$	$\sum f(x) = \sum P(x) = 1$

تابع چگالی احتمال پیوسته (Continuous Probability Density Function)

$f(x)$ برای متغیر تصادفی پیوسته X در بازه α تا β، تابع چگالی احتمال است، اگر:

الف) $f(x) \ge 0$

ب) $\int_{\alpha=-\infty}^{\beta=+\infty} f(x)dx = 1$



یادداشت:

....

....

....

....

محاسبه احتمال

اولاً: احتمال در بازه a تا b برابر است با سطح زیرمنحنی چگالی در بازه a تا b.

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

ثانیاً: به ازای هر نقطه پیوسته $x=a$، احتمال آنکه متغیر تصادفی دقیقاً مقدار a را اختیار کند، برابر صفر است.

$$P(X=a)=\int_a^a f(x)\,dx=0$$

حال از دو رابطه بالا می‌توانیم تساوی زیر را نتیجه بگیریم:

$$P(a\le X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a<X<b)$$

۱. اگر Y یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، مقدار ثابت C کدام است؟ **(برق ـ سراسری ۸۰)**

$$f_Y(y)=\begin{cases}0.2 & ;\ -1<y\le 0\\ 0.2+Cy & ;\ 0<y\le 1\\ 0 & ;\ \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

۱) -0.4 ۲) 0 ۳) 0.4 ۴) 1.2

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\int_{-1}^{0}0.2dy+\int_0^1(0.2+cy)\,dy=1\rightarrow[0.2y]_{-1}^{0}+\left[0.2y+\frac{cy^2}{2}\right]_0^1=0.2+0.2+\frac{c}{2}=1\rightarrow c=1.2$$

۲. تابع چگالی احتمال دامنه یک سیگنال تصادفی به صورت زیر است، احتمال $P[|X|<1]$ برابر است با:

$$f_X(x)=\frac{A}{1+x^2}\ ;\ -\infty<x<\infty$$

(برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{2\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$1)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1\rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{1+x^2}dx=A.[\text{Arctgx}]_{-\infty}^{+\infty}=1\rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1\rightarrow A=\frac{1}{\pi}$$

$$2)\ P(|X|<1)=P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}[\text{Arc tgx}]_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

یادداشت:

....

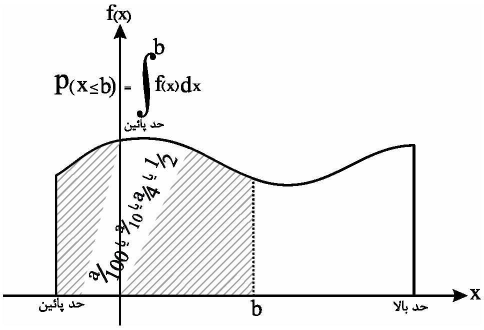
....

....

....

چندک‌ها در تابع احتمال پیوسته

برای محاسبه چندک‌ها در تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$P\left(X \le b\right)=\int_{\text{حد پایین}}^{b} f\left(x\right)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & b=Md \quad \text{(میانه)}\\ \dfrac{a}{4}\ ;\ a=1,2,3 & b=Q_a \quad \text{(چارک a ام)}\\ \dfrac{a}{10}\ ;\ a=1,2,...,9 & b=D_a \quad \text{(دهک a ام)}\\ \dfrac{a}{100}\ ;\ a=1,2,...,99 & b=P_a \quad \text{(صدک a ام)}\end{cases}$$

امید ریاضی (Expected Value)

$$E\left(X\right)=\sum_{\forall x} x\cdot f\left(x\right) \qquad (\text{گسسته } X)$$

$$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f\left(x\right)dx \qquad (\text{پیوسته } X)$$

امید ریاضی تابعی از X

درصورتی‌که $g(x)$ تابع دلخواهی برحسب x باشد، برای محاسبه $E(g(x))$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{\forall x} g\left(x\right)\cdot f\left(x\right) \qquad (\text{گسسته } X)$$

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\int_{\text{حد پایین}}^{\text{حد بالا}} g\left(x\right)\cdot f\left(x\right)dx \qquad (\text{پیوسته } X)$$

یادداشت:

....

....

....

....

خواص امید ریاضی

با توجه به یکسان بودن مفهوم امید ریاضی با میانگین، تمام خواص میانگین حسابی (μ) درباره امید ریاضی $E(X)$ نیز به شرح زیر برقرار است:

با فرض آنکه a و b اعداد ثابتی باشند (مثبت یا منفی):

1) $E(a)=a$

2) $E(X+a)=E(X)+a$

3) $E(bX)=bE(X)$

4) $E(bX+a)=bE(X)+a$

5) $E\Big(E\big(E...E(E(X))\big)\Big)=E(X)$ (ازآنجاکه امید، مقدار ثابتی است، $E(E(X))$ برابر با $E(X)$ است.)

6) $E[X-E(X)]=0$ (امیدانحرافات از میانگین همیشه صفر است.)

7) $E\left[(X-E(X))^2\right]\le E\left[(X-a)^2\right]$ (امید مجذور تفاضلات از میانگین همیشه مینیمم است.)

8) $E(|X-Md|)\le E(|X-a|)$ (امید قدرمطلق انحرافات از میانه همیشه مینیمم است.)

ازآنجاکه امید ریاضی همان میانگین است، داریم:

$$\boxed{E(X)=\mu}$$

۳ . فرض کنید متغیر تصادفی X مقادیر $2, 1, 0$ را انتخاب می‌کند و برای یک ثابت c داشته باشیم:

$$P(X=i)=cP(X=i-1)\ \ ;\ \ i=1\,,2$$

امید متغیر تصادفی X کدام است؟(برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $\dfrac{c+2c^2}{1+c+c^2}$ ۲) $\dfrac{1+c}{1+c+c^2}$ ۳) $\dfrac{c}{1+c+c^2}$ ۴) $\dfrac{c+c^2}{1+c+c^2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$P(X=i)=cP(X=i-1)\ ;\ i=1\,,2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P(X=1)=cP(X=0) \\ P(X=2)=cP(X=1)=c^2P(X=0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1 \\ P(X=0)+cP(X=0)+c^2P(X=0)=1 \\ P(X=0)\left(1+c+c^2\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(X=0)=\dfrac{1}{1+c+c^2} \\ P(X=1)=cP(X=0)=\dfrac{c}{1+c+c^2} \\ P(X=2)=cP(X=1)=\dfrac{c^2}{1+c+c^2} \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

حال می‌توان جدول توزیع احتمال آن را رسم کرد.

X	0	1	2
P(x)	$\frac{1}{1+c+c^2}$	$\frac{c}{1+c+c^2}$	$\frac{c^2}{1+c+c^2}$

$$E(X)=\sum xP(X=x)=0\times\frac{1}{1+c+c^2}+1\times\frac{c}{1+c+c^2}+2\times\frac{c^2}{1+c+c^2}=\frac{c+2c^2}{1+c+c^2}$$

۴. تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{در غیر این}\end{cases}$ **است. در این صورت احتمال آنکه X بین میانگین و میانه توزیع باشد برابر است با:** **(کامپیوتر ـ سراسری ۷۷ ، آزاد ۸۸)**

۱) $\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{18}$ ۴) $\frac{1}{20}$

حل:گزینه ۳ درست است.

$$E(X)=\int_0^1 x.2x\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^m 2x\,dx=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \left[x^2\right]_0^m=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ m^2=\frac{1}{2}\ \xrightarrow{0\le x\le 1}\ m=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P(\mu<X<m)=P\left(\frac{2}{3}<X<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}2x\,dx=\left[x^2\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

۵. X یک متغیر تصادفی با میانگین $\frac{5}{4}$ و دارای تابع چگالی احتمال زیر است، مقادیر a و b به ترتیب برابر است با:

$$f_X(x)=\begin{cases}x^2 & ;\ 0\le x\le 1\\ b & ;\ 1<x<a\\ 0 & ;\ \text{سایر جاها}\end{cases}$$

(برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $b=\frac{1}{4}, a=3$ ۲) $b=\frac{1}{2}, a=2$ ۳) $b=\frac{1}{3}, a=2$ ۴) $b=\frac{2}{3}, a=2$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$1)\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^a b\,dx=1\rightarrow\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[bx\right]_1^a=1\rightarrow\frac{1}{3}+b(a-1)=1\rightarrow\boxed{b(a-1)=\frac{2}{3}}$$

$$2)E(X)=\int_0^1 x.x^2\,dx+\int_1^a x.b\,dx=\frac{5}{4}\ \rightarrow\ \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[\frac{b}{2}x^2\right]_1^a=\frac{5}{4}$$

یادداشت:

....

....

....

....

$$\rightarrow b(a-1)(a+1)=2 \rightarrow \frac{1}{4}+\frac{b}{2}(a^2-1)=\frac{5}{4} \rightarrow \frac{b}{2}(a^2-1)=1$$

$$\xrightarrow[b(a-1)=\frac{2}{3}]{\text{در رابطه (۱)}} \frac{2}{3}(a+1)=2 \rightarrow a+1=3 \rightarrow \boxed{a=2} \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} \boxed{b=\frac{2}{3}}$$

۶. یک تابع توزیع احتمال با میانگین $\bar{X}$ در نظر می‌گیریم. به ازای هر عدد حقیقی a تابع h را با ضابطه $h(a)=E\left[(X-a)^2\right]$ تعریف می‌کنیم. کمترین مقدار $h(a)$ کدام است؟ **(برق ـ سراسری ۸۳)**

۱) $E\left[(X-\bar{X})^2\right]$ ۲) $E(X^2)$ ۳) $E\left[\frac{(X-\bar{X})^2}{2}\right]$ ۴) $E\left[\left(X-\frac{\bar{X}}{2}\right)^2\right]$

حل: گزینه ۱ درست است.

واریانس (Variance)

یکی از مهم‌ترین شاخص‌های اندازه‌گیری پراکندگی مشاهدات $(x_1,...,x_N)$ حول میانگین، واریانس (σ^2)است.

متغیر تصادفی X مفروض است، واریانس X از روابط زیر محاسبه می‌شود:

(1) $\sigma^2=E(X-\mu)^2=E\left[(X-E(X))^2\right]$

(2) $\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2$

در منابع مختلف، از علایم متفاوتی برای نمایش واریانس استفاده می‌شود از جمله:

$$\text{واریانس} = \text{پراش} = \sigma^2 = V(X)=D(X)=Var(X)$$

خواص واریانس

اگر ثابت‌های a و b (مثبت یا منفی) را در نظر بگیریم:

1) $\sigma^2(a)=0$ 2) $\sigma^2(bX)=b^2\sigma_X^2$ 3) $\sigma^2(bX\overset{0}{\cancel{\pm a}})=b^2\sigma_X^2$

انحراف معیار (Standard Deviation)

جذر مثبت واریانس $\left(\sqrt{\sigma^2}\right)$ را **انحراف معیار** (σ) می‌نامیم.

یادداشت:

....

....

....

....

خواص انحراف معیار

اگر ثابت‌های a و b (مثبت یا منفی) را در نظر بگیریم:

$$1)\ \sigma(a)=0 \qquad 2)\ \sigma(bX)=|b|\sigma_X \qquad 3)\ \sigma(bX\cancel{\pm a}^{\,0})=|b|\sigma_X$$

ضریب پراکندگی (Coefficient of Variation)

حاصل تقسیم انحراف معیار به میانگین را ضریب تغییرات می‌نامند و آن را با CV نشان می‌دهند.

$$CV=\frac{\sigma}{\mu}$$

تابع مولد گشتاور (Moment Generating Function)

تابع مولد گشتاور مرتبه tام متغیر تصادفی X به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right) \qquad t\in R$$

تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی گسسته و پیوسته X با تابع احتمال $f(x)$ به صورت زیر است:

گسسته X	$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\sum e^{tx}f(x)$
پیوسته X	$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\int e^{tx}f(x)dx$

کاربرد تابع مولد گشتاور

اگر $M_X(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X باشد، **مشتق rام تابع مولد گشتاور** در نقطه $t=0$، $E\left(X^r\right)$ را تولید می‌کند که برابر گشتاور مرتبه rام حول مبدأ است.

$$\boxed{M_X^{(r)}(t=0)=\left.\frac{d^rM(t)}{dt^r}\right|_{t=0}=E\left(X^r\right)}$$

مشتق اول تابع مولد گشتاور، امید ریاضی X است.

مشتق دوم تابع مولد گشتاور، امید ریاضی X^2 است.

$\vdots$

مشتق r ام تابع مولد گشتاور، امید ریاضی X^r است.

$$\begin{cases} E(X)=M'_X(t=0) \\ E\left(X^2\right)=M''_X(t=0) \\ \quad\vdots \\ E\left(X^r\right)=M_X^{(r)}(t=0) \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۷ . تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $t<\frac{1}{4}$ $M_X(t)=(1-4t)^{-2}$ داده شده است. در این صورت $E\left(X^3\right)$ برابر است با:
(کامپیوتر ـ سراسری ۷۶)

۱) $4^6\times 6$ ۲) $4^4\times 6$ ۳) $6^4\times 4$ ۴) $6^6\times 4$

حل:گزینه ۲ درست است.

اگر 3 بار از $M_X(t)$ مشتق بگیریم و قرار دهیم $t=0$، $E\left(X^3\right)$ به دست می‌آید:

$$M_X(t)=(1-4t)^{-2} \quad ; \quad t<\frac{1}{4}$$

$$M'_X(t)=(-2)(-4)(1-4t)^{-3}=8(1-4t)^{-3} \xrightarrow{t=0} E(X)=8$$

$$M''_X(t)=8(-3)(-4)(1-4t)^{-4}=96(1-4t)^{-4} \xrightarrow{t=0} E\left(X^2\right)=96=4^2\times 6$$

$$M'''_X(t)=96(-4)(-4)(1-4t)^{-5} \xrightarrow{t=0} E\left(X^3\right)=96\times 4^2=4^4\times 6$$

۸ . فرض کنید تابع مولد متغیر تصادفی X برابر است با $M_X(t)=e^{t-1}$، مطلوب است واریانس X:
(کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) 1 ۲) 1.5 ۳) 2 ۴) 3

حل:گزینه ؟ درست است.

در این سؤال واریانس X خواسته شده است، بنابراین با توجه به فرمول واریانس داریم:

$$\begin{cases} Var(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=e^{-1}-\left(e^{-1}\right)^2=e^{-1}-e^{-2} \\ E(X)=\left(e^{t-1}\right)'_{t=0}=e^{t-1}\Big|_{t=0}=e^{-1} \\ E\left(X^2\right)=\left(e^{t-1}\right)''_{t=0}=e^{t-1}\Big|_{t=0}=e^{-1} \end{cases}$$

پاسخ درست در گزینه‌ها وجود ندارد، زیرا تابع داده‌شده، تابع مولد گشتاور نیست.

یادآوری: یکی از خصوصیات تابع مولد گشتاور این است که مقدار آن در نقطه صفر، برابر یک است.

$$M_X(t=0)=1$$

درصورتی‌که در این سؤال داریم: $M_X(t=0)=e^{0-1}=e^{-1}\neq 1$

یادداشت:

....

....

....

....

تابع یکنواخت پیوسته

متغیر تصادفی پیوسته X را در نظر بگیرید که مقادیر خود را در بازه a تا b $(a \le X \le b)$ اختیار می‌کند. اگر احتمال وقوع X در فواصل هم‌اندازه در بازه a تا b یکسان باشد، آن‌گاه X دارای توزیع یکنواخت پیوسته خواهد بود.

واریانس	امید ریاضی (میانگین)	تابع چگالی یکنواخت
$\sigma_X^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$	$E(X) = \mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$	$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha} \quad ; \quad \alpha < x < \beta$

هرگاه تابع چگالی $f(x)$ در بازه $\alpha < x < \beta$ به صورت $f(x) =$ (**ثابت**) باشد، آن‌گاه حتماً $f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}$ است و برعکس.

تابع توزیع تجمعی (Cumulative Distribution Function)

تابع توزیع تجمعی (تراکمی) متغیر تصادفی X، $F_X(x)$، عبارت است از «احتمال مقادیر کوچک‌تر یا مساوی x»؛ به عبارت دیگر:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

ازآنجاکه رابطه $P(X \le x) + P(X > x) = 1$ همواره برقرار است، رابطه $P(X > x) = 1 - F_X(x)$ نیز همواره برقرار است.

مشخصات کلی تابع توزیع تجمعی

اگر $F_X(x)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی (گسسته یا پیوسته) X باشد، خصوصیات زیر همواره برای آن صادق است:

۱- ازآنجاکه $F_X(x) = P(X \le x)$ است، $F_X(x)$ تجمع مقادیر احتمال کوچک‌تر یا مساوی x را محاسبه می‌کند و همواره مجموع احتمال‌ها برابر 1 است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} F(-\infty) = P(X \le -\infty) = 0 \\ F(+\infty) = P(X \le +\infty) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(-\infty) = 0 \\ F(+\infty) = 1 \end{cases}$$

۲- با توجه به رابطه 1، مقدار $F_X(x)$ همواره بین 0 و 1 است.

$$0 \le F_X(x) \le 1$$

۳- تابع $F_X(x)$ همواره صعودی است.

$$a < b \;\rightarrow\; F(a) \le F(b)$$

ازآنجاکه $F_X(x) = P(X \le x)$ مجموع مقادیر احتمال کمتر یا مساوی x را محاسبه می‌کند، طبیعی است که هرچه مقدار x بزرگ‌تر شود، مقدار $F_X(x)$ نیز بزرگ‌تر خواهد شد (زیرا تجمع مقادیر احتمال بیشتر شده و مقدار $F_X(x)$ به 1 نزدیک می‌شود)؛ بنابراین **تابع** $F_X(x)$ **غیر نزولی (صعودی)** است.

۴- تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ همواره از **راست پیوسته** است.

$$\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a^+) = F_X(a)$$

یادداشت:

....

....

....

....

۹. متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع $F_X(x)$ است. اگر F تابعی اکیداً صعودی و $Y = F(X)$، آن‌گاه حاصل $P\left(Y - E[Y]<\frac{1}{4}\right)$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

حل: گزینه ۲ درست است.

اگر X دارای تابع توزیع $F_X(x)$ باشد، آن‌گاه همواره $Y=F_X(x)$ دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0,1)$ است $\left(0\le y=F_X(x)\le 1\right)$.

$$Y \sim U(0,1) \xrightarrow[b=1]{a=0} f(y)=\frac{1}{1-0}=1 \quad , \quad E(Y)=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P\left(Y-E(Y)<\frac{1}{4}\right)=P\left(Y-\frac{1}{2}<\frac{1}{4}\right)=P\left(Y<\frac{3}{4}\right)=\int_{\text{حدپایین}}^{\frac{3}{4}} f(y)dy=\int_0^{\frac{3}{4}} 1.dy=[y]_0^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$$

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته

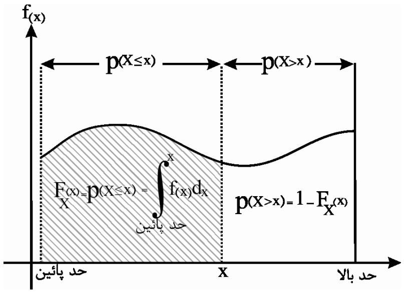
اگر متغیر تصادفی گسسته X مفروض و تابع احتمال آن $f(x)=P(x)$ باشد، تابع توزیع تجمعی (تراکمی) آن $\left(F_X(x)\right)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{X\le x} P(x)=\sum f(x)$$

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته

هرگاه $f(x)$ تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته X با **یک ضابطه** باشد، آن‌گاه تابع توزیع تجمعی آن $\left(F_X(x)\right)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{\text{حدپایین}}^{x} f(x)dx$$



یادداشت:

....

....

....

....

محاسبه $f(x)$ با استفاده از $F_X(x)$

برای محاسبه تابع احتمال $f(x)$ از روی تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\mathbf{F_X(x)}\ \text{(تابع توزیع تجمعی)} \xrightarrow[\text{در فواصل : } F'_X(x)\ \text{(مشتق تابع تجمعی)}]{\text{درنقاط مرزی : } F(x^+)-F(x^-)\neq 0} \mathbf{f_X(x)}\ \text{(تابع احتمال)}$$

هرگاه در یکی از نقاط مرزی تابع توزیع تجمعی رابطه $F_X(x^+)\neq F_X(x^-)$ برقرار باشد، آن‌گاه:

$$f(x)=F_X(x^+)-F_X(x^-)$$

البته فقط در توابع چندضابطه‌ای، باید پیوسته بودن نقاط مرزی را کنترل کنیم.

محاسبه احتمال

درصورتی‌که $P(X\le x)=F_X(x)$، تابع توزیع تجمعی (تراکمی) متغیر تصادفی X با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، برای محاسبه احتمال می‌توانیم از قواعد زیر استفاده کنیم:

1) $P(X=a)=F_X(a^+)-F_X(a^-)$

2) $P(X<a)=F_X(a^-)$

3) $P(X\le a)=F_X(a)$

4) $P(a<X<b)=F_X(b^-)-F_X(a^+)$

۱۰. تابع توزیع (پخش) متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده است:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2} & 1\le x<2\\ \dfrac{x}{3} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

در این صورت $E(X),P(X=2)$ به ترتیب با کدام گزینه برابر هستند؟(کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $E(X)=\frac{12}{19},P(X=2)=\frac{1}{6}$

۲) $E(X)=\frac{19}{12},P(X=2)=\frac{1}{6}$

۳) $E(X)=\frac{12}{19},P(X=2)=\frac{2}{3}$

۴) $E(X)=\frac{19}{12},P(X=2)=\frac{2}{3}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

برای به دست آوردن $f(x)$ با استفاده از $F(x)$ در توابع پیوسته، در فواصل از $F(x)$ مشتق می‌گیریم و مقدار احتمال در نقاط مرزی را از رابطه $P(X=a)=F_X(a^+)-F_X(a^-)$ به دست می‌آوریم.

	$0<x<1$	$x=1$	$x=2$	$2<x<3$	سایر جاها
$F'(x)=f(x)$	$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0

$$\begin{cases} P(X=0)=F(0^+)-F(0^-)=\frac{0}{4}-0=0 \\ P(X=1)=F(1^+)-F(1^-)=\frac{1}{2}-\frac{1^2}{4}=\frac{1}{4} \\ P(X=2)=F(2^+)-F(2^-)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \checkmark \\ P(X=3)=F(3^+)-F(3^-)=1-\frac{3}{3}=0 \end{cases}$$

$$E(X)=\int x f(x)dx+\sum xP(X=x)=\int_0^1 x.\frac{x}{2}dx+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+\int_2^3 x.\frac{1}{3}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1+(1)\left(\frac{1}{4}\right)+(2)\left(\frac{1}{6}\right)+\left[\frac{x^2}{6}\right]_2^3=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{9}{6}-\frac{4}{6}=\frac{19}{12}$$

محاسبه $F_Y(y)$ به کمک $F_X(x)$

اگر $F_X(x)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X باشد آن‌گاه برای محاسبه تابع توزیع تجمعی $F_Y(y)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\begin{cases} P\left(X\le g^{-1}(y)\right)=F_X\left(g^{-1}(y)\right) \\ P\left(X\ge g^{-1}(y)\right)=1-F_X\left(g^{-1}(y)\right) \end{cases}$$

بازه مربوط به y را به ترتیب با قرار دادن $x=a$ و $x=b$ در $Y=g(X)$ به دست می‌آوریم.

۱۱. اگر تابع توزیع X به صورت زیر باشد، تابع توزیع $Y=-\operatorname{Ln}X$ کدام است؟(کامپیوتر ــ سراسری ۸۲)

$$F_X(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ t & 0\le t<1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$$

۱) $F_Y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-t} & t\ge 0 \end{cases}$

۲) $F_Y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\frac{1}{2}} & t\ge 0 \end{cases}$

۳) $F_Y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\frac{2}{3}t} & t\ge 0 \end{cases}$

۴) $F_Y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-2t} & t\ge 0 \end{cases}$

یادداشت:

....

....

....

....

محاسبه تابع احتمال $Y=g(X)$ پیوسته

برای محاسبه تابع چگالی $Y=g(X)$ که در آن X یک متغیر تصادفی پیوسته است، می‌توانیم به یکی از دو روش زیر عمل کنیم:

۱- تکنیک تبدیل متغیر

۲- تکنیک تابع توزیع تجمعی

تکنیک تبدیل متغیر

متغیر تصادفی پیوسته X را در بازه $a<x<b$ با تابع چگالی $f(x)$ در نظر بگیرید. اگر $Y=g(X)$ تابعی **یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر** از متغیر X باشد، آن‌گاه برای محاسبه تابع چگالی $f(y)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) متغیر X را برحسب Y به دست می‌آوریم.

$$Y=g(X) \quad \rightarrow \quad X=g^{-1}(Y)$$

۲) با استفاده از رابطه زیر تابع $f_Y(y)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{f_Y(y)=\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|\times f_X\left(g^{-1}(y)\right)}$$

درواقع $f_Y(y)$ از حاصل‌ضرب «قدرمطلق مشتق $g^{-1}(y)$» در «$f_X\left(g^{-1}(y)\right)$» به دست می‌آید.

بازه مربوط به y را به ترتیب با قرار دادن $x=a$ و $x=b$ در $Y=g(X)$ به دست می‌آوریم.

تکنیک تابع توزیع تجمعی

در این روش ابتدا تابع توزیع تجمعی $Y=g(X)$ را محاسبه می‌کنیم، سپس با مشتق‌گیری از آن، تابع چگالی احتمال را به دست می‌آوریم؛ به عبارت دیگر:

۱) تابع توزیع تجمعی $Y=g(X)$ را به دست می‌آوریم:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(g(x)\le y\right)$$

۲) با مشتق‌گیری از تابع توزیع تجمعی می‌توانیم تابع چگالی $Y=g(X)$ را به دست آوریم:

$$f_Y(y)=F'_Y(y)$$

یادداشت:

....

....

....

....

فصل سوم

متغیرهای تصادفی توأم

تابع توأم متغیرهای تصادفی گسسته

الف) $0 \le f(x,y) = P(x,y) \le 1$ **ب)** $\sum_{\forall x}\sum_{\forall y} f(x,y) = \sum_{\forall y}\sum_{\forall x} f(x,y) = 1$

تابع توأم متغیرهای تصادفی پیوسته

الف) $f(x,y) \ge 0$ **ب)** $\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(x,y)\,dy\,dx = 1$

۱. تابع چگالی احتمال مشترک $f(x,y)$ (Joint pdf) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. ضریب A کدام است؟

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} A e^{-x} e^{-y} & , \quad 0 \le y \le x < \infty \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(برق ـ سراسری ۷۹)

۱) 2 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}$

یادداشت:

....

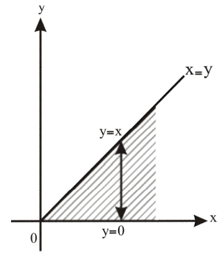
....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

یادآوری: مقدار انتگرال روی کل بازه تابع چگالی پیوسته، برابر یک است.



$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int\limits_{Y\le X}\int f(x,y)\,dy\,dx \xrightarrow[\text{عمودی}]{\text{المان‌گیری}} \int_0^{\infty}\int_0^{x} A e^{-x} e^{-y}\,dy\,dx = 1$$

$$\to \int_0^{\infty} A e^{-x}.\left[-e^{-y}\right]_0^{x} dx = 1 \quad \to \quad A\int_0^{\infty} e^{-x}\left(-e^{-x}+1\right)dx = 1$$

$$\to A\int_0^{\infty}\left(-e^{-2x}+e^{-x}\right)dx = 1 \quad \to \quad A\left[\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\to A\left[(0-0)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = 1 \quad \to \quad A\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \to \quad A = 2$$

محاسبه احتمال در توابع توأم

توابع پیوسته

غیریکنواخت: اگر $f(x,y)$ تابع توأم (مشترک) متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y باشد، برای محاسبه احتمال روی ناحیه دلخواه A از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(A) = \iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{A} f(x,y)\,dy\,dx$$

به عبارت دیگر از تابع توأم روی ناحیه A انتگرال می‌گیریم.

۲. فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت زیر باشد:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & ; \quad 0<x_1<1 \;,\; 0<x_2<1 \\ 0 & ; \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در این صورت $P\left(\frac{X_1}{X_2}<2\right)$ برابر است با:(برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{19}{24}$ ۳) $\frac{5}{24}$ ۴) $\frac{17}{24}$

حل: گزینه ۲ درست است.

یادآوری: احتمال در ناحیه، برابر انتگرال در ناحیه است.

بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$P\left(\frac{X_1}{X_2}<2\right) = P\left(X_1 < 2X_2\right) = \int\limits_{X_1<2X_2}\int f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 \;\underline{\underline{\text{المان عمودی}}}$$

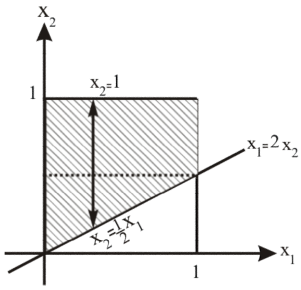
یادداشت:

....

....

....

....



$$\int_0^1 \int_{\frac{x_1}{2}}^1 (x_1+x_2)\,dx_2\,dx_1 = \int_0^1 \left[x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\right]_{\frac{x_1}{2}}^1 dx_1 =$$

$$\int_0^1 \left(x_1 + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}x_1^2\right)dx_1 = \left[\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{8}\frac{x_1^3}{3}\right]_0^1 = \frac{19}{24}$$

(به نحوه المان‌گیری در متن درس مراجعه کنید.)

دقت کنید که چون توزیع X_1 و X_2 در فاصله $(0,1)$ یکنواخت نیست، نمی‌توان در این سؤال برای به دست آوردن احتمال از تقسیم مساحت مورد نظر به مساحت کل استفاده کرد.

۳ . تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر مفروض است:

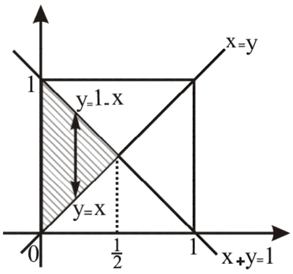
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

در این صورت، مقدار $P(X+Y<1)$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل:گزینه ۴ درست است.

ابتدا ناحیه مربوط به $f(x,y)$ را رسم کرده و سپس خط $x+y<1$ را در نظر می‌گیریم. برای به دست آوردن جواب باید با المان‌گیری در ناحیه هاشورخورده، از $f(x,y)$ انتگرال‌گیری کنیم.



یادآوری: احتمال در ناحیه، برابر انتگرال در ناحیه است.

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f(x,y) \xrightarrow{\text{المان عمودی}} P(X+Y<1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{1-x} 6x\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} [6xy]_x^{1-x} = \int_0^{\frac{1}{2}} 6x(1-x-x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (6x-12x^2)\,dx = \left[3x^2-4x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} - \frac{4}{8} = \frac{1}{4}$$

دقت کنید که چون توزیع X و Y یکنواخت پیوسته نیست، نمی‌توان مقدار احتمال مورد نظر را از تقسیم مساحت هاشورخورده به مساحت کل به دست آورد اگرچه ممکن است به طور اتفاقی مقدار مساحت مورد نظر با احتمال به‌دست‌آمده از انتگرال ناحیه مورد نظر برابر شود.

یادداشت:

....

....

....

....

یکنواخت: اگر X و Y دو متغیر تصادفی یکنواخت باشند، رابطه بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت کل}}}$$

زیرا:

$$P(A)=\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \xrightarrow{\text{X و Y یکنواخت}} P(A)=\iint_A \frac{1}{\text{مساحت کل}}\,dx\,dy=\frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت کل}}$$

که در آن A ناحیه‌ای در کل ناحیه X و Y است.

۴ . اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ باشند، $P\left(Y\ge X-\frac{1}{2}\right)$ کدام گزینه خواهد بود؟

(کامپیوتر ـ آزاد ۸۵)

۱) 0.125 ۲) 0.25 ۳) 0.875 ۴) 0.75

حل:گزینه ۳درست است.

یادآوری: احتمال در ناحیه، برابر با انتگرال در آن ناحیه است؛ بنابراین ابتدا ناحیه مزبور را رسم می‌کنیم و سپس در آن ناحیه از $f(x,y)$ انتگرال‌گیری می‌کنیم؛ پس ابتدا باید $f(x,y)$ را به دست آوریم.

چون X و Y دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ بوده و مستقل از یکدیگر نیز هستند، تابع چگالی توأم X و Y به دو روش زیر به دست می‌آید:

راه حل اول:

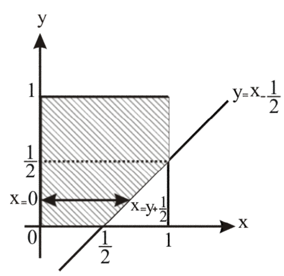
$$X,Y \text{ مستقل} \Leftrightarrow f(x,y)=f(x).f(y)$$

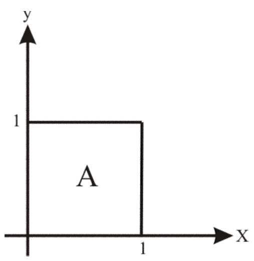
$$\left.\begin{array}{l} X\sim U(0,1) \;\rightarrow\; f(x)=\dfrac{1}{1-0}=1 \\ Y\sim U(0,1) \;\rightarrow\; f(y)=\dfrac{1}{1-0}=1 \end{array}\right\} \rightarrow\; f(x,y)=f(x)\times f(y)=1\times 1=1$$

راه حل دوم:

از طریق محاسبه مساحت ناحیه X و Y:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=1 \;\rightarrow\; f(x,y)\times\iint_A dx\,dy=1 \;\rightarrow\; f(x,y)\times(\text{مساحت ناحیه } A)=1 \;\rightarrow\; f(x,y)=\frac{1}{1\times 1}=1$$





یادداشت:

....

....

....

....

تابع حاشیه‌ای (کناره‌ای) (Marginal Function)

توابع حاشیه‌ای گسسته

$$f(x)=\sum_{\forall y} f(x,y) \quad , \quad f(y)=\sum_{\forall x} f(x,y)$$

توابع حاشیه‌ای پیوسته

$$f(x)=\int_Y f(x,y)dy \quad , \quad f(y)=\int_X f(x,y)dx$$

استقلال دو متغیر تصادفی

دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل (ناوابسته) گویند، اگر و فقط اگر به ازای **تمام نقاط** (x,y)، رابطه $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$ برقرار باشد؛ به عبارت دیگر:

$$X \text{ و } Y \text{ مستقل} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x,y)=f(x)\cdot f(y) \ ; \ (x,y) \text{ به ازای تمام نقاط}$$

بررسی استقلال دو متغیر گسسته

برای بررسی استقلال دو متغیر X و Y، ابتدا توابع کناره‌ای $f(x)$ و $f(y)$ را به دست می‌آوریم، سپس درستی رابطه $f(x_i,y_j)=f(x_i)\cdot f(y_j)$ را برای تمام زوج‌های (x_i,y_j) بررسی می‌کنیم.

x \ y	y_j	
x_i	$f(x_i,y_j) \rightarrow$ $\downarrow$	$f(x_i)$
	$f(y_j)$	

بررسی استقلال دو متغیر پیوسته

برای متغیرهای تصادفی **پیوسته** X و Y درصورتی‌که:

الف) حدود X و Y مستقل باشند،

ب) تابع چگالی توام $f(x,y)$ را بتوان به صورت حاصل‌ضرب دو تابع مستقل بر حسب X و Y نوشت،

آن‌گاه X و Y مستقل هستند و در غیر این صورت وابسته خواهند بود.

یادداشت:

....

....

....

....

تابع توزیع تجمعی توأم (Cumulative Joint Distribution Function)

تعریف: تابع توزیع تجمعی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum\!\!\!\!\int \sum\!\!\!\!\int f(x,y)$$

محاسبه تابع چگالی توأم از روی تابع توزیع توأم پیوسته

برای به دست آوردن تابع چگالی توأم از روی تابع توزیع توأم، باید از هر متغیر مشتق جزیی بگیریم. البته فرقی نمی‌کند که ابتدا کدام متغیر را ثابت در نظر گرفته و نسبت به دیگری مشتق بگیریم.

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$$

روابط احتمالی بین متغیرهای تصادفی

اگر X و Y دو متغیر تصادفی دلخواه باشند، همواره:

$$P(X<Y)+P(X=Y)+P(X>Y)=1 \quad ; \quad X \text{ و } Y$$ **گسسته**

$$P(X<Y)+P(X>Y)=1 \quad ; \quad X \text{ و } Y$$ **پیوسته**

یادآوری: در متغیرهای تصادفی پیوسته همواره $P(X=Y)=0$ است.

متغیرها با توزیع یکسان

متغیرهای تصادفی X و Y را هم‌توزیع (با توزیع یکسان) گویند اگر و فقط اگر:

$$f_X(t) = f_Y(t) \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

درنتیجه برای متغیرهای هم‌توزیع همواره **امید، واریانس، تابع مولد گشتاور و** ... در صورت وجود، **برابر** خواهند بود.

برای مثال، دو متغیر تصادفی X و Y با توابع چگالی زیر هم‌توزیع‌اند:

$$f(x) = 2x \quad ; \quad 0<x<1$$
$$f(y) = 2y \quad ; \quad 0<y<1$$

یادداشت:

....

....

....

....

متغیرهای مستقل با توزیع یکسان (Independent Identically Distribution)

اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان (**iid**) باشند، آن‌گاه:

$$\boxed{\mathbf{P(X<Y)=P(X>Y)}}$$

نتایج:

۱) اگر X و Y دو متغیر تصادفی **پیوسته** مستقل با توزیع یکسان (**iid**) باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} P(X<Y)+P(X>Y)=1 \\ P(X<Y)=P(X>Y) \end{cases} \rightarrow \boxed{\mathbf{P(X<Y)=P(X>Y)=\frac{1}{2}}}$$

۲) اگر X و Y دو متغیر تصادفی **گسسته** مستقل با توزیع یکسان (**iid**) باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} P(X<Y)+P(X=Y)+P(X>Y)=1 \\ P(X<Y)=P(X>Y) \end{cases} \rightarrow \boxed{\mathbf{P(X<Y)=P(X>Y)=\frac{1-P(X=Y)}{2}}}$$

۳) با توجه به نتایج (۱) و (۲) برای هر X و Y **مستقل با توزیع یکسان** (**iid**) همواره داریم:

$$\boxed{\mathbf{P(X<Y)=P(X>Y)\le\frac{1}{2}}}$$

دقت کنید!

برای هر دو متغیر مستقل X و Y با توزیع یکسان (**iid**):

الف) اگر X و Y **پیوسته** باشند: $P(X=Y)=0$

ب) اگر X و Y **گسسته** باشند: $P(X=Y)=\sum\sum_{X=Y}P(x,y)=\sum_{X}P(x)^2$

۵ . فرض کنید دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگر دارای توزیع یکنواخت گسسته باشند به صورت زیر:

$$P(X=x)=\frac{1}{\theta} \quad , \quad x=1,2,\dots,\theta$$

$$P(Y=y)=\frac{1}{\theta} \quad , \quad y=1,2,\dots,\theta$$

احتمال اینکه $P(X\neq Y)$ کدام است؟(مکاترونیک ــ ۸۸)

۱) $\frac{1}{\theta}$ ۲) $\frac{\theta-1}{\theta}$ ۳) $\frac{1}{\theta-1}$ ۴) $\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)^2$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

در این سؤال که X و Y مستقل و هم‌توزیع هستند، داریم:

$$P(X=Y)=\sum_{x=1}^{\theta}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2=\sum_{x=1}^{\theta}\frac{1}{\theta^2}=\frac{1}{\theta^2}\sum_{x=1}^{\theta}1=\frac{\theta}{\theta^2}=\frac{1}{\theta}$$

$$P(X\neq Y)=1-P(X=Y)=1-\frac{1}{\theta}=\frac{\theta-1}{\theta}$$

۶. اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و با توزیع یکسان (iid) باشند، آن‌گاه $P(X>Y)$ برابر است با:

(برق ـ سراسری ۸۵)

۱) 0 ۲) 1

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) بستگی به توزیع X و Y دارد.

حل:گزینه ۴ درست است.

$$P(X<Y)+P(X=Y)+P(X>Y)=1\xrightarrow[\text{X و Y مستقل و هم توزیع}]{P(X<Y)=P(X>Y)}2P(X>Y)=1-P(X=Y)$$

$$P(X>Y)=P(X<Y)=\frac{1-P(X=Y)}{2}\begin{cases}\xrightarrow[P(X=Y)=0]{\text{X و Y پیوسته}}=\frac{1}{2}\\ \xrightarrow[P(X=Y)\geq 0]{\text{X و Y گسسته}}\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

دقت کنید که اگر در گزینه‌ها، گزینه حداکثر $\frac{1}{2}$ بود می‌توانست جواب باشد، زیرا اگر X و Y پیوسته باشند، این احتمال برابر با $\frac{1}{2}$ است و اگر گسسته باشند، کمتر یا مساوی $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

یادداشت:

....

....

....

....

تابع احتمال شرطی (Conditional Probability Function)

اگر تابع احتمال توأم $f(x,y)$ و توابع کناره‌ای $f(x)$ و $f(y)$ مفروض باشند، داریم:

$$\boxed{f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f(y)} \quad , \quad f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}}$$

۷. اگر (X,Y) دارای تابع چگالی توأم زیر باشند، آن‌گاه $P\left(X\le\frac{3}{4}\;\middle|\; Y=\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

$$f_{x,y}(x,y)=\begin{cases}3x & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases}f(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f(y)}=\dfrac{3x}{\frac{3}{2}\left(1-y^2\right)}=\dfrac{2x}{1-y^2} \quad\rightarrow\quad f\left(x\mid y=\frac{1}{2}\right)=\dfrac{2x}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{8}{3}x\\ f(y)=\int_x f(x,y)dx=\int_y^1 3x\,dx=\left[\dfrac{3}{2}x^2\right]_y^1=\dfrac{3}{2}\left(1-y^2\right)\end{cases}$$

$$P\left(X\le\frac{3}{4}\mid Y=\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{4}} f\left(x\mid Y=\frac{1}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{8}{3}x\,dx=\left[\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}$$

۸. تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت $f(x\,,\,y)=\begin{cases}\frac{1}{y} & 0<x<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط } R^2\end{cases}$ است. $P\left(X<\frac{1}{2}\mid Y=2\right)$ برابر است با:

(علوم کامپیوتر ـ ۸۴)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

ابتدا $f(x|y)$ را به دست آورده، سپس احتمال مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{1}{y}}{1}=\frac{1}{y}\rightarrow f(x|Y=2)=\frac{1}{2}\quad;\quad f(y)=\int_x f(x,y)dx=\int_0^y\frac{1}{y}dx=\left[\frac{x}{y}\right]_0^y=1$$

$$P\left(X<\frac{1}{2}\,\middle|\,Y=\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x|Y=2)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\left[\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

توابع توزیع تجمعی شرطی $F(x|y)$ و $F(y|x)$

درصورتی‌که تابع توزیع تجمعی توأم $F(x,y)$ و توابع تجمعی کناره‌ای $F(x)$ و $F(y)$ مفروض باشند:

$$\boxed{F(x|y)=\frac{F(x,y)}{F(y)}\quad,\quad F(y|x)=\frac{F(x,y)}{F(x)}}$$

۹. فرض می‌کنیم X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر کدام به طور یکنواخت بر بازه $[0,2]$ توزیع شده باشند و $Z=Y-X$ و $A=\{|Y-X|\le 1\}$، در این صورت $P(A|X=1)$ و $f_{z|x}(0|1)$ و $F_{z|x}(0|1)$ به ترتیب برابرند با:(برق ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{2},1,\frac{3}{4}$ ۲) $1,0,1$ ۳) $\frac{1}{2},\frac{1}{2},1$ ۴) $\frac{1}{2},0,1$

حل:گزینه ۳ درست است.

X و Y هر دو دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0,2)$ هستند؛ بنابراین:

$$f(x)=\frac{1}{2}\;;\;0<x<2\longrightarrow F(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{1}{2}dx=\frac{x}{2}$$

$$f(y)=\frac{1}{2}\;;\;0<y<2\longrightarrow F(y)=\int_0^y f(y)dy=\int_0^y\frac{1}{2}dy=\frac{y}{2}$$

$$f(x,y)=f(x)\cdot f(y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\longrightarrow F(x,y)=\int_0^x\int_0^y\frac{1}{4}dy\,dx=\frac{xy}{4}$$

الف) $$P(A|X=1)=\frac{P(A,X=1)}{f(X=1)}=\frac{P(|Y-X|\le1,X=1)}{f(X=1)}=\frac{P(|Y-1|\le1,X=1)}{f(X=1)}$$

$$=\frac{P(-1<Y-1<1,X=1)}{f(X=1)}=\frac{P(0<Y<2,X=1)}{f(X=1)}=\frac{\int_0^2 f(X=1,y)dy}{\frac{1}{2}}=\frac{\int_0^2\frac{1}{4}dy}{\frac{1}{2}}=\frac{\left[\frac{y}{4}\right]_0^2}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

یادداشت:

....

....

....

....

ب) $f_{Z|X}(0|1)=\dfrac{f(Z=0,X=1)}{f(X=1)}=\dfrac{f(X=Y=1)}{f(X=1)}=\dfrac{\left.\frac{1}{4}\right|_{X=Y=1}}{\left.\frac{1}{2}\right|_{X=1}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

ج) $F_{Z|X}(0|1)=\dfrac{F(Z=0,X=1)}{F(X=1)}=\dfrac{F(X=Y=1)}{F(X=1)}=\dfrac{\left.\frac{xy}{4}\right|_{X=Y=1}}{\left.\frac{x}{2}\right|_{X=1}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

یادآوری: هرگاه یک متغیر تصادفی دارای توزیع یکنواخت پیوسته باشد، تابع چگالی آن یک عدد ثابت خواهد بود؛ بنابراین به ازای هر مقدار X یا Y تابع همان مقدار ثابت خواهد ماند.

برای مثال، در این سؤال:

$X\sim U(0,2) \;\rightarrow\; f(x)=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; f(X=1)=\frac{1}{2}$

$X,Y\sim U(0,2) \;\rightarrow\; f(x,y)=\frac{1}{4} \rightarrow f(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}$

امید ریاضی شرطی

درصورتی‌که X و Y دو متغیر تصادفی **گسسته** باشند، به صورت زیر است:

$$\boxed{E(X\,|\,y)=\sum_{\forall x} x\cdot f(x\,|\,y) \quad , \quad E(Y\,|\,x)=\sum_{\forall y} y\cdot f(y\,|\,x)}$$

یادآوری: اگر $g(X),g(Y)$ تابعی از دو متغیر تصادفی گسسته X و Y باشد:

$E(g(X)|Y)=\sum g(x)f(x|y)\ dx$

$E(g(Y)|X)=\sum g(y)f(y|x)\ dy$

و درصورتی‌که X و Y دو متغیر تصادفی **پیوسته** باشند، به صورت زیر است:

$$\boxed{E(X\,|\,y)=\int x\cdot f(x\,|\,y)dx \quad , \quad E(Y\,|\,x)=\int y\cdot f(y\,|\,x)dy}$$

یادآوری: اگر $g(X),g(Y)$ تابعی از دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y باشد:

$E(g(X)|Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x|y)\ dx$

$E(g(Y)|X)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y|x)\ dy$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۰. **تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است:**

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2 & x+y<1\ ,\ x>0\ ,y>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مقدار امید ریاضی شرطی $E(Y|X=x)$ کدام است؟(برق ـ سراسری ۸۸)

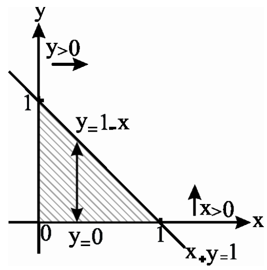
۱) $\frac{1-x}{2}$ ۲) $\frac{1+x}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}-x$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل:گزینه ۱ درست است.

$$E(Y|X)=\int_y yf(y|x)dy=\int_0^{1-x} y.\frac{1}{1-x}dy=\frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}=\frac{1}{(1-x)}.\frac{1}{2}(1-x)^2=\frac{1-x}{2}$$

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{2}{2(1-x)}=\frac{1}{1-x}$$

$$f(x)=\int_y f(x,y)dy=\int_0^{1-x} 2dy=[2y]_0^{1-x}=2(1-x)$$



۱۱. **تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر مفروض است:**

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y<\infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

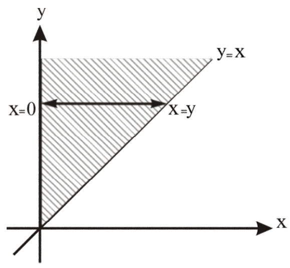
در این صورت مقدار $E\left[X^2|Y=2\right]$ کدام است؟(کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$E\left(X^2|Y=y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.f(x|y)dx=\int_0^y x^2.\frac{1}{y}dx=\frac{1}{y}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^y=\frac{1}{3}y^2 \rightarrow E\left(X^2|Y=2\right)=\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y} \\ f(y)=\int_x f(x,y)dx=\int_0^y e^{-y}dx=\left[xe^{-y}\right]_0^y=ye^{-y} \end{cases}$$



یادداشت:

....

....

....

....

امید ریاضی حاصل‌ضرب دو متغیر

میانگین (امید ریاضی) حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی **گسسته** X و Y به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{E(XY)=\sum\sum x_i \times y_j \times f(x_i, y_j)}$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی **پیوسته** باشند:

$$\boxed{E(XY)=\iint xyf\,(x,y)\,dx\,dy=\iint xy\,f(x,y)\,dy\,dx}$$

نتیجه:

۱- امید مجموع (تفاضل) دو متغیر تصادفی همواره برابر با مجموع (تفاضل) امید آن‌هاست.

$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$ (X و Y مستقل یا وابسته)

۲- امید ضرب دو متغیر تصادفی فقط زمانی که X و Y مستقل باشند، برابر حاصل‌ضرب امید آن‌هاست.

$E(XY)=E(X)E(Y) \overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} X, Y$ مستقل

۳- امید تقسیم دو متغیر تصادفی برابر با تقسیم امید آن‌ها نیست.

$$E\left(\frac{X}{Y}\right)\neq\frac{E(X)}{E(Y)}$$

البته زمانی که X و Y مستقل باشند:

$$E\left(\frac{X}{Y}\right)=E(X)\times E\left(\frac{1}{Y}\right)$$

واریانس حاصل‌ضرب دو متغیر

برای محاسبه واریانس حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی با توجه به تعریف واریانس داریم:

$$Var(XY)=E\left(X^2Y^2\right)-E(XY)^2=E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)-E(X)^2E(Y)^2$$ (**X و Y مستقل**)

۱۲. متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و هم‌توزیع با متوسط برابر با -1 و انحراف معیار برابر با 2 هستند. در این صورت $Var(XY)$ برابر است با:(کامپیوتر ــ سراسری ۸۴)

۱) 24 ۲) 20 ۳) 16 ۴) 8

گزینه ۱ درست است.

$$Var(XY)=E\left(X^2Y^2\right)-E(XY)^2 \overset{X \text{ و } Y \text{ مستقل}}{=\!=\!=} E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)-\left[E(X)E(Y)\right]^2=(5\times5)-(-1\times-1)^2=24$$

$$\begin{cases} Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2 \;\rightarrow\; E\left(X^2\right)=\sigma_x^2+E(X)^2=2^2+(-1)^2=5 \\ \sigma_x^2=\sigma_y^2 \;,\; E(X)=E(Y)=-1 \;\rightarrow\; E\left(X^2\right)=E\left(Y^2\right)=5 \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

فصل چهارم

توزیع‌های گسسته و پیوسته

توزیع برنولی (Bernoulli Distribution)

هرگاه آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را یک بار انجام دهیم، آن‌گاه متغیر تصادفی « X : **تعداد موفقیت** در انجام 1 **بار** آزمایش برنولی» $(x=0,1)$ دارای توزیع **برنولی** است.

پارامترهای توزیع

هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی باشد، پارامتر آن p است و به صورت $X \sim Bin(1,p)$ یا $X \sim B(1,p)$ نمایش داده می‌شود.

ازآنجاکه در توزیع برنولی، تعداد موفقیت (X) در انجام 1 بار آزمایش برنولی فقط می‌تواند یکی از دو وضعیت «صفر موفقیت» یا «1 موفقیت» را داشته باشد، به آن توزیع دونقطه‌ای نیز می‌گویند:

X : تعداد موفقیت در 1 بار انجام آزمایش برنولی	0	1
$f(x)=P(x)$	$q=1-p$	p

احتمال x موفقیت در یک آزمایش برنولی	$f(x)=P(x)=p^x q^{1-x} \quad ; \quad x=0,1$	**تابع احتمال**
میانگین(امید) تعداد موفقیت در یک آزمایش برنولی	$E(X)=\mu=p$	**امید ریاضی (میانگین)**
واریانس تعداد موفقیت در یک آزمایش برنولی	$\sigma_X^2=pq$	**واریانس**

یادداشت:

....

....

....

....

توزیع دوجمله‌ای (Binominal Distribution)

هرگاه یک آزمایش مستقل برنولی را n **بار تکرار** کنیم، (یک نمونه مستقل n تایی از آزمایش برنولی انتخاب کنیم) آن‌گاه متغیر تصادفی« X : **تعداد موفقیت در n بار آزمایش مستقل برنولی**» $(x = 0,1,\ldots,n)$ دارای توزیع **دوجمله‌ای (باینم)** خواهد بود.

پارامترهای توزیع

هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای باشد، پارامترهای آن n و p است و به صورت $X \sim Bin(n,p)$ یا $X \sim B(n,p)$ نمایش داده می‌شود.

احتمال x بار موفقیت در n بار آزمایش برنولی	$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1,2,\ldots, n$	**تابع احتمال**
متوسط تعداد موفقیت مورد انتظار در n بار آزمایش مستقل برنولی	$E(X) = np$	**امید ریاضی (میانگین)**
واریانس تعداد موفقیت در n بار آزمایش مستقل برنولی	$\sigma_X^2 = npq$	**واریانس**
	$\sigma_X = \sqrt{npq}$	**انحراف معیار**
	$M_X(t) = \left(pe^t + q\right)^n$	**تابع مولد گشتاور**

محاسبه احتمال

برای محاسبه احتمال x موفقیت در n بار آزمایش مستقل برنولی (احتمال موفقیت، p و احتمال شکست، q) به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) n ، p و x را مشخص می‌کنیم:

n : تعداد کل آزمایش

p : احتمال وقوع وضعیت مطلوب در هر آزمایش (موفقیت)

x : تعداد مورد نظر وقوع برای وضعیت مطلوب در n بار آزمایش

ب) با استفاده از رابطه زیر احتمال را محاسبه می‌کنیم:

$$P(x) = (p+q)^n = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

با توجه به آنکه همواره $\sum P(x) = 1$ (مجموع مقادیر تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته برابر با 1 است)، برای تابع احتمال دوجمله‌ای، رابطه $\sum_{x=0}^{n} P(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1$ برقرار است و داریم:

$$\underbrace{\binom{n}{0} p^0 q^n}_{P(x=0)} + \underbrace{\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}}_{P(x=1)} + \underbrace{\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}}_{P(x=2)} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n} p^n q^0}_{P(x=n)} = 1$$

یادداشت:

....

....

....

....

درنتیجه برای مثال:

(احتمال عدم موفقیت در n بار آزمایش) $P(X=0)=\binom{n}{0}p^0q^{n-0}=q^n$

(احتمال وقوع 1 موفقیت در n بار آزمایش) $P(X=1)=\binom{n}{1}p^1q^{n-1}=npq^{n-1}$

(احتمال وقوع 2 بار موفقیت در n بار آزمایش) $P(X=2)=\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$

(احتمال وقوع حداکثر 1 موفقیت در n بار آزمایش) $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)$

(احتمال وقوع بیش از 1 موفقیت در n بار آزمایش) $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-P(X=0)-P(X=1)$

(احتمال وقوع حداقل 1 موفقیت در n بار آزمایش) $P(X\ge 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-q^n$

۱. در شش پرتاب مستقل یک تاس مناسب (ایده‌آل) احتمال اینکه عدد 3 لااقل یک بار ظاهر شود، چقدر است؟

(برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\left(\frac{5}{6}\right)^6$ ۲) $1-\frac{5}{6}$

۳) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$ ۴) $\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3+....+\left(\frac{1}{6}\right)^6$

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به ثابت بودن احتمال موفقیت $\left(p=\frac{1}{6}\right)$، توزیع تعداد موفقیت در نمونه($n=6$ پرتاب تاس) دوجمله‌ای است با:

$p=P(\text{ظاهر شدن } 3)=\frac{1}{6}$; $q=P(\text{ظاهر نشدن } 3)=\frac{5}{6}$, $n=6$

$$\begin{cases} P(\text{حداقل یک بار 3 بیاید})=P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{n}{x}p^xq^{n-x}=1-\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6 \\ X:\text{تعداد 3 در } n=6 \text{ بار پرتاب تاس} \end{cases}$$

۲. طول عمر یک لامپ رادیویی برحسب ساعت، یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمالی زیر است. با فرض کارکرد مستقل لامپ‌های موجود در رادیو، احتمال آنکه 2 لامپ از 5 لامپ موجود در رادیو در اولین 150 ساعت کارکرد، معیوب شوند کدام است؟

(برق سراسری ۸۳)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 100 \\ \frac{100}{x^2} & x>100 \end{cases}$$

۱) $\frac{120}{243}$ ۲) $\frac{80}{243}$ ۳) $\frac{60}{243}$ ۴) $\frac{40}{243}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

ابتدا احتمال اینکه لامپ در اولین 150 ساعت کارکرد معیوب شود (یعنی کمتر از 150 ساعت کار کند) را به دست می‌آوریم:

$$P(X<150)=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\,dx=\left[\frac{-100}{x}\right]_{100}^{150}=\frac{-100}{150}+\frac{100}{100}=\frac{1}{3}$$

حال احتمال موفقیت (معیوب شدن) ثابت است، پس توزیع تعداد لامپ معیوب (کمتر از 150 ساعت عمر کند) در نمونه (n لامپ) دوجمله‌ای است با $q=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{3}$, $n=5$.

$$\begin{cases} P(X=2)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{10\times 8}{3^5}=\frac{80}{243} \\ X: \text{تعداد لامپ معیوب در } n=5 \text{ لامپ} \end{cases}$$

۳ . در یک کارخانه تولیدی لامپ، 5 درصد لامپ‌های تولیدی معیوب است. برای کنترل، هر روز 10 لامپ را به صورت تصادفی انتخاب کرده، آزمایش می‌کنند، انتظار می‌رود چند روز از سال بیش از 3 لامپ معیوب مشاهده شود؟(کامپیوتر ــ سراسری ۸۱)

۱) 1.75　　۲) 0.75　　۳) 0.375　　۴) 0.175

حل:گزینه ۳ درست است.

احتمال موفقیت (معیوب بودن لامپ) ثابت است $(p=0.05)$، بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه $(n=10)$ دوجمله‌ای است با $p=0.05$, $q=0.95$, $n=10$.

ابتدا احتمال بیش از 3 لامپ معیوب در یک روز را محاسبه می‌کنیم:

$$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)=1-\sum_{x=0}^{3}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$=1-\binom{10}{0}(0.05)^0(0.95)^{10}-\binom{10}{1}(0.05)^1(0.95)^9-\binom{10}{2}(0.05)^2(0.95)^8-\binom{10}{3}(0.05)^3(0.95)^7=0.0010285$$

در سؤال خواسته شده که تعداد روزهایی از سال را که انتظار داریم بیش از 3 لامپ معیوب مشاهده شود به دست آوریم: اولاً، تعداد مورد انتظار همان امید ریاضی است. ثانیاً، احتمال اینکه در یک روز بیش از سه لامپ معیوب باشد، به دست آمده است؛ بنابراین احتمال موفقیت ثابت است پس دوباره توزیع تعداد موفقیت در نمونه ($n=365$ روز) دوجمله‌ای است و میانگین (مقدار مورد انتظار) آن برابر است با:

$$\begin{cases} \mu=np=365\times 0.0010285=0.375 \\ n=365\ ,\ p=P(X>3)=0.0010285 \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۴. فرض کنید X متغیری تصادفی است که دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[0,1]$ است. از 5 بار نمونه‌گیری احتمال اینکه دقیقاً 3 بار X در فاصله $[0.3\ ,\ 0.8]$ قرار بگیرد برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{32}$

۳) $\frac{10}{32}$ ۴) $\binom{5}{3}\int_{0.3}^{0.8}\left(\frac{1}{2}\right)dx$

حل:گزینه ۳ درست است.

ابتدا احتمال اینکه X در فاصله $(0.3,0.8)$ قرار بگیرد را به دست می‌آوریم:

یادآوری:

۱) هرگاه X دارای توزیع یکنواخت در فاصله (a,b) باشد داریم: $f(x)=\frac{1}{b-a}\ ;\ a<x<b$

۲) احتمال در فاصله، برابر انتگرال در فاصله است. $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$

$$1)\,f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{1-0}=1\quad;\ 0<x<1$$

$$2)\ \ P(0.3<X<0.8)=\int_{0.3}^{0.8}(1)dx=[x]_{0.3}^{0.8}=0.8-0.3=0.5$$

حال احتمال موفقیت (در فاصله مورد نظر) ثابت است $(p=0.5)$؛ بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه $(n=5)$ دوجمله‌ای است با $n=5\ ,\ p=q=\frac{1}{2}$.

$$P(Y=3)=\binom{n}{y}p^n q^{n-y}=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$$

۵. دو تاس سالم را 6 بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک بار مجموع دو خال 7 را مشاهده کنیم، کدام است؟

۱) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$ ۲) $1-\left(\frac{1}{6}\right)^6$ ۳) $\left(\frac{1}{6}\right)^6$ ۴) $\left(\frac{5}{6}\right)^6$

حل:گزینه ۱ درست است.

وقوع مجموع دو خال 7 در هر بار پرتاب دو تاس، یک آزمایش برنولی با احتمال p است؛ بنابراین:

کل حالات: $n(S)=6\times 6=36$

حالات مساعد: $A=\{(1,6),(6,2),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}\ \ \rightarrow\ \ n(A)=6$

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

یادداشت:

....

....

....

....

با توجه به ثابت بودن احتمال موفقیت $\left(p=\frac{1}{6}\right)$، توزیع تعداد موفقیت در نمونه($n=6$ پرتاب تاس) دوجمله‌ای است با:

$p=P($ حداقل یک بار مجموع دو خال 7 $)=\frac{1}{6}$; $q=P($ظاهر نشدن$)=\frac{5}{6}$, $n=6$

$P($ حداقل یک بار مجموع دو خال 7 $)=P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$

توزیع هندسی (Geometric Distribution)

هرگاه یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را به طور مستقل آن‌قدر تکرار کنیم تا به **اولین موفقیت** برسیم (بالاخره موفق شویم)، آن‌گاه متغیر تصادفی« X : **تعداد آزمایشات** لازم برای رسیدن به **اولین موفقیت**» $(x=1,2,\ldots)$ دارای توزیع **هندسی** خواهد بود.

پارامترهای توزیع

هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع هندسی باشد، پارامتر آن p است و به صورت $X\sim G(p)$ یا $X\sim Ge(p)$ نمایش داده می‌شود.

احتمال وقوع اولین موفقیت در xامین آزمایش (احتمال آنکه در آزمایش xام بالاخره موفق شویم)	$P(x)=q^{x-1}\cdot p$ $x=1,2,\ldots$	**تابع احتمال**
میانگین تعداد آزمایش مورد انتظار برای رسیدن به اولین موفقیت	$E(X)=\frac{1}{p}$	**امید ریاضی (میانگین)**
واریانس تعداد آزمایش لازم برای رسیدن به اولین موفقیت	$\sigma_X^2=\frac{q}{p^2}$	**واریانس**
	$M_X(t)=\frac{pe^t}{1-qe^t}$	**تابع مولد گشتاور**

محاسبه احتمال

یادآوری:

هر تصاعد هندسی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} a_1,a_2,\ldots,a_n \rightarrow a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ldots a_1q^{n-1} \\ q: \text{قدرنسبت} \end{cases}$$

و مجموع هر تصاعد هندسی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\xrightarrow[0<q<1]{n\rightarrow\infty}=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}}$$

یادداشت:

....

....

....

....

با توجه به آنکه همواره $\sum P(x)=1$ (مجموع مقادیر تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته برابر با 1 است)، برای تابع احتمال هندسی رابطه $\sum_{x=1}^{\infty} P(x)=\sum_{x=1}^{\infty} p\,q^{x-1}=1$ برقرار است و داریم:

$$\underbrace{p}_{P(X=1)}+\underbrace{qp}_{P(X=2)}+\underbrace{q^2p}_{P(X=3)}+\underbrace{q^3p}_{P(X=4)}\cdots=1$$

برای مثال:

۱) سه آزمایش برای اولین موفقیت لازم باشد (سومین آزمایش، اولین موفقیت). $P(X=3)=q^2p$

۲) حداکثر 2 آزمایش برای اولین موفقیت لازم باشد. $P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=p+qp$

۳) حداقل 2 آزمایش برای اولین موفقیت لازم باشد.

روش اول:

$$P(X\ge 2)=1-P(X=1)=1-p=q$$

روش دوم:

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)+\ldots=qp+q^2p+\ldots=\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}}=\frac{qp}{1-q}=q$$

۴) بیش از 2 آزمایش برای اولین موفقیت لازم باشد.

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)+\ldots=q^2p+q^3p+\ldots=\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}}=\frac{q^2p}{1-q}=q^2$$

۵) تعداد آزمایش لازم برای رسیدن به اولین موفقیت، فرد باشد.

$$P(\text{فرد } X)=P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)+\ldots=p+q^2p+q^4p+\ldots=\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}}=\frac{p}{1-q^2}$$

۶. احتمال اینکه معادله $aX^2-4X+a=0$ دو ریشه غیرمنفی داشته باشد چقدر است؟ که در آن a تعداد دفعاتی است که یک سکه را پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر بیاید.(کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{7}{8}$

حل:گزینه ۳ درست است.

می‌خواهیم معادله زیر دارای دو ریشه غیرمنفی باشد، یعنی:

$$aX^2-4X+a=0 \xrightarrow[\Delta\ge 0]{\text{دو ریشه غیر منفی}} b^2-4ac\ge 0 \rightarrow 16-4a^2\ge 0 \rightarrow a^2\le 4 \xrightarrow{a>0} a\le 2$$

یادداشت:

....

....

....

....

حال احتمال موفقیت ثابت است (شیر آمدن سکه: $p=\frac{1}{2}$) بنابراین توزیع a یعنی تعداد تکرار برای رسیدن به اولین موفقیت (شیر)، توزیع هندسی است با $p=q=\frac{1}{2}$.

$$P(a\le 2)=\sum_{a=1}^{2} pq^{a-1}=P(a=1)+P(a=2)=p+pq=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

۷ . احتمال اینکه فردی در یک امتحان رانندگی قبول بشود $\frac{1}{3}$ است. احتمال اینکه این فرد برای قبول شدن حداقل 3 بار امتحان دهد چقدر است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{27}$ ۳) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ۴) $\frac{19}{27}$

حل:گزینه ۳ درست است.

توجه کنید که احتمال موفقیت (قبولی در رانندگی) ثابت است $\left(p=\frac{1}{3}\right)$؛ بنابراین توزیع تعداد تکرار برای رسیدن به اولین موفقیت، هندسی است با $p=\frac{1}{3}\ ,\ q=\frac{2}{3}$.

X : تعداد امتحان تا قبولی در رانندگی

$$P(\text{حداقل 3 بار})=P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-P(X=1)-P(X=2)=1-\sum_{x=1}^{2}pq^{x-1}=1-pq^0-pq^1$$

$$=1-\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

توزیع فوق هندسی (Hypergeometric Distribution)

هرگاه از یک **جامعه محدود** N تایی که K تای آن موفقیت و $N-K$ تای آن شکست است، یک نمونه n تایی **بدون جایگذاری** انتخاب کنیم، آن‌گاه « X : تعداد موفقیت در نمونه n تایی» دارای توزیع **فوق هندسی** است.

پارامترهای توزیع

هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع فوق هندسی باشد، پارامترهای آن N، n و k هستند و به صورت $X\sim HG(N,k,n)$ نمایش داده می‌شود.

یادداشت:

....

....

....

....

احتمال آنکه در یک نمونه n تایی (بدون جایگذاری)، x تا متعلق به مجموعه k (موفقیت) باشد.	$P(x)=\dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $x=0,1,2,....,\min(n,k)$	**تابع احتمال**
متوسط تعداد موفقیت در نمونه n تایی با احتمال موفقیت $p=\dfrac{K}{N}$	$E(X)=np$	**امید ریاضی(میانگین)**
واریانس تعداد موفقیت در نمونه n تایی با احتمال موفقیت $p=\dfrac{K}{N}$ ضریب تصحیح واریانس: $\dfrac{N-n}{N-1}$	$\sigma_X^2=\dfrac{N-n}{N-1}npq$	**واریانس**

ضریب تصحیح واریانس $\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$

کمیت $\dfrac{N-n}{N-1}$ به عنوان ضریب تصحیح برای واریانس توزیع فوق هندسی به کار برده می‌شود و همان‌طورکه در ادامه خواهیم دید، در بعضی شرایط $\left(\dfrac{n}{N}\le 0.05\right)$ از این ضریب چشم‌پوشی می‌شود.

تقریب توزیع فوق هندسی به دوجمله‌ای

زمانی که N (حجم جامعه) بزرگ و n (حجم نمونه) کوچک شود (بنا بر قانون سرانگشتی n از 5 درصد N تجاوز نکند)، تفاوت چندانی بین نمونه‌گیری بدون جایگذاری و نمونه‌گیری با جایگذاری وجود ندارد؛ در این وضعیت می‌توان برای تقریب احتمال‌های توزیع فوق هندسی از توزیع دوجمله‌ای پارامترهای n و $p=\dfrac{K}{N}$ استفاده کرد. بدیهی است در این شرایط از ضریب تصحیح $\dfrac{N-n}{N-1}$ برای واریانس نیز چشم‌پوشی می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} E(X)=np=n\cdot\dfrac{k}{N} \\ \sigma_X^2=npq=n\cdot\dfrac{k}{N}\left(1-\dfrac{k}{N}\right) \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

هرگاه در یک توزیع فوق هندسی، حجم نمونه (n) را کاهش و حجم جامعه (N) را افزایش دهیم، به طوری که $\frac{n}{N} \le 0.05$، آن‌گاه توزیع دوجمله‌ای تقریب مناسبی برای توزیع فوق هندسی است و از ضریب تصحیح واریانس $\frac{N-n}{N-1}$ چشم‌پوشی می‌کنیم. واضح است در این شرایط روابط زیر برقرار است:

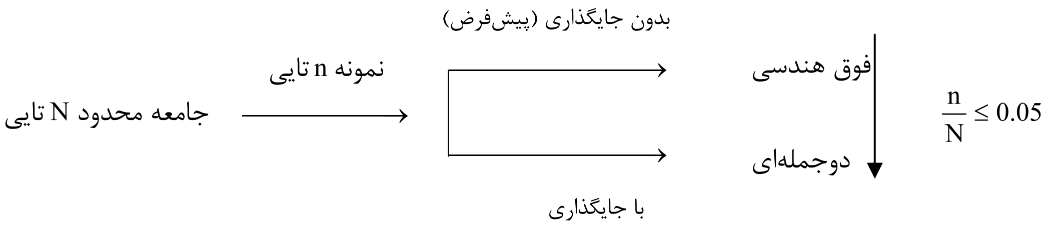
$$\frac{n}{N} \le \frac{5}{100} \rightarrow \begin{cases} n \le \%5N & \text{نمونه از 5\% جامعه تجاوز نمی‌کند.} \\ 20n \le N & \text{جامعه حداقل 20 برابر نمونه است.} \end{cases}$$

دقت کنید!

هرگاه $\frac{n}{N} > 0.05$ یا $n > 0.05N$ باشد، تقریب دوجمله‌ای دیگر مناسب نیست و از ضریب تصحیح $\frac{N-n}{N-1}$ در واریانس چشم‌پوشی نمی‌شود.

نتیجه:

برای تعیین توزیع «**تعداد موفقیت در نمونه**» همواره:



نکات مهم توزیع فوق هندسی

اگر X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای « m_1 و p » و Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای « m_2 و p » باشد، آن‌گاه $Z = (X = v | X + Y = t)$ که در آن v و t اعداد ثابت هستند،دارای توزیع فوق هندسی با پارامترهای $n = t$ ،$k = v$ و $N = m_1 + m_2$ است.

شرایط	متغیر	توزیع متغیر
$X \sim Bin(m_1, p), Y \sim Bin(m_2, p)$ X و Y مستقل‌اند	$Z = (X = v \| X + Y = t)$	$Z \sim HG(N = m_1 + m_2, k = v, n = t)$

۸. اگر X و Y متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای مستقل با پارامترهای یکسان n و p باشند، تابع چگالی احتمال شرطی X، به شرط X+Y=m، یعنی $P(X = k | X + Y = m)$ برابر کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{m}}$ ۲) $\frac{\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$ ۳) $\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$ ۴) $\frac{k}{m}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases} X \sim B(n,p) \quad \to \quad P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} \\ Y \sim B(n,p) \quad \to \quad P(Y=y)=\binom{n}{y}p^{y}q^{n-y} \end{cases}$$

یادآوری:

۱) اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند: $1)\ P(X=x\ ,\ Y=y)=P(X=x)\ .\ P(Y=y)$

۲) هرگاه $X_1,...,X_n$ مستقل از هم دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n_i و p باشند، مجموع X_iها دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $\sum n_i$ و p است.

$$\to \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(\sum n_i\ ,p\right) \quad \to \quad X+Y \sim B\ (2n\ ,\ p)\ \ 2) X_1 ... X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} B(\ n_i\ ,p)$$

$$P(X=k|X+Y=m)=\frac{P(X=k,X+Y=m)}{P(X+Y=m)}=\frac{P(X=k,Y=m-k)}{P(X+Y=m)}=\frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)}$$

$$=\frac{\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}\times\binom{n}{m-k}p^{m-k}\ q^{n-(m-k)}}{\binom{2n}{m}p^{m}q^{2n-m}}=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}p^{m}q^{2n-m}}{\binom{2n}{m}p^{m}q^{2n-m}}=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$$

تابع به‌دست‌آمده، تابع چگالی توزیع فوق هندسی است با $N=2n\ ,\ n=m\ ,\ k=K$؛ بنابراین ممکن بود در گزینه‌ها به‌جای شکل تابع، اسم توزیع را بیاورند.

۹. در میان 100 تراشه تولیدی 4 تراشه معیوب است. یک نمونه تصادفی 10 تایی، بدون جایگذاری از این تراشه‌ها انتخاب می‌کنیم. احتمال تقریبی این که یک تراشه معیوب در نمونه انتخابی باشد، کدام است؟

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{5}{2}\left(\frac{24}{25}\right)^{3}$ ۲) $\frac{3\times 2^{10}}{5^{7}}$ ۳) $\left(\frac{24}{25}\right)^{3}$ ۴) $\frac{2^{10}}{5^{7}}$

حل: گزینه ؟ درست است.

ازآنجاکه انتخاب یک نمونه $(n=10)$، بدون جایگذاری از یک جامعه محدود $(N=100)$ دارای توزیع فوق هندسی است، داریم:

$$P(\text{معیوب } 1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{96}{9}}{\binom{100}{10}}=0.299$$

یادداشت:

....

....

....

....

حال اگر $\frac{n}{N} \le \frac{5}{100}$ باشد، آنگاه می‌توان از تقریب دوجمله‌ای برای حل مسئله به صورت زیر استفاده کرد:

$$P(\text{معیوب } 1) = \binom{10}{1}\left(\frac{4}{100}\right)^1\left(\frac{96}{100}\right)^9 = 0.277$$

که البته در این مسئله $\frac{n}{N} = \frac{10}{100} \not\le \frac{5}{100}$ و نمی‌توان از تقریب نیز استفاده کرد.

سازمان سنجش در کلید اولیه، گزینه ۲ را درست اعلام کرده است.

توزیع پواسون (Poisson Distribution)

فرض کنید تعداد اتفاقات در یک فاصله مشخص از زمان یا مکان مورد نظر باشد؛ در این صورت «X : **تعداد اتفاقات** در یک بازه **زمانی** یا **مکانی**» $(X = 0,1,2,\ldots)$ دارای **توزیع پواسون** است.

پارامترهای توزیع

هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون باشد، پارامتر آن λ است و به صورت $X \sim P(\lambda)$ نمایش داده می‌شود.

احتمال x اتفاق در یک بازه زمانی یا مکانی با متوسط λ	$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $x = 0,1,2,\ldots$	**تابع احتمال**
متوسط تعداد اتفاقات در بازه زمانی یا مکانی	$E(X) = \lambda$	**امید ریاضی (میانگین)**
واریانس تعداد اتفاقات در بازه زمانی یا مکانی	$\sigma_X^2 = \lambda$	**واریانس**
	$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$	**انحراف معیار**
	$M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$	**تابع مولد گشتاور**

توجه: توزیع پواسون تنها توزیعی است که در آن میانگین و واریانس توزیع با هم برابرند و هر دو مساوی پارامتر توزیع (λ) هستند.

پارامتر پواسون

متوسط تعداد اتفاقات در هر **بازه زمانی یا مکانی** به عنوان پارامتر توزیع پواسون شناخته شده و با نماد λ نمایش داده می‌شود.

اگر $10 \le \lambda \le 0$ باشد، امکان استفاده از توزیع پواسون برای حل مسایل مناسب است، در غیر این صورت $(\lambda > 10)$ بهتر است از تقریب نرمال که بعداً در توزیع نرمال بررسی می‌شود، استفاده شود.

یادداشت:

....

....

....

....

محاسبه احتمال در پواسون

الف) مقدار λ (پارامتر پواسون) را با توجه به زمان یا مکان مشخص می‌کنیم؛ درصورتی‌که زمان یا مکان تغییر کند، با استفاده از تناسب مقدار λ را به دست می‌آوریم.

برای مثال، اگر $\lambda = 2$ مشتری در دقیقه باشد، در 20 ثانیه داریم:

زمان	متوسط تعداد مشتری (λ)
1 دقیقه = 60 ثانیه	2
20 ثانیه	?

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\times 20}{60} = \frac{2}{3}$$

و در 5 دقیقه خواهیم داشت:

زمان	متوسط تعداد مشتری (λ)
1 دقیقه	2
5 دقیقه	?

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\times 5}{1} = 10$$

ب) $\begin{cases} P(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ x = 0,1,2,\ldots \end{cases}$، احتمال وقوع x اتفاق در واحد زمان یا مکان است.

با توجه به آنکه همواره $\sum P(x) = 1$ (مجموع مقادیر تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته برابر با 1 است)، برای تابع احتمال پواسون رابطه $\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1$ برقرار است و داریم:

$$\underbrace{\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}}_{P(X=0)} + \underbrace{\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}}_{P(X=1)} + \underbrace{\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}}_{P(X=2)} + \cdots = 1$$

$$\begin{cases} \text{احتمال عدم وقوع اتفاق} = P(X=0) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} \\ \text{احتمال وقوع 1 اتفاق} = P(X=1) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda} \\ \text{احتمال وقوع حداکثر 1 اتفاق} = P(X\le 1) = P(X=0)+P(X=1) = (\lambda+1)e^{-\lambda} \\ \text{احتمال وقوع حداقل 1 اتفاق} = P(X\ge 1) = 1-P(X=0) = 1-e^{-\lambda} \\ \text{احتمال وقوع بیش از 1 اتفاق} = P(X>1) = 1-P(X=0)-P(X=1) = 1-(\lambda+1)e^{-\lambda} \\ \vdots \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

تقریب توزیع دوجمله‌ای به پواسون

گاهی در یک توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p شرایطی پیش می‌آید که در آن‌تعداد تکرار آزمایش برنولی (n) زیاد و احتمال موفقیت در هر آزمایش (p) کم است، به طوری که یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

$$\begin{cases} \text{I)} \quad n \ge 20\ ,\ \ p \le 0.05 \\ \text{II)} \quad n \ge 100\ ,\ \ np \le 10 \end{cases}$$

بدیهی است در این شرایط محاسبه احتمال مشکل است. در این وضعیت می‌توانیم به‌جای استفاده از توزیع دوجمله‌ای از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = np$ بهره‌گیریم تا محاسبات ساده‌تر انجام شود.

هرگاه در یک توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p، یکی از شرایط زیر برقرار باشد آن‌گاه توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = np$ تقریب مناسبی برای توزیع دوجمله‌ای است.

$$X \sim Bin(n,p) \xrightarrow[(II):\ n \ge 100\ ,np \le 10]{(I):\ n \ge 20,\ p \le 0.05} X \sim P(\lambda = np)$$

۱۰. تعداد مشتریانی که هر روز به یک فروشگاه برای خرید مراجعه می‌کنند، یک متغیر تصادفی پواسون با متوسط 120 نفر است. اگر ساعات کار این فروشگاه از 9 صبح تا 7 بعدازظهر باشد، آن‌گاه احتمال آنکه در یک فاصله‌زمانی ده دقیقه‌ای حداقل دو نفر به فروشگاه مراجعه کنند برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\dfrac{e-3}{e}$ ۲) $\dfrac{e}{e+3}$ ۳) $\dfrac{e^2}{e^2+3}$ ۴) $\dfrac{e^2-3}{e^2}$

حل:گزینه ۴ درست است.

چون ساعت کار فروشگاه از 9 صبح تا 7 بعدازظهر است (10 ساعت)، تعداد مشتری‌های ورودی در طول 10 ساعت دارای توزیع پواسون با $\mu = \lambda = 120$ نفر در 10 ساعت است.

زمان	متوسط تعداد مشتری (λ)
10 ساعت = 600 دقیقه	120
10 دقیقه	?

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{120 \times 10}{600} = 2$$

یعنی به طور متوسط $\lambda = 2$ مشتری در 10 دقیقه وارد می‌شود و در نتیجه:

$$\begin{cases} P(X \ge 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \sum\limits_{x=0}^{1} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1 - \dfrac{e^{-2}2^0}{0!} - \dfrac{e^{-2}2^1}{1!} = 1 - 3e^{-2} = \dfrac{e^2-3}{e^2} \\ X: \text{تعداد مشتری در 10 دقیقه} \quad , \quad \lambda = 2 \end{cases}$$

۱۱. فرض کنید در یک کارخانه در هر سه ساعت از خط تولید کارخانه، 6 تولید به طور معیوب ساخته می‌شود. احتمال اینکه در هر ساعت، 2 تولید به طور معیوب ساخته شود، کدام است؟ (تعداد تولیدات در هر ساعت خیلی زیاد است.)(کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) e^{-1} ۲) $2e^{-1}$ ۳) e^{-2} ۴) $2e^{-2}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

یادآوری: توزیع تعداد اتفاقات در واحد زمان، پواسون است $P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x=0,1,2,...$

$\lambda=6$ تولید معیوب در 3 ساعت است و تعداد تولید معیوب در 1 ساعت خواسته شده؛ بنابراین:

زمان	متوسط تعداد معیوب (λ)
3 ساعت	6
1 ساعت	?

$$\Rightarrow \lambda=\frac{6\times 1}{3}=2$$

یعنی به طور متوسط $\lambda=2$ تولید معیوب در 1 ساعت ساخته می‌شود؛ در نتیجه:

$$\begin{cases} P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \xrightarrow[\lambda=2]{x=2} P(X=2)=\frac{e^{-2}2^{2}}{2!}=2e^{-2} \\ X: \text{تعداد تولید معیوب در یک ساعت} \quad , \quad \lambda=2 \end{cases}$$

توزیع نمایی (Exponential Distribution)

تعریف: درصورتی‌که تعداد اتفاقات در واحد زمان دارای توزیع پواسون با میانگین λ اتفاق باشد،آن‌گاه متغیر تصادفی« X : **زمان** بین دو اتفاق متوالی یا **زمان** لازم برای اولین اتفاق» $(x \geq 0)$ دارای **توزیع نمایی** با میانگین زمان $\frac{1}{\lambda}$ است.

پارامترهای توزیع

هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی باشد، پارامتر آن λ است و به صورت $X \sim E(\lambda)$ نمایش داده می‌شود.

تابع احتمال	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad ; \quad 0 \leq x < \infty$	X زمان لازم برای وقوع اتفاق بعدی زمان لازم برای وقوع اولین اتفاق زمان لازم بین دو اتفاق متوالی
امید ریاضی (میانگین)	$E(X)=\mu=\frac{1}{\lambda}$	متوسط زمان لازم برای وقوع اولین اتفاق یا دو اتفاق متوالی
واریانس	$\sigma_X^2=\frac{1}{\lambda^2}$	واریانس زمان لازم برای وقوع اولین اتفاق یا دو اتفاق متوالی
انحراف معیار	$\sigma_X=\frac{1}{\lambda}$	
تابع مولد گشتاور	$M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$	

یادداشت:

....

....

....

....

نکات مهم توزیع نمایی

	شرایط	متغیر	توزیع متغیر
۱	$X_1 \sim Exp(\lambda_1),\ldots,X_n \sim Exp(\lambda_n)$	$Y=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$	$Y \sim Exp(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$

توزیع گاما (Gamma)

تعریف: توزیع گاما به عنوان مدت‌زمان انتظار برای r اتفاق در نظر گرفته می‌شود، به این صورت که اگر اتفاقات به طور تصادفی در طول زمان رخ دهند، آن‌گاه مدت‌زمانی که فرد باید منتظر باشد تا r اتفاق رخ دهد، دارای توزیع گاما با پارامترهای (r,λ) است.

پارامترهای توزیع

هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما باشد، پارامترهای آن λ, r است و به صورت $X \sim G(r,\lambda)$ یا $X \sim \Gamma(r,\lambda)$ نمایش داده می‌شود.

X: مدت‌زمان انتظار برای r اتفاق	$f(x)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} \quad ; \quad 0<x<\infty \quad , \quad r\geq 1$ $\Gamma(r)=(r-1)!$	**تابع احتمال**
متوسط مدت‌زمان انتظار برای r اتفاق	$E(X)=\frac{r}{\lambda}$	**امید ریاضی (میانگین)**
واریانس مدت‌زمان انتظار برای r اتفاق	$\sigma_X^2=\frac{r}{\lambda^2}$	**واریانس**
	$\sigma_X=\frac{\sqrt{r}}{\lambda}$	**انحراف معیار**
	$M_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r$	**تابع مولد گشتاور**

توزیع نرمال (Normal Distribution)

تعریف: اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، تابع چگالی و تابع مولد گشتاور آن به شرح زیر است:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \quad -\infty<x<+\infty$$

$$M_X(t)=E(e^{tx})=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

یادداشت:

....

....

....

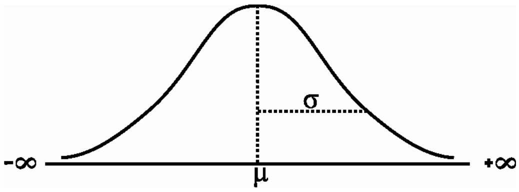
....

تابع چگالی نرمال با μ و σ ثابت:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{\frac{-x^2-\mu^2+2x\mu}{2\sigma^2}}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}}}_{k}.e^{\frac{-x^2+2x\mu}{2\sigma^2}}=ke^{\frac{-x^2+2x\mu}{2\sigma^2}}$$

پارامترهای توزیع

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال باشد، پارامترهای آن μ (میانگین) و σ^2 (واریانس) است و از شکل نمادین زیر برای نمایش آن استفاده می‌شود:



$$\boxed{X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)}$$

با توجه به تابع مولد گشتاور توزیع نرمال، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\mu=E(X)=0\longrightarrow E\left(X^3\right)=E\left(X^5\right)=\cdots=0$$

به عبارت بهتر هر گاه میانگین $\mu=E(X)$ در یک توزیع نرمال برابر صفر باشد، میانگین (امید ریاضی) تمام توان‌های فرد نیز برابر صفر می‌شود.

۱۲. اگرمتغیر تصادفی X نرمال به فرم $X\sim N\left(4,\frac{1}{2}\right)$ باشد، $E\left(e^{2X}\right)$ کدام است؟

۱) $e^{\frac{1}{2}}$ ۲) e^4 ۳) e^9 ۴) e^8

حل: گزینه ۳ درست است.

با توجه به تابع مولد گشتاور نرمال داریم:

$$E\left(e^{2X}\right)\overset{t=2}{=\!=}e^{\mu\times2+\frac{1}{2}\sigma^2(2)^2}\overset{\mu=4\ ,\ \sigma^2=\frac{1}{2}}{=\!=\!=}e^{4\times2+\frac{1}{2}\times2}=e^9$$

توزیع نرمال استاندارد (Standard Normal Distribution)

ازآنجاکه انتگرال‌گیری از تابع چگالی نرمال برای محاسبه احتمال در فاصله محدود غیرممکن است، با استفاده از روش‌های عددی، جدولی به دست آمده است که مقادیر احتمال مربوط به توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس 1 در آن قابل محاسبه است؛ بنابراین برای محاسبه احتمال در هر توزیع نرمال به صورت $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ ابتدا باید توزیع نرمال را به صورت $N(0,1)$ تبدیل کنیم، سپس از روی جدول نرمال استاندارد مقدار عددی احتمال را به دست آوریم.

یادداشت:

....

....

....

....

تبدیل نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ به نرمال استاندارد $N(0,1)$

با استفاده از تغییر متغیر $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$، تابع نرمال $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ به صورت زیر به تابع نرمال استاندارد $Z \sim N(0,1)$ تبدیل می‌شود:

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = E\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X)}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

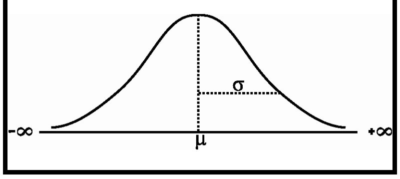
$$\sigma^2(Z) = \sigma^2\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \sigma^2\left(\frac{X}{\sigma} - \underbrace{\cancel{\frac{\mu}{\sigma}}}_{0}\right) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \sigma_X^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

درنتیجه:

نرمال

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

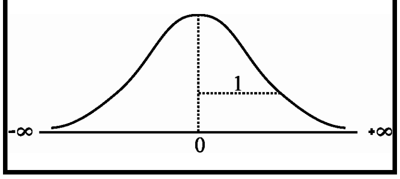


$\xrightarrow{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$

نرمال استاندارد

$Z \sim N(0,1)$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}} Z \sim N(0,1)$$

محاسبه احتمال در توزیع نرمال

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال به صورت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد، برای محاسبه احتمال در هر بازه دلخواه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) با استفاده از رابطه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$، احتمال مورد نظر را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم.

یادداشت:

....

....

....

....

ب) به کمک جدول نرمال استاندارد، مقدار احتمال مورد نظر را به دست می‌آوریم:

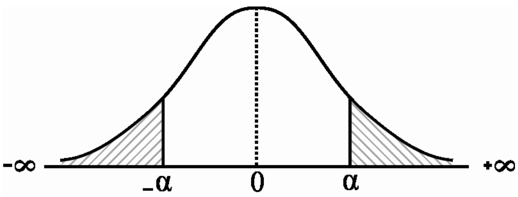
$$P(X<a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X>a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=1-\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

استفاده معکوس از جدول نرمال استاندارد

درصورتی‌که α مقدار ثابتی در بازه $-\infty<z<+\infty$ باشد، با توجه به شکل زیر داریم:



$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P(Z>\alpha)=P(Z<-\alpha) \\ P(Z<\alpha)=P(Z>-\alpha) \end{array}}$$

به عبارت دیگر اگر A و B مقادیر ثابتی در بازه $-\infty<z<+\infty$ باشند، آن‌گاه:

$$\begin{array}{l} P(Z>A)=P(Z<B) \\ P(Z<A)=P(Z>B) \end{array} \rightarrow A=-B$$

$$\begin{array}{l} P(Z>A)=P(Z>B) \\ P(Z<A)=P(Z<B) \end{array} \rightarrow A=B$$

تقریب توزیع‌ها به وسیله توزیع نرمال

در شرایط مشخصی، توزیع‌های گسسته پواسون و دوجمله‌ای قابل تقریب به توزیع پیوسته نرمال هستند؛ یعنی در مواردی می‌توان از توزیع نرمال به‌جای این توزیع‌ها استفاده کرد.

یادداشت:

....

....

....

....

فصل پنجم

توزیع‌های نمونه‌ای، برآورد و آزمون

روش‌های برآورد نقطه‌ای

برای تخمین پارامتر مجهول θ به صورت نقطه‌ای می‌توان به یکی از روش‌های زیر عمل کرد:

۱- روش گشتاوری

۲- روش حداکثر درستنمایی

۱- روش گشتاوری (Method of Moment Estimation)

درصورتی‌که‌به دنبال تخمین پارامترهای مجهول جامعه از روش گشتاوری باشیم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) به تعداد پارامترهای مجهول خواسته‌شده، **امید ریاضی** را **برحسب پارامتر مجهول** با استفاده ازتابع داده‌شده به شرح زیر به دست می‌آوریم:

اگر 1 پارامتر مجهول باشد، $E(X)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E(X)=\sum\!\!\!\!\int xf(x)dx$$

اگر 2 پارامتر مجهول باشد، $E(X)$ و $E(X^2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E(X)=\sum\!\!\!\!\int xf(x)dx \quad , \quad E(X^2)=\sum\!\!\!\!\int x^2f(x)dx$$

یادداشت:

و به همین ترتیب اگر n پارامتر مجهول باشد، $E(X)$ تا $E(X^n)$ را محاسبه می‌کنیم.

ب) به تعداد پارامترهای مجهول خواسته‌شده، **میانگین نمونه** را که مقداری **معلوم** است به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

اگر 1 پارامتر مجهول باشد، $\bar{X}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

اگر 2 پارامتر مجهول باشد، $\bar{X}$ و $\overline{X^2}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} \quad , \quad \overline{X^2} = \frac{\sum X_i^2}{n}$$

و به همین ترتیب اگر n پارامتر مجهول باشد، $\bar{X}$ تا $\overline{X^n}$ را محاسبه می‌کنیم.

ج) با توجه به روابط به‌دست‌آمده از مراحل (الف) و (ب)، دستگاه معادلات زیر را تشکیل می‌دهیم و پارامترهای مجهول را برحسب میانگین نمونه محاسبه می‌کنیم:

اگر 1 پارامتر مجهول باشد، مقدار پارامتر را از معادله زیر برآورد می‌کنیم:

$$E(X) = \bar{X}$$

اگر 2 پارامتر مجهول باشد، مقدار پارامترها را از دو معادله زیر برآورد می‌کنیم:

$$E(X) = \bar{X} \ , \ E(X^2) = \overline{X^2}$$

و به همین ترتیب اگر n پارامتر مجهول باشد، مقدار پارامترها را از n معادله زیر برآورد می‌کنیم:

$$E(X) = \bar{X} \ , \ldots , \ E(X^n) = \overline{X^n}$$

دقت کنید!

اگر داده‌های نمونه در مسئله وجود نداشته باشد، از همان $\bar{X}$ و $\overline{X^2}$ و $\cdots$ استفاده می‌کنیم.

۲- روش حداکثر درستنمایی (MLE: Maximum Likelihood Estimation)

اگر $f_X(x;\theta)$ تابع احتمال متغیر تصادفی X با پارامتر مجهول θ از جامعه‌ای باشد، برای تخمین پارامتر θ به روش «حداکثر درستنمایی» به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) تابع احتمال درستنمایی $L(\theta)$ را بر اساس یک نمونه مستقل n تایی $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \theta) = f(x_1;\theta) \times \ldots \times f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} (x_i;\theta)$$

تبصره ۱: در شرایطی که تابع درستنمایی به‌دست‌آمده در قسمت (الف) به صورت توانی باشد، برای راحتی محاسبات در مرحله بعد می‌توان از آن لگاریتم (Ln) گرفت.

ب) حال باید به دنبال نقطه‌ای باشیم که به ازای آن تابع احتمال درستنمایی $L(\theta)$ ماکزیمم شود؛ این نقطه همان «برآورد حداکثر درستنمایی» برای پارامتر مجهول θ است.

یادداشت:

....

....

....

....

تبصره ۲: یک روش معمول برای به دست آوردن نقطه ماکزیمم آن است که از تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار دهیم؛ در این وضعیت نقطه به‌دست‌آمده (بحرانی) می‌تواند همان مقدار ماکزیمم تابع درستنمایی باشد؛ به عبارت دیگر:

$L'(\theta)=0$ یا $(\ln L(\theta))'=0 \rightarrow \theta=$ برآورد حداکثر درستنمایی

یادآوری: در توابع لگاریتمی داریم:

$$\begin{cases} 1)\ (\ln u)'=\dfrac{u'}{u} \\ 2)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\ln(x_1\times x_2\times\ldots\times x_n)=\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \\ 3)\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y \end{cases}$$

نکته: در شرایطی که حدود x به پارامتر θ در تابع چگالی وابسته باشد، گرفتن مشتق در مرحله (ب) بی‌فایده است؛ در چنین شرایطی از قواعد زیر استفاده می کنیم:

الف) اگر $x \ge \theta$ باشد آن‌گاه: $\boxed{\theta \text{ حداکثر درستنمایی} =\min(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$

ب) اگر $x \le \theta$ باشد آن‌گاه: $\boxed{\theta \text{ حداکثر درستنمایی} =\max(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$

قضیه: اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 باشد، در این صورت برآورد MLE این پارامترها مانند روش گشتاوری عبارت است از:

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{\mu}=\bar{X} \\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}=\overline{X^2}-\bar{X}^2\end{array}}$$

تبصره: اگر میانگین جامعه (μ) معلوم باشد، در برآورد درستنمایی واریانس و انحراف معیار، در رابطه بالا به‌جای $\bar{X}$ از مقدار μ استفاده می‌شود.

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}=\overline{X^2}-\mu^2$$

۱. فرض کنید $0<x<\theta$, $f(x)=\dfrac{1}{\theta}$. به ازای یک نمونه n تایی برآورد گشتاوری θ چیست؟

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\bar{X}$ ۲) $\dfrac{\bar{X}}{2}$ ۳) $2\bar{X}$ ۴) $\dfrac{2}{\bar{X}}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.

برای به دست آوردن برآورد گشتاوری داریم: $E(X)=\bar{X}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x.f(x)dx=\int_0^\theta x.\frac{1}{\theta}dx=\frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^\theta=\frac{\theta}{2}\rightarrow\frac{\theta}{2}=\bar{X}\rightarrow\hat{\theta}=2\bar{X}$$

با کمی دقت می‌فهمیم که تابع چگالی داده‌شده، تابع چگالی توزیع یکنواخت پیوسته است با $b=\theta$ و $a=0$ که امید آن برابر است با:

$$E(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$$

۲. فرض کنید $0.3, 0.7, 0.2, 0.4, 0.9$ **یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:**

$$f_\theta(x)=\frac{1}{1-\theta}\text{،}\theta\le x\le 1$$

برآورد ماکزیمم درستنمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟(کامپیوتر ــ سراسری ۸۹)

۱) 0.9 ۲) 0.4 ۳) 5.0 ۴) 0.2

حل:گزینه ۴ درست است.

ازآنجاکه $x\ge\theta$ است، داریم:

$$\text{MLE}(\theta)=\min(X_1,X_2,...,X_n)=\min(0.3,0.7,0.2,0.4,0.9)=0.2$$

۳. فرض کنید چگالی X عبارت است از:

x	1	2	3	4
$f_\theta(x)$	$\frac{1-\theta}{4}$	$\frac{1+\theta}{4}$	$\frac{1-2\theta}{4}$	$\frac{1+2\theta}{4}$

$$-\frac{1}{8}<\theta<\frac{1}{8}$$

به ازای نمونه $(X_1,X_2)=(2,3)$ برآورد حداکثر درستنمایی θ عبارت است از:(کامپیوتر ــ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل:گزینه ۳ درست است.

توجه: در این سؤال برای به دست آوردن برآورد حداکثر درستنمایی θ، چون فقط برآورد را در نقطه $(X_1,X_2)=(2,3)$ خواسته است باید تابع درستنمایی را فقط برحسب $(X_1,X_2)=(2,3)$ تشکیل دهیم:

$$L(\theta)=f(x_1,\theta)\times f(x_2,\theta)=f(2,\theta)\times f(3,\theta)=\frac{1+\theta}{4}\times\frac{1-2\theta}{4}=\frac{1-\theta-2\theta^2}{16}$$

یادداشت:

....

....

....

....

حال برای ماکزیمم شدن تابع درستنمایی از آن نسبت به θ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$L'(\theta)=\frac{1}{16}(-1-4\theta)=0 \rightarrow \theta=-\frac{1}{4}$$

با توجه به حدود $-\frac{1}{8}<\theta<\frac{1}{8}$ مقدار $\theta=-\frac{1}{4}$ مورد قبول نیست.

با توجه به اینکه تابع درستنمایی به‌دست‌آمده همواره نزولی است (مشتق اول کمتر از صفر است $-\frac{1}{16}(1+4\theta)<0$)، بیشترین مقدار تابع درستنمایی در کمترین مقدار θ یعنی $\theta=-\frac{1}{8}$ است

۴ . فرض کنید یک نمونه 4 تایی از توزیع نمایی با میانگین θ انتخاب شده است و مقادیر آن 4، 5، 7 و 4 است. برآورد گشتاوری $(\tilde{\theta})$ و حداکثر درستنمایی θ $(\hat{\theta})$ به ترتیب عبارت است از: $\left((\hat{\theta},\tilde{\theta})=?\right)$

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $(4,5)$ ۲) $(5,5)$ ۳) $(5,4)$ ۴) $(7,5)$

.

حل:گزینه ۲ درست است.

۱) برآورد گشتاوری: با توجه به اینکه توزیع نمایی دارای میانگین θ است:

$$E(X)=\theta=\bar{X}$$

اما می‌توان مقدار $\bar{X}$ را با توجه به 4 نمونه داده شده به دست آورد:

$$\begin{cases} E(X)=\bar{X} \rightarrow \tilde{\theta}=\bar{X}=5 \\ \bar{X}=\dfrac{\sum X_i}{n}=\dfrac{4+5+7+4}{4}=\dfrac{20}{4}=5 \end{cases}$$

۲) برآورد حداکثر درستنمایی: دقت کنید که میانگین توزیع نمایی با پارامتر λ برابر $\frac{1}{\lambda}$ است؛ حال در این سؤال میانگین توزیع نمایی برابر θ است، بنابراین پارامتر توزیع نمایی $\lambda=\frac{1}{\theta}$ خواهد بود و تابع چگالی توزیع نمایی عبارت است از:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x} \;;\; x>0$$

الف) تابع درستنمایی $L(\theta)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$L(\theta)=f(X_1;\theta)\times\ldots\times f(X_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}X_i}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum X_i}=\theta^{-n}e^{-\frac{\sum X_i}{\theta}}$$

با توجه به توانی بودن تابع برای راحتی کار در مرحله بعد از طرفین رابطه بالا Ln می‌گیریم:

$$\operatorname{Ln}L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{\sum X_i}{\theta}$$

ب) برای به دست آوردن حداکثر درستنمایی $(\ln L(\theta))'=0$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(\ln L(\theta))'=0 \rightarrow \frac{-n}{\theta}+\frac{\sum X_i}{\theta^2}=0 \rightarrow \frac{\sum X_i}{\theta^2}=\frac{n}{\theta} \xrightarrow{\theta>0}$$

$$\sum X_i=n\theta \rightarrow \hat{\theta}=\frac{\sum X_i}{n} \rightarrow \boxed{\hat{\theta}=\bar{X}=5}$$

یادداشت:

....

....

....

....

با توجه به اینکه مقدار $\bar{X}$ از 4 نمونه داده شده برابر $\bar{X}=5$ به دست آمده است: $\hat{\theta}=\bar{X}=5$

درنتیجه در حالت زوج دوتایی داریم: $(\hat{\theta},\tilde{\theta})=(5,5)$

۵. فرض کنید از توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس σ^2 یک نمونه تصادفی 5 تایی اختیار شده است و مقادیر آن برابر است با $2,1,0,-1,-2$. برآورد حداکثر درستنمایی (σ^2,θ) به ترتیب برابر است با: (مکاترونیک ــ ۸۷)

۱) $(2,0)$ ۲) $(2,1)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $(-2,1)$

حل:گزینه ۱ درست است.

یادآوری: برآورد حداکثر درستنمایی و گشتاوری μ و σ^2 در توزیع نرمال عبارت است از:

$$\hat{\mu}=\bar{X}\ ,\ \hat{\sigma}^2=\frac{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n}$$

بنابراین در این سؤال نیز که $\mu=\theta$ میانگین و σ^2 واریانس توزیع نرمال است برآورد درستنمایی این دو پارامتر با توجه به داده‌های نمونه عبارت است از:

$$\hat{\theta}=\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{-2-1+0+1+2}{5}=0$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n}=\frac{(-2-0)^2+(-1-0)^2+(0-0)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}{5}=\frac{10}{5}=2$$

بنابراین در حالت زوج مرتب داریم: $\left(\hat{\sigma}^2,\hat{\theta}\right)=(2,0)$

البته با توجه به مثبت بودن واریانس پس از محاسبه میانگین تنها گزینه (۱) می‌تواند درست باشد.

۶. از توزیع یکنواخت $U(0,\theta)$ پنج نمونه تصادفی 4، 3، 15، 14 و 14 اختیار شده است. برآورد حداکثر درستنمایی θ عبارت است از: (مکاترونیک ــ ۸۸)

۱) 3 ۲) 10 ۳) 14 ۴) 15

حل:گزینه ۴ درست است.

$$X\sim U(0,\theta)\ \rightarrow\ f(x)=\frac{1}{\theta}\ ;\ 0<x<\theta$$

یادآوری: هرگاه حدود X به پارامتر θ وابسته باشد، برآورد حداکثر درستنمایی آن با توجه به علامت نامساوی عبارت است از:

$$\begin{cases} x<\theta\ \rightarrow\ \hat{\theta}=X_{(n)} \\ x>\theta\ \rightarrow\ \hat{\theta}=X_{(1)} \end{cases}$$

در این سؤال نیز که حدود X به θ وابسته است داریم:

$0<x<\theta\ \rightarrow\ \theta$ برآورد درستنمایی: $\hat{\theta}=X_{(n)}=$ ماکزیمم مقدار X در بین نمونه‌ها $=15$

یادداشت:

....

....

....

....

خواص مطلوب برآوردکننده‌های نقطه‌ای

نااریبی (Unbias)

هرگاه میانگین آماره $\hat{\theta}$ به طور دقیق بر پارامتر θ منطبق شود، آن‌گاه $\hat{\theta}$ برآوردکننده‌ای نااریب برای θ نامیده می‌شود.

تعریف: آماره $\hat{\theta}$ برآوردکننده‌ای **نااریب** (بدون تورش، ناتور) برای پارامتر θ است اگر و فقط اگر $\mathbf{E\left(\hat{\theta}\right)=\theta}$ باشد؛ به عبارت دیگر:

پارامتر = (آماره) E یا $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta \longleftrightarrow$ $\hat{\theta}$ نااریب برای θ

اریبی یا تورش (Bias)

اگر (آماره $\hat{\theta}$) E با پارامتر θ متفاوت باشد ($\theta < E\left(\hat{\theta}\right)$ یا $E\left(\hat{\theta}\right) < \theta$) آن‌گاه آماره $\hat{\theta}$ اریب است و این تفاوت به عنوان میزان اریبی شناخته می‌شود:

$$\text{اریبی (تورش)} = E\left(\hat{\theta}-\theta\right)=E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$$

۷. با $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مقادیر به‌دست‌آمده از n بار نمونه‌گیری و با $\bar{X}$ متوسط نمونه، برآورد بی‌طرفانه (نااریب) برای واریانس عبارت است از: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2$
۲) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2$
۳) $\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2$
۴) $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2$

حل:گزینه ۴ درست است.

یادآوری: تنها دو برآوردکننده نااریب برای واریانس جامعه وجود دارد که عبارت‌اند از:

۱- μ جامعه مجهول
$$S_1^2=\frac{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1} \rightarrow E\left(S_1^2\right)=\sigma^2$$

۲- μ جامعه معلوم
$$S_2^2=\frac{\sum\left(X_i-\mu\right)^2}{n} \rightarrow E\left(S_2^2\right)=\sigma^2$$

توجه کنید که آماره S_2^2 برآوردکننده نااریب بهتری برای σ^2 جامعه است اما چون پیش‌فرض μ جامعه را مجهول می‌دانیم به طور پیش‌فرض در مسایل از آماره S_1^2 برای برآورد σ^2 استفاده می‌کنیم.

۸. فرض کنید X دارای توزیع پواسون با پارامتر m باشد. یک برآورد نااریب برای m^2 برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{X}{2}$
۲) X^2+X
۳) $\frac{X^2}{2}$
۴) X^2-X

یادداشت:

....
....
....
....

حل:گزینه ۴ درست است.

یادآوری:

۱- امید ریاضی و واریانس در توزیع پواسون برابر با پارامتر توزیع (λ) است. $E(X)=Var(X)=\lambda$

۲- اگر $\hat{\theta}$ برآوردکننده نااریب θ باشد داریم: $E(\hat{\theta})=\theta$

حال در این سؤال که X دارای توزیع پواسون با پارامتر m است داریم:

$$\begin{cases} E(X)=Var(X)=m \\ Var(X)=E(X^2)-E(X)^2 \quad \rightarrow \quad E(X^2)=Var(X)+(E(X))^2=m+m^2 \end{cases}$$

در این سؤال به دنبال برآورد نااریب برای m^2 هستیم یعنی $E(\text{آماره})=m^2$؛ بنابراین باید آماره‌های گزینه‌ها را بررسی کنیم تا ببینیم امید ریاضی کدام‌یک برابر m^2 می‌شود:

(گزینه ۱) $E\left(\frac{X}{2}\right)=\frac{1}{2}E(X)=\frac{m}{2}\neq m^2$ اریب

(گزینه ۲) $E\left(X^2+X\right)=E\left(X^2\right)+E(X)=m+m^2+m=2m+m^2\neq m^2$ اریب

(گزینه ۳) $E\left(\frac{X^2}{2}\right)=\frac{1}{2}E\left(X^2\right)=\frac{1}{2}\left(m+m^2\right)\neq m^2$ اریب

(گزینه ۴) $E\left(X^2-X\right)=E\left(X^2\right)-E(X)=m+m^2-m=m^2$ نااریب ✓

۹. فرض کنید متغیر تصادفی $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشد:

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(3).\theta^3}.x^2e^{-\frac{x}{\theta}}$$

در آن‌صورت برآورد نااریب θ کدام است؟(کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $3\bar{X}$ ۲) $\frac{1}{3\bar{X}}$ ۳) $\frac{\bar{X}}{3}$ ۴) $\frac{3}{\bar{X}}$

حل:گزینه ۳ درست است.

یادآوری: برآوردگر T برای θ نااریب است $\longleftrightarrow$ $E(T)=\theta$

برای این منظور با توجه به گزینه‌ها ابتدا باید $E(X)$ و $E\left(\frac{1}{X}\right)$ را بدانیم.

یادداشت:

....

....

....

....

با کمی دقت می‌توان متوجه شد که تابع چگالی داده‌شده، تابع چگالی توزیع گاما با $\lambda = \frac{1}{\theta}$ و $\alpha = 3$ است که امید ریاضی آن عبارت است از:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{3}{\frac{1}{\theta}} = 3\theta$$

یادآوری: می‌دانیم که همواره $E(X) = E(\bar{X})$ است، پس:

$$E(\bar{X}) = 3\theta$$

در صورت تشخیص ندادن توزیع گاما باید $E(X)$ را از طریق فرمول امید ریاضی به دست آوریم:

$$E(X) = \int xf(x)dx = \int_0^\infty x \frac{1}{\Gamma(3)\theta^3} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\Gamma(3)\theta^3} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$\underline{\underline{\text{انتگرال جزء به جزء}}} \frac{1}{(3-1)!\theta^3} \left[x^3 \left(-\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \right) - 3x^2 \left(\theta^2 e^{-\frac{x}{\theta}} \right) + 6x \left(-\theta^3 e^{-\frac{x}{\theta}} \right) - 6 \left(\theta^4 e^{-\frac{x}{\theta}} \right) \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2\theta^3} . 6\theta^4 = 3\theta \to E(X) = E(\bar{X}) = 3\theta \to E\left(\frac{\bar{X}}{3}\right) = \theta \to$$ $\frac{\bar{X}}{3}$ برای θ نا اریب است.

برای به دست آوردن $E\left(\frac{1}{X}\right)$ نیز به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int \frac{1}{x} f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{1}{\Gamma(3)\theta^3} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{(3-1)!\theta^3} \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$\underline{\underline{\text{انتگرال جزء به جزء}}} \frac{1}{2\theta^3} \left[x \left(-\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \right) - 1 \times \left(\theta^2 e^{-\frac{x}{\theta}} \right) \right]_0^\infty = \frac{1}{2\theta^3} \times \theta^2 = \frac{1}{2\theta} \to E\left(\frac{1}{X}\right) = E\left(\frac{1}{\bar{\bar{X}}}\right) = \frac{1}{2\theta} \to E\left(\frac{2}{\bar{\bar{X}}}\right) = \frac{1}{\theta}$$

بنابراین، $\frac{2}{\bar{\bar{X}}}$ برای $\frac{1}{\theta}$ نا اریب است.

۱۰. فرض کنید $1,2,3,4,5$ یافته‌های یک نمونه تصادفی 5 تایی از توزیع $N(\theta , \theta)$ باشد. برآورد نااریب θ کدام است؟
(علوم کامپیوتر ـ ۸۵)

۱) 2   ۲) 2.5   ۳) 3   ۴) 2.5 , 3

حل:گزینه ۴ درست است.

یادآوری: برآوردکننده $\hat{\theta}$ را برای θ نااریب گویند هرگاه $E(\hat{\theta}) = \theta$ شود. می‌دانیم که در توزیع نرمال:

$$E(S^2) = \sigma^2 \ , \ E(\bar{X}) = \mu$$

یادداشت:

....

....

....

....

بنابراین برآوردگر ناریب برای میانگین (μ) و واریانس (σ^2) توزیع نرمال به ترتیب برابر $\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}$ و $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ است، حال در این سؤال $\sigma^2=\theta$ و $\mu=\theta$ است؛ بنابراین برای پارامتر θ دو برآوردکننده ناریب وجود خواهد داشت که عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} 1)\ E(\bar{X})=\mu=\theta \\ 2)\ E(S^2)=\sigma^2=\theta \end{cases}$$

حال با توجه به داده‌های نمونه $X_i:1,2,3,4,5$ داریم:

$$\begin{cases} 1)\ \bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3 \\ 2)\ S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5-1}=\frac{10}{4}=2.5 \end{cases}$$

برآورد فاصله‌ای (فاصله اطمینان)

برآورد فاصله‌ای میانگین جامعه

با فرض آنکه در جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 یک نمونه تصادفی به حجم n انتخاب کرده باشیم، $\bar{X}$ (میانگین نمونه) به عنوان بهترین برآوردکننده نقطه‌ای برای μ (میانگین جامعه) در تعیین فاصله اطمینان برای میانگین جامعه به صورت زیر استفاده می‌شود:

در این حالت فاصله اطمینان برای میانگین جامعه به صورت $\bar{X}\pm e$ خواهد بود که e میزان دقت یا خطای برآورد است. حالات مختلف فاصله اطمینان برای میانگین جامعه به شرح زیر است:

۱- جامعه اصلی نرمال و σ^2 معلوم و $n\geq 1$

$$\boxed{\bar{X}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\bar{X}} \rightarrow \left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)}$$

۲- جامعه اصلی نرمال و σ^2 نامعلوم

الف) $n>30$

$$\boxed{\bar{X}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\,S_{\bar{X}} \rightarrow \left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_X}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_X}{\sqrt{n}}\right)}$$

ب) $n\leq 30$

$$\boxed{\bar{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\times S_{\bar{X}} \rightarrow \left(\bar{X}-t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\frac{S_X}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{X}+t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\frac{S_X}{\sqrt{n}}\right)}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۳- جامعه اصلی غیرنرمال و σ^2 معلوم

الف) $n > 30$ (قضیه حد مرکزی)

$$\boxed{\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\bar{X}} \rightarrow \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)}$$

ب) $n \le 30$ (قضیه چی‌بی‌شف)

$$\boxed{\bar{X} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \times \sigma_{\bar{X}} \rightarrow \left(\bar{X} - \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{X} + \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)}$$

محاسبه دقت یا خطا

در برآورد فاصله برای میانگین جامعه دقت یا خطا عبارت است از:

$$\boxed{\text{خطا} : e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

در رابطه بالا در حالات مختلف به‌جای $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{\frac{\alpha}{2}}$ و $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ و همین‌طور در صورت مجهول بودن σ از S استفاده می‌شود.

محاسبه طول فاصله

برای محاسبه طول فاصله در برآورد فاصله میانگین جامعه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{فاصله اطمینان} = \left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{طول فاصله} = \text{حد بالا} - \text{حد پایین} = \left(\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2e$$

$$\text{طول فاصله} = 2e = 2\,Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

در رابطه بالا در حالات مختلف به‌جای $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{\frac{\alpha}{2}}$ و همین‌طور در مواردی که σ مجهول باشد از S استفاده می‌شود.

محاسبه تعداد نمونه

در برآورد فاصله برای میانگین جامعه تعداد نمونه با توجه به مقدار e برابر است با:

$$e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow e^2 = Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma^2}{n} \rightarrow \boxed{n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\sigma^2}{e^2}}$$

در رابطه بالا در حالات مختلف به جای $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{\frac{\alpha}{2}}$ و همین‌طور در صورت مجهول بودن σ از S استفاده می‌کنیم.

یادداشت:

....

....

....

....

برآورد فاصله‌ای نسبت جامعه

برای تخمین نسبت یا نرخ موفقیت در جامعه‌ای با انتخاب نمونه‌ای n تایی درصورتی‌که x موفقیت مشاهده شود، رابطه $\bar{p}=\frac{x}{n}$ را نسبت نمونه در نظر می‌گیریم. **توزیع $\bar{p}$** همان‌طورکه در بحث نمونه‌گیری مطرح شد، در نمونه‌های بزرگ **نرمال** است بنابراین:

$$\boxed{\text{تابع محوری} = Z=\frac{\bar{p}-p}{\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}}}$$

فاصله اطمینان نسبت جامعه عبارت است از:

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{p}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}\rightarrow\left(\bar{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}\ ,\ \bar{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}\right)\\ \bar{p}=\frac{x}{n}\end{array}}$$

✓ **دقت کنید!**

اگر p جامعه مجهول باشد از $\bar{p}$ نسبت آن در نمونه استفاده می‌شود و اگر نسبت نمونه نیز داده نشده باشد به طور پیش‌فرض p و q را برابر $\frac{1}{2}$ می‌دانیم.

محاسبه دقت یا خطا

در برآورد فاصله برای نسبت جامعه دقت یا خطا برابر است با:

$$\boxed{e=Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}}$$

محاسبه طول فاصله

برای محاسبه طول فاصله در برآورد فاصله‌ای نسبت جامعه، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{فاصله اطمینان}:\left(\bar{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}\ ,\ \bar{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}\right)$$

$$\text{طول فاصله}:\left(\bar{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}\right)-\left(\bar{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}\right)=2Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}=2e$$

$$\boxed{\text{طول فاصله}=2e=2Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}}$$

محاسبه تعداد نمونه

در برآورد فاصله‌ای برای نسبت جامعه، تعداد نمونه با توجه به مقدار e برابر است با:

$$e=Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}\rightarrow e^2=Z_{\frac{\alpha}{2}}^2\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}\longrightarrow\boxed{n=\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2\,\bar{p}\,\bar{q}}{e^2}}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۱. هدف بررسی نسبت بی‌سوادان در یک شهر است. چه حجمی از نمونه لازم است تا 95% مطمئن باشیم حداکثر خطای برآورد بیشتر از 5% نخواهد شد؟ $\left(Z_{0.975} = 1.96\right)$ **(کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)**

۱) 380　　۲) 385　　۳) 290　　۴) 400

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} p \text{ خطای برآورد نسبت } \quad e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \\ \mu \text{ خطای برآورد میانگین } \quad e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

هرگاه از نسبت جامعه هیچ اطلاعی نداشته باشیم پیش‌فرض آن را برابر $\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{pq}{n}} \;\rightarrow\; 0.05 = 2\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}} \;\rightarrow\; \sqrt{n} = \dfrac{1}{0.05} = 20 \;\rightarrow\; n = 400 \\ \hat{p} = \hat{q} = \dfrac{1}{2}\ ,\ e = 0.05 \\ (1-\alpha) = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05\ ,\ \dfrac{\alpha}{2} = 0.025, Z_{0.025} = Z_{0.975} = 1.96 \simeq 2 \end{cases}$$

برای راحتی در محاسبه $Z_{0.025}$ را برابر 2 در نظر بگیرید و سپس گزینه‌ای را انتخاب کنید که نزدیک‌ترین پاسخ به پاسخ شماست. درواقع گزینه کمی کمتر از پاسخ شما خواهد بود.

یادداشت:

....

....

....

....

آزمون فرض‌های آماری

فرض صفر و فرض مقابل (Null Hypothesis & Alternative Hypothesis)

فرض صفر (H_0): فرضی که باید آن را اثبات کرد و همواره شامل یکی از علایم «=»، «≥» یا «≤» است، فرض صفر (H_0) نامیده می‌شود.

فرض مقابل (H_1): فرض مخالف H_0 که در صورت عدم اثبات H_0 پذیرفته می‌شود و همواره شامل یکی از علایم «≠»، «<» یا «>» است، فرض مقابل (H_1) نامیده می‌شود.

خطاهای آماری(Statistical Errors)

هنگام اتخاذ تصمیم در مورد H_0 ممکن است دو نوع خطا پیش آید:

خطای نوع اول (α)

احتمال رد کردن H_0 وقتی H_0 به‌واقع درست است. به عبارتی:

$$\boxed{\alpha = P(\text{خطای نوع اول}) = P(\text{رد } H_0 \mid H_0 \text{ درست})}$$

محاسبه خطای نوع اول

ازآنجاکه خطای نوع اول عبارت است از احتمال رد فرض H_0 (وقوع ناحیه بحرانی) در شرایطی که H_0 به‌واقع درست است، برای محاسبه احتمال مورد نظر کافی است احتمال وقوع ناحیه بحرانی (C) را برای H_0 به دست آوریم، بنابراین:

$$\alpha = P(\text{رد } H_0 \mid H_0 \text{ درست}) = P(\text{ناحیه بحرانی} \mid H_0 \text{ درست})$$

به عبارت دیگر:

$$\boxed{\alpha = P_{H_0}(\text{ناحیه بحرانی})}$$

۱۲. فرض کنید $P(X=x)=\binom{1}{x}\theta^x(1-\theta)^{1-x}\ ;\ x=0,1$ **از این توزیع یک نمونه تصادفی** 5 **تایی اختیار می‌کنیم. هدف، آزمون** $H_0:\theta=\frac{1}{2}$ **در مقابل** $H_1:\theta\neq\frac{1}{2}$ **است. فرض** H_0 **را رد می‌کنیم اگر حداکثر** 1 **موفقیت یا حداقل** 4 **موفقیت حاصل شود، در آن صورت مقدار خطای نوع اول کدام است؟ (کامپیوتر ــ سراسری ۸۸)**

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{4}{8}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{3}{16}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

دقت کنید که تابع داده‌شده برنولی است و برای یک نمونه تصادفی 5 تایی به توزیع دوجمله‌ای با $p=\theta$ و $n=5$ تبدیل می‌شود.

$$n=5 \ , \ \theta=\frac{1}{2}$$

$$P(X=x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$\alpha = P(H_0 \text{ درست} \mid H_0 \text{ رد}) = P_{H_0}(\text{ناحیه بحرانی}) = P_{H_0:\theta=\frac{1}{2}}(X\le 1)+P_{H_0:\theta=\frac{1}{2}}(X\ge 4)$$

$$=P_{\theta=\frac{1}{2}}(X=0)+P_{\theta=\frac{1}{2}}(X=1)+P_{\theta=\frac{1}{2}}(X=4)+P_{\theta=\frac{1}{2}}(X=5)=$$

$$\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=(1+5+5+1)\frac{1}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$$

۱۳. فرض کنید $X_1,\dots,X_{10}$ نمونه تصادفی از جامعه برنولی با پارامتر θ باشد و علاقه‌مند به آزمون $H_0:\theta=\frac{1}{2}$ در برابر $H_1:\theta=\frac{2}{3}$ باشیم. اگر $\sum_{i=1}^{10} X_i \ge 8$ ناحیه بحرانی آزمون باشد، احتمال خطای نوع اول تقریباً کدام است؟ (علوم کامپیوتر ــ ۸۶)

۱) 0.01 ۲) 0.05 ۳) 0.1 ۴) 0.15

حل:گزینه ۲ درست است.

یادآوری:

۱) به دست آوردن خطای نوع اول (α) $\qquad \alpha = P(H_0 \text{ درست} \mid H_0 \text{ رد}) = P_{H_0}(X\in \text{ناحیه بحرانی})$

۲)هرگاه X دارای توزیع برنولی با پارامتر θ باشد، $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ است.

در این سؤال: $\qquad Y=\sum_{i=1}^{10} X_i \sim Bin(n=10,\theta)$

$$\begin{cases}\alpha = P_{H_0:\theta=\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \ge 8\right)=P(Y\ge 8)=P(Y=8)+P(Y=9)+P(Y=10)\\ =\sum_{x=8}^{10}\binom{10}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{56}{1024}=0.05\\ X\sim \text{برنولی} \rightarrow Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{دوجمله‌ای}\end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

خطای نوع دوم (β)

احتمال قبول کردن (رد نکردن) فرض H_0 است وقتی H_0 به‌واقع غلط باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\beta = P(\text{خطای نوع دوم}) = P(H_0 \text{ قبول} \mid H_0 \text{ غلط})$$

محاسبه خطای نوع دوم

ازآنجاکه خطای نوع دوم عبارت است از احتمال قبول H_0 (وقوع ناحیه اطمینان) در شرایطی که H_0 به‌واقع نادرست است (H_1 به‌واقع درست است)، برای محاسبه احتمال مورد نظر کافی است احتمال وقوع ناحیه اطمینان (C') را برای H_1 به دست آوریم؛ بنابراین:

$$\beta = P(H_0 \text{ قبول} \mid H_0 \text{ نادرست}) = P(\text{ناحیه اطمینان} \mid H_1 \text{ درست})$$

به عبارت دیگر:

$$\beta = P_{H_1}(\text{ناحیه اطمینان})$$

۱۴. جدول زیر مفروض است. هدف، آزمون $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ در مقابل $H_1 : \theta = \frac{1}{4}$ برای $\alpha = 0.2$ (خطای نوع اول) است. ناحیه بحرانی (به ازای یک مشاهده) کدام است؟ (مکاترونیک ــ ۸۵)

x	0	1	2	3	4
$P\left(X = x ; \theta = \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P\left(X = x ; \theta = \frac{1}{4}\right)$	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{45}{100}$

۱) $\{4\} =$ ناحیه بحرانی
۲) $\{3\} =$ ناحیه بحرانی
۳) $\{2\} =$ ناحیه بحرانی
۴) $\{1\} =$ ناحیه بحرانی

حل:گزینه ۱ درست است.

$$\text{خطای نوع اول}: \alpha = P_{H_0}(\text{ناحیه بحرانی}) \rightarrow \frac{2}{10} = P(\text{ناحیه بحرانی} \mid \theta = \frac{1}{2})$$

$$\text{خطای نوع دوم}: \beta = P_{H_1}(\text{ناحیه اطمینان}) \rightarrow \beta = P(\text{ناحیه اطمینان} \mid \theta = \frac{1}{4})$$

حال باید Xای را به عنوان ناحیه بحرانی انتخاب کنیم که با $\alpha = 0.2$ کمترین β را داشته باشد؛ بنابراین در این سؤال داریم:

$$\text{ناحیه بحرانی}: \{X = 1\} \rightarrow \alpha = P\left(X = 1 \middle| \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.2$$

$$\beta = P\left(X = 0,2,3,4 \mid \theta = \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{100} + \frac{5}{100} + \frac{40}{100} + \frac{45}{100} = 0.95$$

یادداشت:

....

....

....

....

ناحیه بحرانی : $\{X=2\} \rightarrow \alpha = P\left(X=2 \middle| \theta=\frac{1}{2}\right)=0.2$

$$\beta = P\left(X=0,1,3,4 \mid \theta=\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}+\frac{40}{100}+\frac{45}{100}=0.95$$

ناحیه بحرانی : $\{X=4\} \rightarrow \alpha = P\left(X=4 \middle| \theta=\frac{1}{2}\right)=0.2$

$$\beta = P\left(X=0,1,2,3 \mid \theta=\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}+\frac{5}{100}+\frac{40}{100}=0.55 \checkmark$$

پس به ازای ناحیه بحرانی $X=4$ با $\alpha=0.2$ کمترین مقدار β را داریم و به آن ناحیه بحرانی پرتوان‌ترین آزمون می‌گویند.

توان آزمون (Power Of a Test)

در هر استنباط آماری احتمال وقوع یکی از این دو نوع خطا (α یا β) وجود دارد و لازم است آزمون‌کننده به نوعی تعادل بین این دو نوع خطا برسد. در رسیدن به این تعادل موضوع تابع توان آزمون مطرح می‌شود:

توان آزمون : $\beta^* = 1-\beta = 1-P(H_0 \text{ قبول} \mid H_0 \text{ غلط})$

$= P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ غلط})$

نکته: ۱- آزمونی توانمند است که با توجه به مقدار مشخصی از α دارای خطای نوع دوم (β) کمتری باشد.

۲- برای توان آزمون نیز همانند α و β سه تعریف دیگر می‌تواند درست باشد.

$$\beta^* = 1-\beta = P(H_0 \text{ رد} \mid H_1 \text{ درست}) = P(H_1 \text{ قبول} \mid H_1 \text{ درست}) = P(H_1 \text{ قبول} \mid H_0 \text{ نادرست})$$

محاسبه توان آزمون

ازآنجاکه توان آزمون $\left(\beta^*\right)$ برابر با $1-\beta$ است برای محاسبه آن می‌توانیم یکی از روش‌های زیر را انتخاب کنیم.

روش اول: ابتدا خطای نوع دوم (β) را محاسبه کرده، سپس طبق تعریف توان آزمون آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

توان آزمون $\beta^* = 1-\beta$

یادداشت:

....

....

....

....

روش دوم: با توجه به تعریف توان آزمون $\left(\beta^*\right)$ به صورت زیر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\beta^* = P(H_0 \text{ رد } \mid H_1 \text{ درست}) = P(\text{ناحیه بحرانی} \mid H_1 \text{ درست})$$

به عبارت دیگر:

$$\boxed{\beta^* = P_{H_1}(\text{ناحیه بحرانی})}$$

ناحیه بحرانی (Critical Rigion)

برای به دست آوردن ناحیه بحرانی آزمون با توجه به فرضیه‌های آزمون دو قضیه مطرح می‌شود:

الف) اگر فرضیه های آزمون، ساده در مقابل ساده به صورت زیر باشد (θ_0 و θ_1 دو عدد ثابت دلخواه‌اند):

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

آن‌گاه ناحیه بحرانی آزمون از نامساوی زیر به دست می‌آید(k یک عدد ثابت در فاصله $0 \le k < \infty$ است):

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} > k$$

حال اگر در این آزمون α مقدار احتمال خطای نوع اول باشد، داریم:

$$\alpha = P\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} > k\right)$$

ب) اگر فرضیه‌های آزمون یک طرفه به صورت زیر باشد (θ_0 یک عدد ثابت دلخواه است):

$$\begin{cases} H_0 : \theta \ge \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

آن‌گاه برای به دست آوردن ناحیه بحرانی آزمون تابع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f_{\theta_1}(x_1,\dots x_n)}{f_{\theta_2}(x_1,\dots x_n)} > k \quad ; \quad (\theta_2 > \theta_1)$$

سپس با توجه به وضعیت تابع نسبت به آماره T داریم:

اگر تابع به‌دست‌آمده نسبت به آماره T صعودی(غیر نزولی) باشد: $T > k$: ناحیه بحرانی

اگر تابع به‌دست‌آمده نسبت به آماره T نزولی (غیر صعودی) باشد: $T < k$: ناحیه بحرانی

۱۵. فرض کنید X دارای چگالی $f(x) = \theta e^{-\theta x} \; ; \; x > 0 \, , \, \theta > 0$ است. بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی اگر بخواهیم فرض $H_0 : \theta \le \theta_0$ را در مقابل $H_1 : \theta > \theta_0$ آزمون نماییم، ناحیه بحرانی عبارت است از:

(کامپیوتر ــ سراسری ۸۵)

۱) $\sum X_i \ge K$

۲) $\sum X_i \le K$

۳) $\sum (X_i - \bar{X})^2 \le K$

۴) $\sum (X_i - \bar{X})^2 \ge K$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

با توجه به اینکه فرضیه‌های آزمون داده‌شده یک طرفه است، از قضیه مطرح‌شده در متن درس فصل پنجم داریم:

$$\frac{f_{\lambda_2}(X_1,\dots X_n)}{f_{\lambda_1}(X_1,\dots X_n)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\lambda_2 e^{-\lambda_2 X_i}}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_1 e^{-\lambda_1 X_i}}=\frac{\lambda_2^n\ e^{-\lambda_2\sum X_i}}{\lambda_1^n\ e^{-\lambda_1\sum X_i}}\xrightarrow{\lambda_2>\lambda_1}=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n e^{\sum X_i\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{<0}}$$

با توجه به اینکه $\lambda_2>\lambda_1$است، تابع به‌دست‌آمده نسبت به آماره $T=\sum X_i$ نزولی (غیرصعودی) است؛ بنابراین ناحیه رد بر مبنای قضیه به صورت $\sum X_i<k$ به دست می‌آید.

۱۶. فرض کنید $f(x)=\theta e^{-\theta x}\ ;\ x>0\ ,\ \theta>0$ است. از این جامعه دو نمونه تصادفی X_1 و X_2 اختیار می‌کنیم. برای انجام آزمون $H_0:\theta=1$ در مقابل $H_1:\theta=2$ ناحیه رد آزمون کدام است؟(کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $\left\{(X_1,X_2)\ \middle|\ |X_1+X_2|>K\right\}=$ ناحیه رد

۲) $\left\{(X_1,X_2)\ \middle|\ X_1+X_2<K\right\}=$ ناحیه رد

۳) $\left\{(X_1,X_2)\ \middle|\ |X_1+X_2|<K\right\}=$ ناحیه رد

۴) $\left\{(X_1,X_2)\ \middle|\ X_1+X_2>K\right\}=$ ناحیه رد

حل:گزینه ۲ درست است.

با توجه به اینکه فرضیه‌های آزمون، ساده در مقابل ساده است $\left(\begin{cases}H_0:\theta=1\\H_1:\theta=2\end{cases}\right)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}>K$$

دقت کنید که چون 2 نمونه در اختیار داریم باید ناحیه بحرانی را برای $\sum X_i$ یعنی X_1+X_2 بیان کنیم.

در این سؤال X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، بنابراین X_1+X_2 دارای توزیع گاما با پارامترهای $(2,\theta)$ خواهد شد.

یادآوری: هرگاه $X_1,\dots,X_n$ به طور مستقل دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشند، $\sum_{i=1}^{n}X_i$ دارای توزیع گاما با پارامترهای (n,λ) است.

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}\quad x>0\ ,\ \lambda>0$$

بنابراین تابع چگالی احتمال توزیع $X_1+X_2=T$ (گاما) با پارامترهای $(2,\theta)$ به صورت زیر است:

$$f_T(t)=\frac{1}{\Gamma(2)}\theta^2 t^{2-1}e^{-\theta t}=\theta^2 te^{-\theta t}\qquad t>0\ ,\ \theta>0$$

$$\frac{f_{\theta_1}(T)}{f_{\theta_0}(T)}>K\ \rightarrow\ \frac{f_{\theta=2}(T)}{f_{\theta=1}(T)}>k\ \rightarrow\ \frac{2^2te^{-2t}}{1^2te^{-1t}}>K\ \rightarrow\ 4e^{-t}>K\rightarrow\ e^{-t}>\underbrace{\frac{K}{4}}_{K'}$$

$$\rightarrow\ -t>\underbrace{\ln K'}_{K''}\ \rightarrow\ t<\underbrace{-K''}_{K'''}\ \rightarrow\ X_1+X_2<K'''$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۷. فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)=\frac{2(x-\theta)}{(1-\theta)^2}\ ;\ \theta\le x<1$ باشد. علاقه‌مند به آزمون $H_0:\theta=\frac{1}{4}\ \text{vs}\ H_1:\theta=\frac{3}{4}$ در سطح 5% بر اساس یک مشاهده هستیم. ناحیه بحرانی آزمون کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ ۸۵)

۱) $X<0.02$
۲) $X>0.98$
۳) $0.02<X<0.98$
۴) $X>0.98$ یا $X<0.02$

حل:گزینه ۲ درست است.

با توجه به اینکه فرضیه‌های آزمون (ساده در مقابل ساده) است، بنا بر فرضیه الف مطرح‌شده در فصل پنجم داریم:

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}>k \rightarrow \frac{\frac{2\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2};\left(\frac{3}{4}\le x<1\right)}{\frac{2\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2};\left(\frac{1}{4}\le x<1\right)}>k \rightarrow \frac{9\left(x-\frac{3}{4}\right);\left(\frac{3}{4}\le x<1\right)}{\left(x-\frac{1}{4}\right);\left(\frac{1}{4}\le x<1\right)}>k \xrightarrow{\text{تابع صعودی}} X>k$$

$$\rightarrow 0.05=P\left(X>c\,|\,\theta=\frac{1}{4}\right) \rightarrow 0.05=\int_c^1 f\left(x\,|\,\theta=\frac{1}{4}\right)dx \rightarrow 0.05=\int_c^1 \frac{2\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}dx$$

$$\rightarrow 0.05=\frac{32}{9}\int_c^1\left(x-\frac{1}{4}\right)dx \rightarrow 0.45=32\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{x}{4}\right]_c^1 \rightarrow 0.45=32\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{c^2}{2}-\frac{c}{4}\right)\right]$$

$$\rightarrow 0.45=32\left[\frac{1}{4}-\frac{c^2}{2}+\frac{c}{4}\right] \rightarrow 0.45=8-16c^2+8c \rightarrow 16c^2-8c-7.55=0 \begin{cases} c=0.98 \\ c=-0.49 \end{cases}$$

با توجه به فرض صفر، مقدار c باید از $\frac{1}{4}$ بزرگ‌تر باشد، پس جواب منفی قابل قبول نیست و ناحیه بحرانی برابر $X>0.98$ است.

۱۸. فرض کنید $f(X)=\theta e^{-\theta x}\ ;\ \theta>0\ ,\ X>0$ و هدف، آزمون فرض $H_\circ:\theta\le\theta_\circ$ در مقابل $H_1:\theta>\theta_\circ$ است. به ازای یک نمونه n تایی، ناحیه رد پرتوان‌ترین آزمون عبارت است از: (مکاترونیک ـ ۸۶)

۱) $\bar{X}<c$
۲) $\bar{X}>c$
۳) $c_1<\bar{X}<c_2$
۴) $\bar{X}>c_2$ یا $\bar{X}<c_1$

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به اینکه فرضیه‌های آزمون داده‌شده یک طرفه است، از قضیه« ب» مطرح‌شده در فصل پنجم داریم:

یادداشت:

....

....

....

....

$$\frac{f_{\lambda_2}(X_1,\ldots X_n)}{f_{\lambda_1}(X_1,\ldots X_n)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\lambda_2 e^{-\lambda_2 X_i}}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_1 e^{-\lambda_1 X_i}}=\frac{\lambda_2^n\ e^{-\lambda_2\sum X_i}}{\lambda_1^n\ e^{-\lambda_1\sum X_i}}\xrightarrow{\lambda_2>\lambda_1}=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n e^{\sum X_i\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{<0}}$$

با توجه به اینکه $\lambda_2 > \lambda_1$است، تابع به‌دست‌آمده نسبت به آماره $T=\sum X_i$ نزولی (غیر صعودی) است، بنابراین ناحیه رد بر مبنای قضیه به صورت $\sum X_i < k$ یا $\bar{X} < k$ به دست می‌آید.

پرتوان‌ترین آزمون: آزمونی است که در ناحیه بحرانی آن به ازای یک خطای نوع اول مشخص (α) کمترین احتمال خطای نوع دوم (β) را داشته باشد.

آزمون میانگین جامعه

اگر فرضیه‌ای درباره مقدار میانگین یک جامعه آماری مطرح شود، با استفاده از آزمون فرض مناسب می‌توان درباره صحت یا عدم صحت آن فرضیه در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ یا سطح خطای α تصمیم‌گیری کرد. مراحل چهارگانه آزمون فرض برای میانگین جامعه به شرح زیر است:

۱- فرض‌های آماری

$$\begin{cases}H_0:\mu_X=\mu_0\\H_1:\mu_X\neq\mu_0\end{cases},\quad\begin{cases}H_0:\mu_X\geq\mu_0\\H_1:\mu_X<\mu_0\end{cases},\quad\begin{cases}H_0:\mu_X\leq\mu_0\\H_1:\mu_X>\mu_0\end{cases}$$

در این فرضیه‌ها، μ_0 همان مقدار میانگین مورد آزمون است.

۲- آماره آزمون (ملاک آزمون)

درصورتی‌که $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه مستقل n تایی از جامعه باشد، آن‌گاه آماره $\bar{X}$ با توجه به حالات مختلف برآورد، دارای توزیع Z یا t است. حال بر اساس هر یک از این حالات، ملاک (آماره) آزمون به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱) اگر جامعه، نرمال و σ^2 معلوم باشد، توزیع $\bar{X}$ صرف‌نظر از n (n دلخواه) نرمال است و ملاک آزمون عبارت‌است از:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}\quad;\quad\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

۲) اگر جامعه نرمال و σ^2 نامعلوم باشد، توزیع $\bar{X}$ به n وابسته است و دو حالت به وجود می‌آید:

الف) اگر $n>30$ باشد، توزیع $\bar{X}$ نرمال است و ملاک آزمون عبارت است از:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{X}}}\quad;\quad S_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}$$

یادداشت:

....

....

....

....

ب) اگر $n \le 30$ باشد، توزیع $\bar{X}$، t با $n-1$ درجه آزادی است و ملاک آزمون عبارت است از:

$$\boxed{t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \quad ; \quad S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

۳) اگر جامعه غیرنرمال (نامعلوم)، σ^2 معلوم و تعداد نمونه بزرگ باشد $(n > 30)$، توزیع $\bar{X}$ بنا بر قضیه حد مرکزی نرمال است و ملاک آزمون عبارت است از:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \;\; ; \;\; \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

۱۹. با $X_1, X_2, ..., X_n$ مقادیر به‌دست‌آمده از n بار نمونه‌گیری از یک جمعیت دارای متوسط m و با واریانس نمونه S^2، آماره‌مناسب برای انجام آزمون‌های آماری برآورد واریانس عبارت است از: (کامپیوتر ــ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\bar{X} - m}{S}$ ۲) $\frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n+1}}$ ۳) $\frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n-1}}$ ۴) $\frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}}$

حل:گزینه ۴ درست است.

احتمالاً منظور طراح، آماره آزمون میانگین جامعه بوده و به اشتباه در سؤال برآورد واریانس گفته شده است.

μ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{S^2}{n}\right) \quad \rightarrow$ آماره آزمون برای برآورد : $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

آماره‌های آزمون برآورد واریانس عبارت است از:

m آماره آزمون برای برآورد σ^2 جامعه با میانگین معلوم : $\chi^2_{(n)} = \frac{nS^2}{\sigma^2}$

μ آماره آزمون برای برآورد σ^2 جامعه با میانگین مجهول : $\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

۲۰. فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی به حجم $n = 36$ از توزیع پواسون با پارامتر λ باشد. برای آزمون فرض $H_0: \lambda = 3$ در مقابل $H_1: \lambda = 4$ در سطح $\alpha = \%5$ اگر $\sum X_i = 144$ باشد در آن صورت آماره آزمون برابر است با:(کامپیوتر ــ سراسری ۸۷)

۱) 3 ۲) $\sqrt{12}$ ۳) 2 ۴) $\sqrt{10}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

قضیه حد مرکزی: هرگاه $X_1, \ldots, X_n$ دارای توزیع غیرنرمال با واریانس معلوم و $n > 30$ باشد، توزیع مجموع متغیرها $\sum X_i$ نرمال با پارامترهای $n\mu$ و $n\sigma^2$ است.

در این سؤال توزیع $X_1, \ldots, X_n$، پواسون و $n = 36 > 30$ است؛ بنابراین با توجه به قضیه حد مرکزی داریم:

$$\sum X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right) \to \sum X_i \sim N(n\lambda, n\lambda) \to \sum X_i \sim N(36\times 3 \,,\, 36\times 3)$$

میانگین و واریانس در توزیع پواسون با پارامتر توزیع یعنی λ برابر است. $\mu = \sigma^2 = \lambda$

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{144 - 36\times 3}{\sqrt{36\times 3}} = \dfrac{36}{6\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} \\ \sum X_i = 144 \;,\; n = 36 \;,\; \mu = \sigma^2 = \lambda = 3 \end{cases}$$

توجه: در آزمون فرض همیشه بحث بر سر رد کردن و یا رد نکردن فرض H_0 است و آماره آزمون نیز بر مبنای فرض H_0 انجام می‌شود بنابراین در این سؤال بر مبنای فرض H_0 مقدار $\lambda = 3$ در نظر گرفته خواهد شد. (البته اگر به اشتباه هم بر مبنای فرض H_1، $\lambda = 4$ را در نظر بگیرید جواب در گزینه‌ها نیست.)

۲۱. فرض کنید $1,2,3,4,5$ **یافته‌های یک نمونه تصادفی از** $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ **باشد. برای آزمون** $H_0 : \mu = 2.5$ **در مقابل** $H_1 : \mu \neq 2.5$**، مقدار آماره آزمون کدام است؟ (کامپیوتر ــ سراسری ۸۹)**

۱) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

حل:گزینه ۳ درست است.

توزیع جامعه نرمال، واریانس جامعه $\left(\sigma^2\right)$ نامعلوم و $n \leq 30$ است؛ بنابراین برای آزمون فرضیه $H_0 : \mu = \mu_0$ از آماره t استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{3 - 2.5}{\frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \bar{X} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{1+2++3+4+5}{5} = 3 \\ S^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5-1} = \dfrac{10}{4} \;\; \to \;\; S = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....